

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Львівська політехніка»

**Джуман Богдан Богданович**

УДК 528.221+528.223

**АПРОКСИМАЦІЯ РЕГІОНАЛЬНОГО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ  
НЕОРТОГОНАЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ**

05.24.01 – геодезія, фотограмметрія та картографія

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Львів – 2016 р.

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Національному університеті “Львівська політехніка”  
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук, професор  
**Марченко Олександр Миколайович**,  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
професор кафедри вищої геодезії та астрономії

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук, професор  
**Железняк Олег Олександрович**,  
Національний авіаційний університет,  
завідувач кафедри аерокосмічної геодезії

кандидат технічних наук, доцент  
**Тадєєв Олександр Антонович**,  
Національний університет водного  
господарства та природокористування,  
доцент кафедри геодезії та картографії

Захист відбудеться 25 листопада 2016 р. о 12<sup>00</sup> годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.12 у Національному університеті “Львівська політехніка” (79013, Львів-13, вул. Карпінського, 6, ауд. 502 II навч. корпусу).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Національного університету “Львівська політехніка” (79013, Львів, вул. Професорська, 1).

Автореферат розісланий 21 жовтня 2016 р.

*Вчений секретар спеціалізованої  
вченої ради, к. т. н., доц.*

Б.Б. Паляниця

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми досліджень.** Починаючи з фундаментальних досліджень Лежандра і Гаусса в області теорії Ньютонівського потенціалу, класичним представленням гравітаційного поля або відповідного гравітаційного потенціала небесних тіл став його запис у вигляді нескінчених рядів кульових функцій Лежандра, яке прийняло міждисциплінарне значення при вивченні статичних і залежних від часу полів Землі і планет. Слід зауважити, що така параметризація гравітаційного потенціалу не тільки вважається стандартною, але й однією з найкращих для розв'язування сучасних наукових і прикладних задач небесної механіки, супутникової геодезії, глобальної геодинаміки тощо.

Основною задачею геодезії є визначення фігури, гравітаційного поля Землі та їх зміни в часі. Знання форми та розмірів Землі необхідні в багатьох галузях, перш за все для визначення положення об'єктів на земній поверхні і правильного їх відображення у вигляді карт, планів і цифрових моделей місцевості. Фігуру Землі в залежності від поставлених задач можна розглядати як сферу, еліпсоїд обертання, геоїд чи квазігеоїд.

На сьогоднішній день побудовано багато глобальних і регіональних моделей гравітаційного поля різного рівня точності. Наприклад, однією з перших моделей надвисокого рівня точності була модель EGM2008, побудована до 2190 степеня і 2159 порядку. Під час її побудови використовувалися гравіметричні та альтиметричні дані, а також дані з супутника GRACE. Також слід відмітити модель EIGEN-6C4, побудовану в 2014 році до 2190 степеня/порядку. Як вихідні дані для побудови цієї моделі використовувалися гравіметричні та альтиметричні дані, а також дані з супутників GOCE, GRACE і LAGEOS. Слід відмітити, що існує ряд моделей, побудованих виключно за супутниковими даними, проте до значно нижчих порядків. Наприклад, модель GGM05G побудована за даними з супутників GOCE і GRACE в 2015 році до 240 степеня/порядку. Що стосується регіональних гравітаційних моделей, наприклад, в 2012 році була побудована модель UKG2012 на територію України з використанням методу середньої квадратичної колокації. Як вихідні дані використовувалися дані з шести альтиметричних місій ERS-1, ERS-2, TOPEX-POSEIDON, GFO, ENVISAT і JASON-1, а також дані GPS-нівелювання на 4070 пунктах та відомості про топографію. Проте з появою все нових і точніших даних виникає необхідність уточнення вже існуючих і побудови нових моделей гравітаційного поля.

У зв'язку з відсутністю достатньої кількості даних на полюсах Землі навіть високоточні моделі гравітаційного поля не дозволяли обчислювати трансформанти гравітаційного поля з потрібною точністю в цих регіонах. Для вирішення цієї проблеми на міжнародній конференції по Арктичному Полю в м. Celle (Німеччина) в жовтні 1998 року виникла ініціатива розробити докладну гравіметричну базу даних на територію Арктики. З метою створення регіонального (квазі)геоїда на територію Арктики організацією NGA було розроблено AGP, який передбачав створення ґриду гравітаційних аномалій у вільному повітрі роздільною здатністю 5'×5' на дану територію з викорисан-

ням даних аерогравіметрії, супутникової альтиметрії, а також даних морської гравіметрії. Задекларована точність цих даних наступна: дані аерогравіметрії мають точність порядку 2 мГал, дані морської гравіметрії – 6 мГал, а точність даних супутникової альтиметрії < 5 см. Таки чином, очікувана точність висот (квазі)геоїда складає 15 см. Використання цих даних дає змогу побудувати регіональну гравітаційну модель на територію Арктики.

