ПРОГРАМА
вступного іспиту зі спеціальності
111 «Математика»
для вступників на навчання в аспірантурі

I. Математичний аналіз

1. Функції однієї змінної: границя функції в точці; дослідження локальної поведінки функції; неперервні функції та їх основні властивості. Обернена функція та умови її існування.

2. Похідна та її застосування: означення та правила обчислення похідних; теореми про функції, що мають похідну; диференціал функції, похідні та диференціали старших порядків; формула Тейлора; дослідження функцій на екстремум.

3. Невизначений інтеграл: означення, властивості та методи інтегрування.

4. Визначений інтеграл: означення, основні властивості.

5. Числові ряди: означення збіжності, критерій Коші; критерій та ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами; абсолютно і умовно збіжні ряди.

6. Функціональні ряди: означення, критерій та ознаки рівномірної збіжності; властивості рівномірно збіжних рядів, почленне диференціювання та інтегрування; степеневі ряди та їх основні властивості, розвинення елементарних функцій у степеневі ряди.

7. Функції кількох змінних: границя в точці; неперервність; властивості неперервних функцій на компактах; частинні похідні; диференційованість; формула Тейлера; дослідження на екстремум; градієнт, похідна за напрямом; теорема про існування неявної функції.

8. Невластиві інтеграли: означення, властивості, ознаки збіжності; властивості функцій, що визначаються невластивими інтегралами. Інтеграли, що залежать від параметра: неперервність, диференціювання та інтегрування по параметру.

9. Кратні інтеграли: означення, властивості, обчислення; невластиві кратні інтеграли,

10. Криволінійні та поверхневі інтеграли; означення, властивості, обчислення; формула Грі на, Гауса-Остроградського і Стокса.

11. Ряди і інтеграл Фур'є: означення, властивості рядів Фур'є відносно ортонормованих систем функцій; ознаки збіжності тригонометричних рядів Фур'є; розклад функцій в тригонометричні ряди Фур'є; інтегральна формула Фур'є; перетворення Фур'є.

2. Алгебра

1. Означення групи, підгрупи, кільця і поля. Приклади. Поняття фактор – групи.

2. Лінійні простори: означення, лінійна незалежність, базис, розмірність; евклідові та унітарні скінченновимірні простори; приклади.

3. Лінійні оператори у скінченновимірних просторах: означення, матричний опис; ядро і образ, ранг і дефект; простір лінійних операторів.

4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь; необхідна та достатня умова розв'язності (теорема Кронекера-Капеллі); теорема про структуру розв’язків. Формула для обчислення оберненої матриці.

5. Канонічна форма матриці лінійного оператора: жорданова форма матриці; теорема Гамільтона-Келі.

3. Функціональний аналіз

1. Міра множин: означення та властивості; міра Лебега на прямій і в просторі R^n.

2. Вимірні функції: означення, основні властивості.

3. Інтеграл Лебега: означення, основні властивості; теореми про граничний перехід під знаком інтеграла. , .

4. Метричні простори: означення, приклади, повнота, сепарабельність; принцип нерухомої точки та його застосування.

5. Банахові і гільбертові простори: означення, приклади, властивості норми і скалярного добутку.

6. Лінійні неперервні функціонали і оператори: означення, властивості, норма; обернені оператори.

7. Компактні множини і компактні оператори в бананових просторах: означення, властивості; теореми Фредгольма для операторних рівнянь 2-го роду з компактними операторами.

8. Резольвента і спектр оператора: означення, властивості, спектр компактних і самоспряжених операторів.

4. Аналітичні функції комплексної змінної

1. Означення та приклади аналітичних функцій.

2. Інтегральна теорема і формула Коші.

3. Розклад аналітичної функції в ряд Тейлора.

4. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Класифікація особливих точок.

5. Лишки: означення; основна теорема; обчислення інтегралів з допомогою лишків.

5. Звичайні диференціальні рівняння

1. Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь; означення типу та класифікація розв’язків; розв’язність елементарних квазілінійних рівнянь першого порядку.

2. Теорема існування та єдиності розв’язків задачі Коші для рівнянь та системи рівнянь. Особливі точки і особливі розв’язки диференціальних рівнянь.

3. Лінійні диференціальні рівняння: структура загального розв'язку; знаходження розв'язків лінійних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами; методи знаходження частинних розв’язків неоднорідних рівнянь та систем.

4. Стійкість розв'язків систем нелінійних рівнянь: означення; метод функцій Ляпунова; дослідження на стійкість за першим наближенням.

5. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку: побудова загального розв’язку; розв’язність задачі Коші.

6. Рівняння з частинними похідними

1. Класифікація рівнянь з частинними похідними: рівняння 2-го порядку, їх типи та зведення до канонічної форми; гіперболічні, еліптичні та параболічні рівняння довільного порядку.

2. Задача Коші для рівнянь довільного порядку в класах аналітичних функцій: теорема Ковалевської; доведення єдиності методом Хольмгрена.

3. Основні задачі для рівнянь математичної фізики: задача Коші; крайові задачі; початково-крайові задачі; поняття про коректність; приклад Адамара.

4. Задача Коші та початково-крайові задачі для рівнянь гіперболічного типу: розв'язування задачі Коші для гіперболічних рівнянь методом характеристик; формула Кірхгофа; методи розв'язування початково-крайових задач; загальна схема методу Фур’є розв’язання змішаної задачі для гіперболічних рівнянь.

5. Гармонічні функції: означення, принцип максимуму та його застосування до доведення єдиності розв’язку задачі Діріхле; розв’язування задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа методом потенціалу.

6. Параболічні рівняння 2-го порядку: принцип максимуму та його. застосування до доведення єдиності розв'язків задач Коші і Діріхле; розв'язування задачі Коші; інтеграл Пуассона; методи розв'язування початково-крайових задач.

7. Класифікація за І.Г. Петровським систем диференціальних рівнянь із частинними похідними довільного порядку (гіперболічні, еліптичні,

параболічні).

Л і т е р а т у р а

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и вузов. – М.: Высш. школа, 1981, т.1 и 2.

2. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие. – К.: Вища школа, 1985. – 528с.

3. Ильин В.А., Позняк З.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296с.

4. Люстерник Л.А., Соболєв В.И. Краткий курс функционального анализа: Учеб. пособие. – М: Высш.шк., 1982. – 271с.

5. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций: Учеб. пособие. – К.: Вища шк., 1990. – 600с.

6. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977. – 320с.

7. Степанов В.В. Курс диференціальних рівнянь – К.: Радянська шк., 1953. – 444с.

8. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища шк., 1981. – 504с.

9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512с.

10. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424с.

11. Петровский И.Г. Лекций об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400с.

12 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735с.