Для побудови регіонального гравітаційного поля на територію Арктики (на регіон, який за формою нагадує сегмент сфери) необхідно підібрати відповідний метод. Томпсон і Тет розширили сімейство функцій Лежандра, ввівши функції Лежандра цілого степеня і дійсного порядку, які формують ортогональну систему функцій на сегменті сфери, проте на всій сфері вони є неортогональними. Вперше на практиці їх використав Haines G.V. в 1988 р. для моделювання регіонального магнітного поля. Основними сучасними світовими експертами в даних питаннях вважаються Haines G.V., de Santis A., Torta G.M., Thebault E., Hwang C. та ін. Крім того, поліноми Лежандра з дробовими індексами було застосовано О. Марченком для побудови сімейства коваріаційних функцій, що базуються на потенціалах радіальних мультиполів.

Вагомою проблемою побудови моделі гравітаційного поля є велика кількість вихідних даних, що потребує значних затрат часу і машинних ресурсів при побудові такого поля. Тому в роботі поставлено задачу оптимізації процесу створення моделі регіонального гравітаційного поля з використанням сферичних функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Розробки автора використовувалися в рамках науково-дослідної роботи Національного університету «Львівська політехніка»: «Комплексна геодинамічна модель гравітаційного поля і деформацій земної кори регіону Чорного моря за супутниковими даними», («Геоїд»), (заклучний), номер держреєстрації 0111U001213.

**Мета та завдання дослідження.** Основною метою дисертаційної роботи є вдосконалення існуючих методів побудови регіональних гравітаційних полів та побудова комбінованої моделі регіонального гравітаційного поля. Для створення високоточної моделі регіонального гравітаційного поля високої роздільної здатності слід використовувати велику кількість вихідних даних. Основний акцент поставлено на розробку такої регулярної сітки, яка б дозволила обчислювати розріджену матрицю нормальних рівнянь і пришвидшити процес її обертання з використанням функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку на сегменті сфери.

Основними завданнями дисертаційної роботи є:

- аналіз різних методів побудови моделей глобального та регіонального гравітаційних полів;
- розробка алгоритму опрацювання даних гравітаційних аномалій у вільному повітрі на сегменті сфери;
- удосконалення методів побудови моделей регіонального гравітаційного поля за даними гравітаційних аномалій у вільному повітрі;

- виведення формул для обчислення і обертання розрідженої матриці нормальних рівнянь;
- побудова комбінованого розв'язку моделі регіонального гравітаційного поля на територію Арктики за даними гравітаційних аномалій у вільному повітрі;
- перевірка побудованої моделі з даними GPS-нівелювання на регіон Арктики.

**Об'єктом досліджень** є регіональне гравітаційне поле Землі, а **предметом досліджень** в дисертаційній роботі є метод ASHA побудови моделі регіонального гравітаційного поля високої роздільної здатності за даними гравітаційних аномалій у вільному повітрі.

**Основним методом досліджень** є запропонована в роботі модифікація методу ASHA для опрацювання даних гравітаційних аномалій у вільному повітрі з AGP.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в тому, що:

1. Розроблено методику побудови регіональних гравітаційних полів методом ASHA;
2. Виведено формули для обчислення та обертання розрідженої матриці нормальних рівнянь;
3. Розроблено модифікацію методу ASHA, яка дозволяє значно скоротити час обчислення невідомих коефіцієнтів моделі;
4. Створено модель регіонального гравітаційного поля на територію Арктики за даними гравітаційних аномалій у вільному повітрі до 150 степеня/порядку;

**Практичне значення результатів.** Важливим практичним аспектом створення моделі регіонального гравітаційного поля з використанням вищезгаданого алгоритму є можливість уточнення вже існуючих моделей регіональних (на даний регіон) і глобальних гравітаційних полів. Максимально якісний розв'язок можна отримати у випадку використання великої кількості вихідних даних. Тому дана дисертаційна робота спрямована на створення методів, які дають змогу обчислення моделі на основі великої кількості різнорідних даних з використанням ортогональних властивостей базових функцій на сегменті сфери.

**Особистий внесок здобувача.** Основні наукові положення, які становлять зміст дисертації, були сформульовані та вирішені автором самостійно. Особистий внесок автора полягає у обґрунтуванні методу апроксимації регіонального гравітаційного поля та розроблення модифікації даного методу, яка дала змогу використовувати дискретні ортогональні властивості базових функцій.

У роботах, опублікованих у співавторстві, дисертантові належать: [3] – виведення основних формул та виконання основних обчислень, [4] – підготовка вихідних даних та виконання обчислень, [5] – підготовка вихідної інформації і деякі ілюстрації, [6, 7] – виконання основних обчислень та ілюстрації.

**Апробація результатів дисертації.** Матеріали дисертаційних досліджень

було представлено на 5 міжнародних конференціях, а саме:

- IV міжнародна наукова конференція «Innowacyjne technologie geodezyjne – zastosowanie w roznych dziedzinach gospodarki»  
(Поланчик, Польща, 22-24 травня 2013 р.)
- міжнародна наукова конференція «Internationales Vortragsprogramm»  
(Нойбранденбург, Німеччина, 21 червня 2013 р., 22 червня 2014 р.)
- міжнародна наукова конференція «Геофорум»  
(Брюховичі, Україна, 24 квітня 2015 р.)
- VI міжнародна наукова конференція «Innowacyjne technologie geodezyjne – zastosowanie w roznych dziedzinach gospodarki»  
(Камьонка, Польща, 10-12 червня 2015 р.)

**Публікації:** за результатами дисертаційних досліджень опубліковано 7 наукових праць, з яких 6 статей у наукових фахових виданнях України, 3 з яких у науковому періодичному виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази, і 1 у збірнику конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, списку використаних джерел (110 найменувань). Загальний обсяг дисертації становить 115 сторінок, дисертація містить 34 рисунки та 3 таблиці.

## **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і задачі дослідження, визначено об'єкт та предмет дослідження, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, викладено відомості про апробацію роботи, повноту публікацій.

У першому розділі „**Основні характеристики гравітаційного поля Землі**” подано відомості про теорію потенціалу, зокрема функції потенціалу сили тяжіння, сили притягання і відцентрової сили. Також розглянуто та подано визначення поверхні геоїда, квазігеоїда і телуроїда.

Подано основні відомості про аномалії висоти, а також розглянуто „чисті” і „змішані” гравітаційні аномалії у вільному повітрі. Описано процес редукції гравітаційних аномалій у вільному повітрі.

Другий розділ роботи „**Методи апроксимації геопотенціалу**” присвячений аналізу існуючих методів побудови глобальних та регіональних гравітаційних полів. Існує велике різноманіття методів побудови гравітаційного поля, кожен з яких відповідає модельному або операційному підходам фізичної геодезії. Операційний підхід вимагає апріорного вивчення додаткової інформації про гравітаційне поле Землі. Врахування цієї інформації дозволяє одержати стійкий розв'язок та призводить до оптимальних лінійних оцінок. Недоліком цього методу є те, що порядок матриці, яку необхідно обернути, співпадає з кількістю вихідних даних. Модельний підхід передбачає знаходження невідомих коефіцієнтів моделі на основі вихідних даних, за допомогою яких можна знаходити геопотенціал та його трансформанти.

В даному розділі проаналізовані основні методи побудови гравітаційного поля, такі як розклад функції потенціалу в ряд за сферичними чи

еліпсоїдальними функціями, використання радіальних та нецентральных мультиполів, середня квадратична колокація.

Кожен з вищеперечислених методів має свої переваги та недоліки:

1) розклад потенціалу в ряд за сферичними чи еліпсоїдальними функціями використовують виключно для моделювання глобального гравітаційного поля, тому що в локальному регіоні вони стають неортогональними і призводять до поганої обумовленості матриці нормальних рівнянь;

2) радіальні та нецентральної мультиполя використовують для побудови глобального та регіонального гравітаційного поля відповідно;

3) метод середньої квадратичної колокації можна використовувати як для побудови глобального, так і регіонального гравітаційного поля, проте перед тим необхідно центрувати вихідні дані.

Особливу увагу приділено сферичним функціям Лежандра першого роду, які представляють частину сімейства ортогональних розв'язків рівняння Лапласа в сферичній системі координат.

Також наведено різні методи обчислення матриці нормальних рівнянь та алгоритми знаходження невідомих коефіцієнтів при побудові моделі гравітаційного поля.

У третьому розділі „Гармонічний аналіз на сегменті сфери гравітаційних аномалій у вільному повітрі” детально розглянуто використання функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку для моделювання регіонального гравітаційного поля.

„Глобальне” представлення гравітаційних полів за допомогою сферичних функцій не є надійним, коли виміри розміщені тільки на певній частині земної поверхні. Глобальні сферичні гармоніки втрачають свою ортогональність на обмеженому регіоні і розв'язок стає нестабільним. В такому випадку доцільно використовувати функції, ортогональні в межах даного регіону.

Для побудови регіонального гравітаційного поля здебільшого використовують операційний підхід фізичної геодезії, зокрема, такі методи як середня квадратична колокація чи швидке перетворення Фур'є. В даному розділі проаналізовано модельний підхід для створення регіонального гравітаційного поля, а саме метод SCHA, а також інші алгоритми, такі як ASHA та TOSCA, які є дочірними від SCHA. Цей метод передбачає використання сферичних функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку.

Дві сферичні функції Лежандра  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  та  $R_{sl}(\theta, \lambda)$  є ортогональними на сфері, тобто  $\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{sl}(\theta, \lambda) d\sigma = 0$ , де  $\sigma$  – поверхня сфери. Проте якщо мова

йде не про всю сферу, а про якусь довільну її частину, наприклад, сегмент сфери чи сферичну трапецію, то на такій частині сфери сферичні функції Лежандра не будуть ортогональними  $\iint_{\sigma_0} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{sl}(\theta, \lambda) d\sigma_0 \neq 0$ , де  $\sigma_0$  – сегмент сфери.

Іншими словами, на сегменті сфери сферичні функції Лежандра втрачають свою ортогональність, що призводить до нестабільності матриці нормальних рівнянь при визначенні невідомих коефіцієнтів.

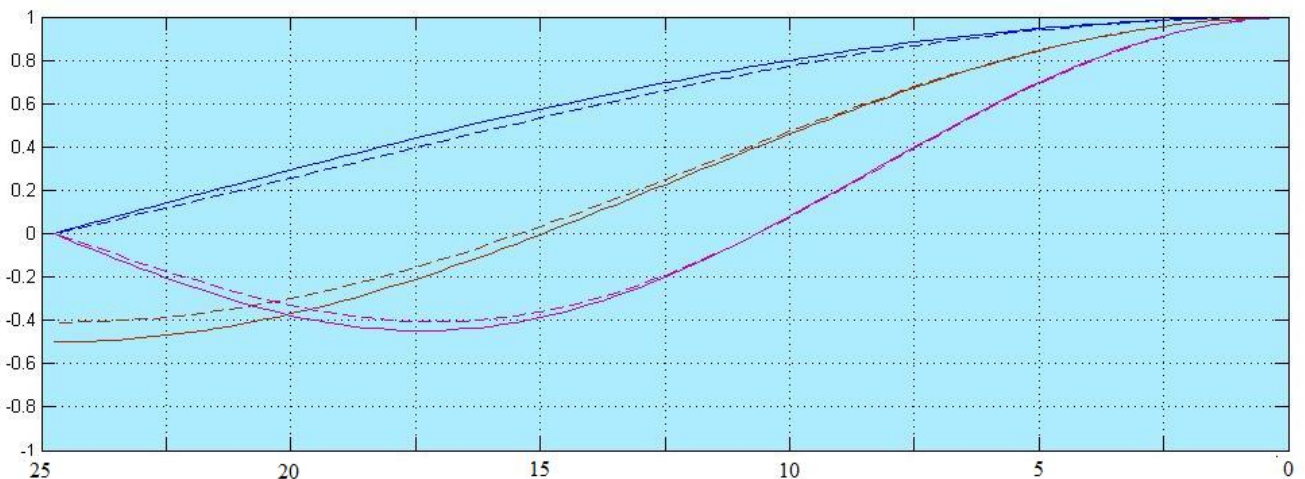
Проте згідно теорії Штурма-Ліувілля існують дві системи функцій, які є ортогональними на сегменті сфери. Це сферичні функції Лежандра цілого степеня і дійсного порядку  $R_{n_k m}(\theta, \lambda)$  та  $R_{s_r l}(\theta, \lambda)$ , де  $n_k$  та  $s_r$  – це дійсні числа, які залежать від величини сегменту сфери, а  $k$  і  $r$  – це індекси, які упорядковують ці числа. Вираз  $\iint_{\sigma_0} R_{n_k m}(\theta, \lambda) R_{s_r l}(\theta, \lambda) d\sigma_0$  буде рівний нулю у двох випадках: якщо числа  $k-m$  і  $r-l$  обоє парні (перша система функцій) або обоє непарні (друга система функцій). Очевидно, в загальному, навіть ці функції не є ортогональними на сегменті сфери. Незважаючи на це, вони мають властивості (детально описані в даному розділі), які надають їм велику перевагу при побудові регіонального гравітаційного поля на сегменті сфери в порівнянні зі звичайними сферичними функціями Лежандра.

Для практичного знаходження функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку їх слід розкласти в гіпергеометричний ряд

$$P_{n_k m}(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \mu}{2}\right). \quad (1)$$

Тим не менше, досить складно знаходити як самі функції Лежандра цілого степеня і дійсного порядку, так і їхні норми, а також числа  $n_k$ . Проте ці проблеми перестають бути актуальними, якщо спроектувати вихідні дані з сегменту сфери на половину сфери. Такий алгоритм називається ASHA.

В даному розділі порівняно різні підходи, такі як Spherical cap harmonic analysis (SCHA), Adjusted spherical harmonic analysis (ASHA), Translated origin spherical cap harmonic analysis (TOSCA), які базуються на використанні вищенаведених функцій (рис 1). Також проаналізовано та теоретично доповнено теорію знаходження різних видів норм даних функцій.



**Рис. 1** Функції  $P_{10}(\cos\theta), P_{20}(\cos\theta), P_{30}(\cos\theta)$  на сегменті сфери  $\theta_0 = 90^\circ$  (суцільна лінія) та  $P_{n_1 0}(\cos\theta), P_{n_2 0}(\cos\theta), P_{n_3 0}(\cos\theta)$  на сегменті сфери  $\theta_0 = 25^\circ$  (штрих-пунктирна лінія), де  $\theta \in [0, 25^\circ]$

Крім того, розроблено алгоритм для швидкого знаходження матриці нормальних рівнянь і невідомих коефіцієнтів моделі, який базується на ортогональних властивостях функцій (1), а саме





$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \cos m\lambda; \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \sin m\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Даний алгоритм розроблено як для випадку застосування техніки SCHА, так і для техніки АSHA. Показано, що він пришвидшує час знаходження невідомих коефіцієнтів моделі в  $d$  разів

$$d = \frac{(K_m + 1)^4 + (K_m + 1)^2}{2 \sum_{i=1}^{K_m} (i^2 + i) + (K_m + 1)^2 + K_m + 1}. \quad (7)$$

У четвертому розділі „Побудова регіонального (квазі)геоїда на територію Арктики” виконано практичні дослідження, результатом яких є комбінована модель регіонального гравітаційного поля на територію Арктики.

Як вихідні дані було використано гравітаційні аномалії у вільному повітрі з Арктичного гравітаційного проекту (AGP)  $\Delta g_{AP}$  з роздільною здатністю  $5' \times 5'$  на території Арктики (рис. 2). Ці гравітаційні аномалії були утворені методом комбінування різної інформації про гравітаційне поле в даному регіоні. Задекларована точність цих даних наступна: дані аерогравіметрії мають точність порядку 2 мГал, дані морської гравіметрії – 6 мГал, а точність даних супутникової альтиметрії складає  $< 5$  см. Таки чином, очікувана точність висот квазі(геоїда) складає 15 см.

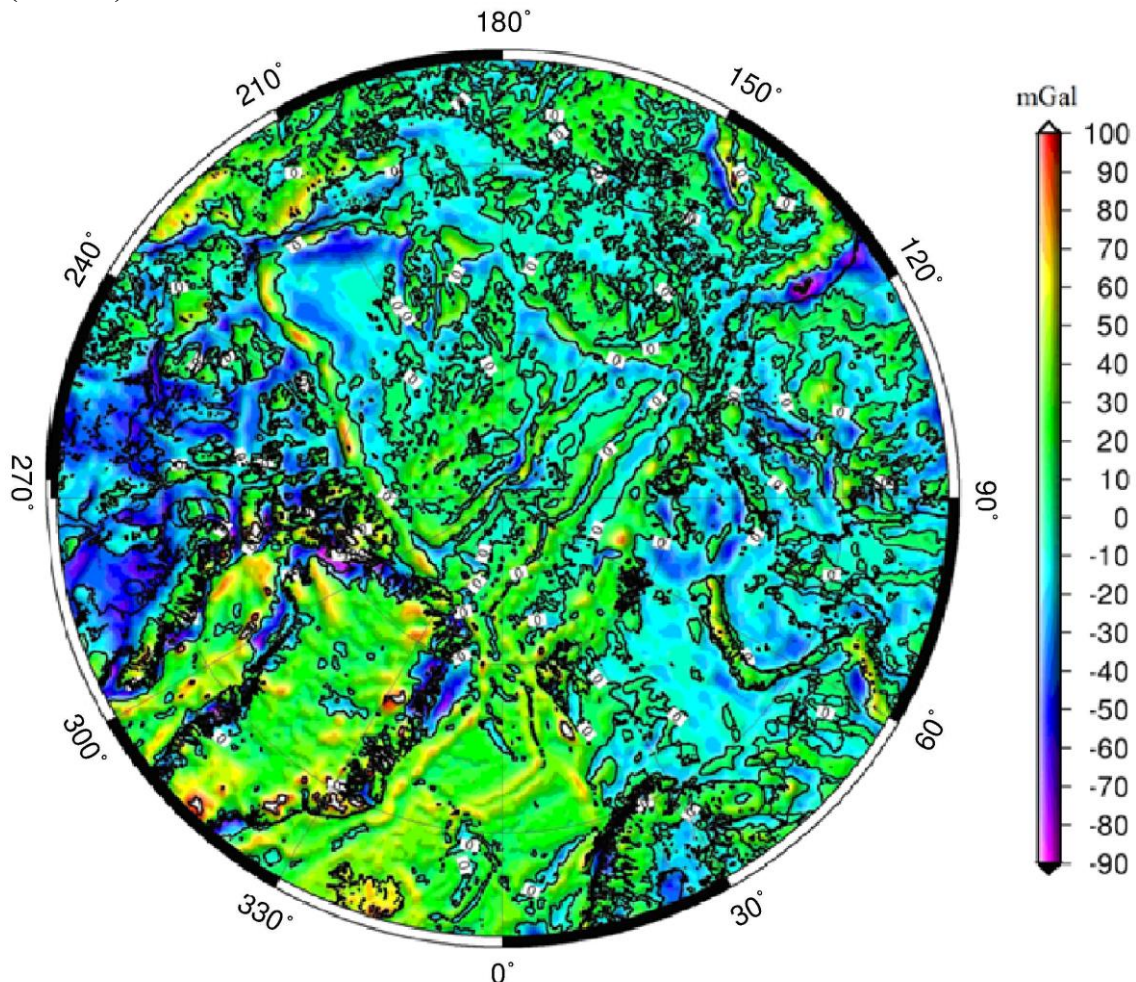


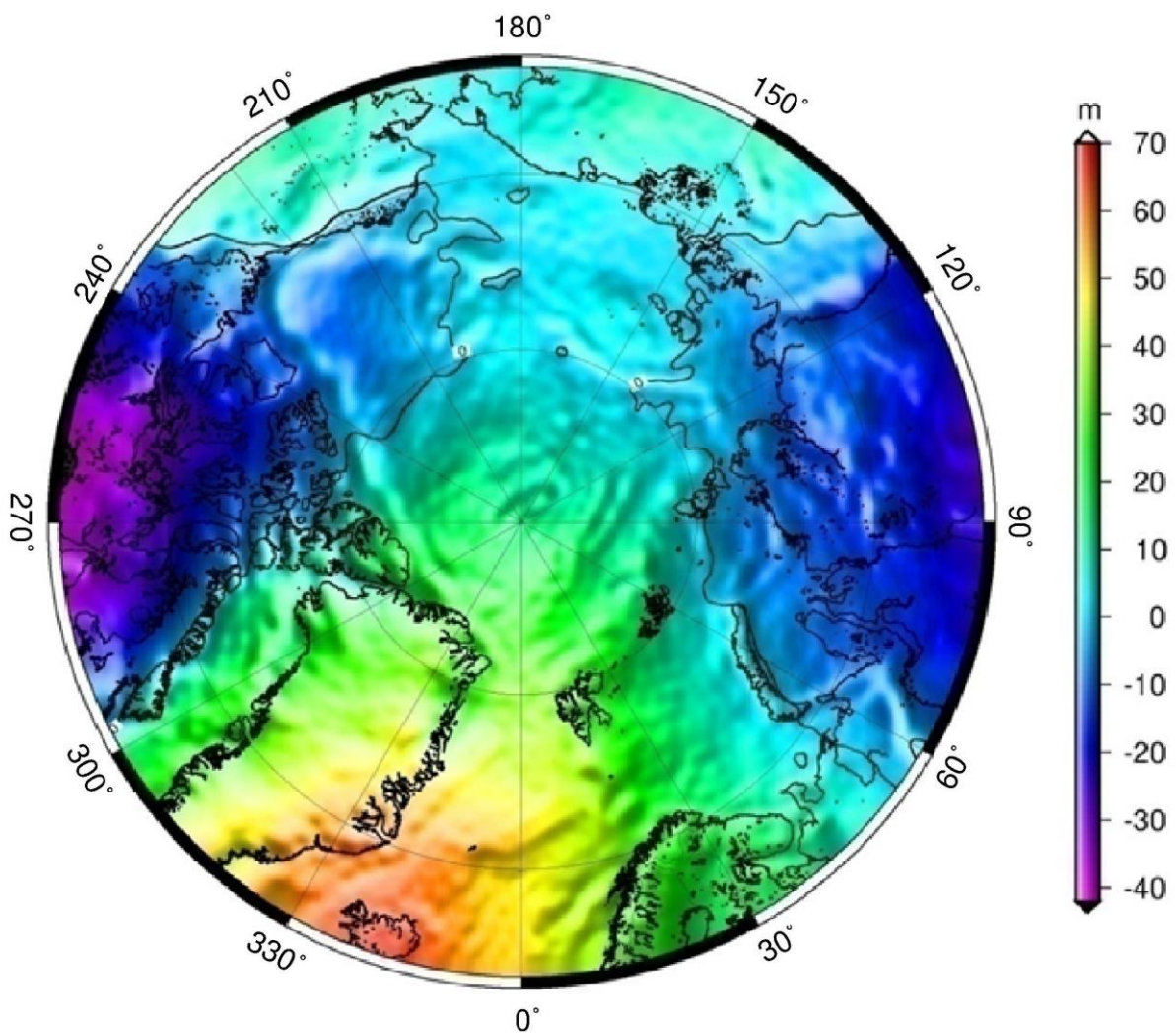
Рис. 2 Гравітаційні аномалії у вільному повітрі  $\Delta g_{AP}$  з Арктичного гравітаційного проекту

Для обчислення регіонального (квазі)геоїда використано процедуру „Вилучення-Відновлення”. Для цього розділено висоту (квазі)геоїда  $\zeta$  на дві частини:

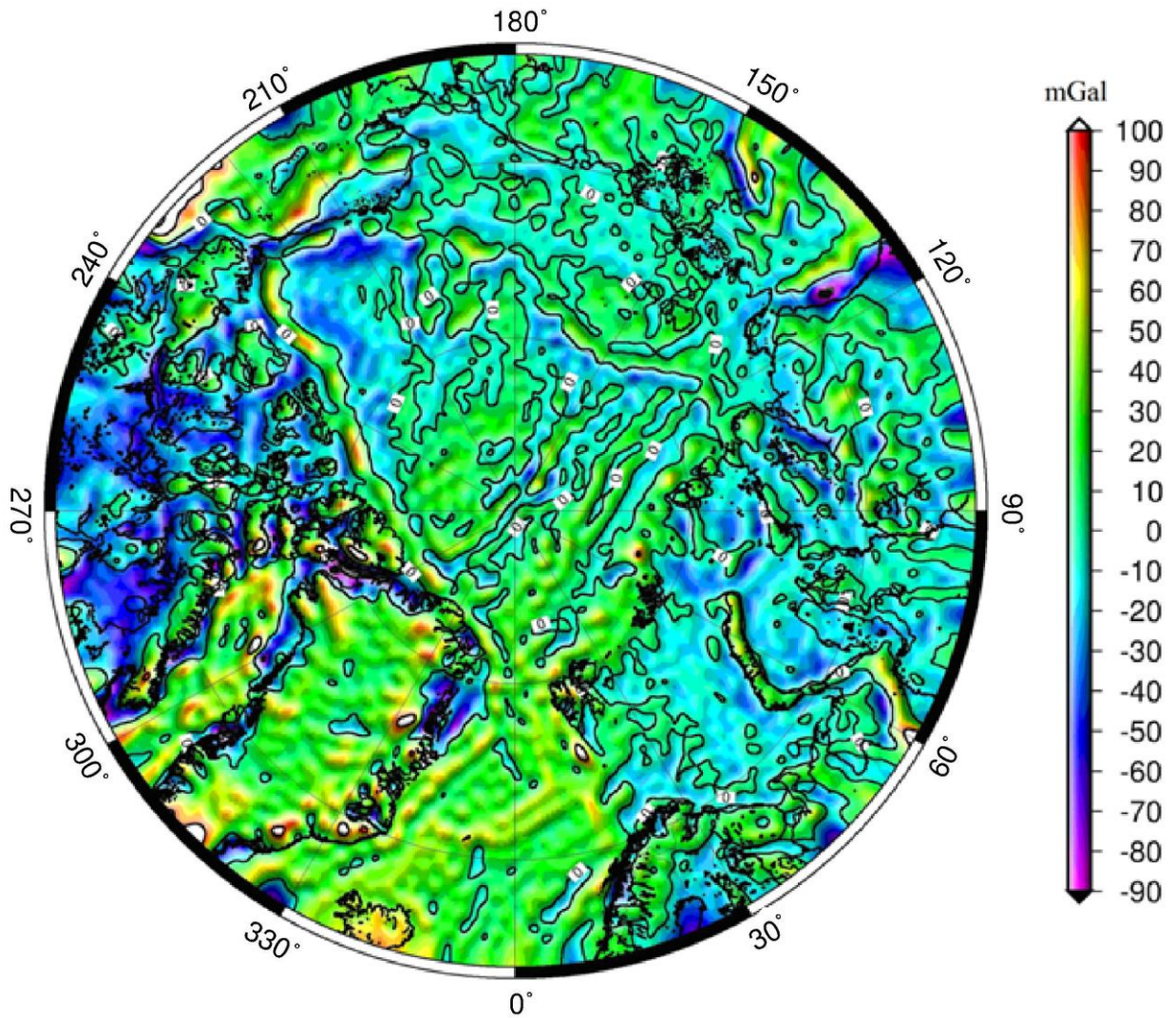
$$\zeta = \delta\zeta + \zeta_M, \quad (8)$$

де  $\delta\zeta$  – внесок висот (квазі)геоїда, що відповідає короткохвильовим особливостям гравітаційного поля, а  $\zeta_M$  – внесок висот (квазі)геоїда, що відповідає довгохвильовим особливостям гравітаційного поля і який було обчислено з використанням глобальної моделі гравітаційного поля EGM2008 (рис.3).

Також було обчислено гравітаційні аномалії у вільному повітрі  $\Delta g_M$  за моделлю EGM 2008 до 360-го порядку (рис. 4).



**Рис. 3** Внесок висоти (квазі)геоїда  $\zeta_M$ , що відповідає довгохвильовим особливостям гравітаційного поля

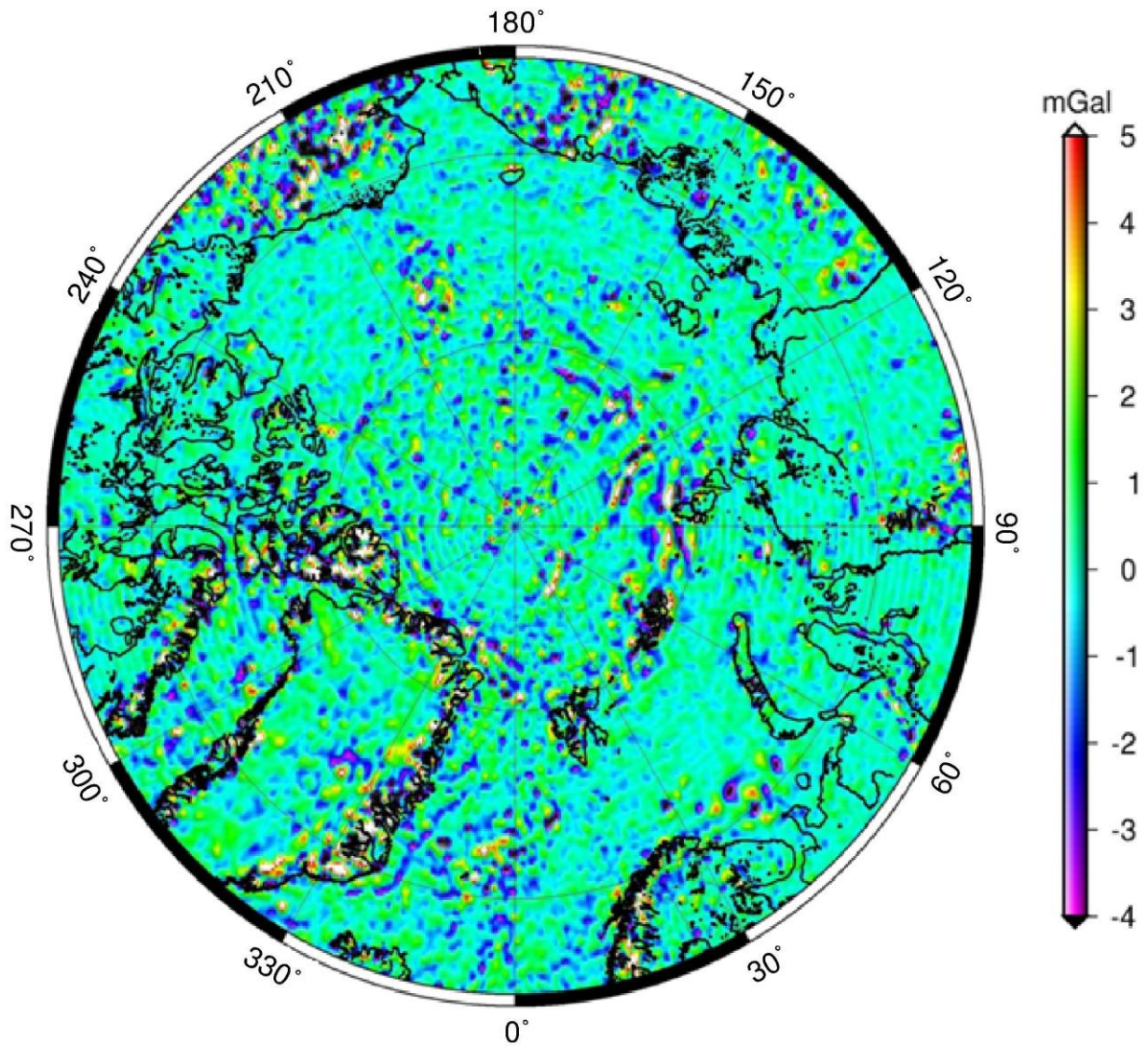


**Рис. 4** Гравітаційні аномалії у вільному повітрі  $\Delta g_M$ , обчислені за моделлю EGM 2008 до 360-го порядку

Провівши операцію „Вилучення”,

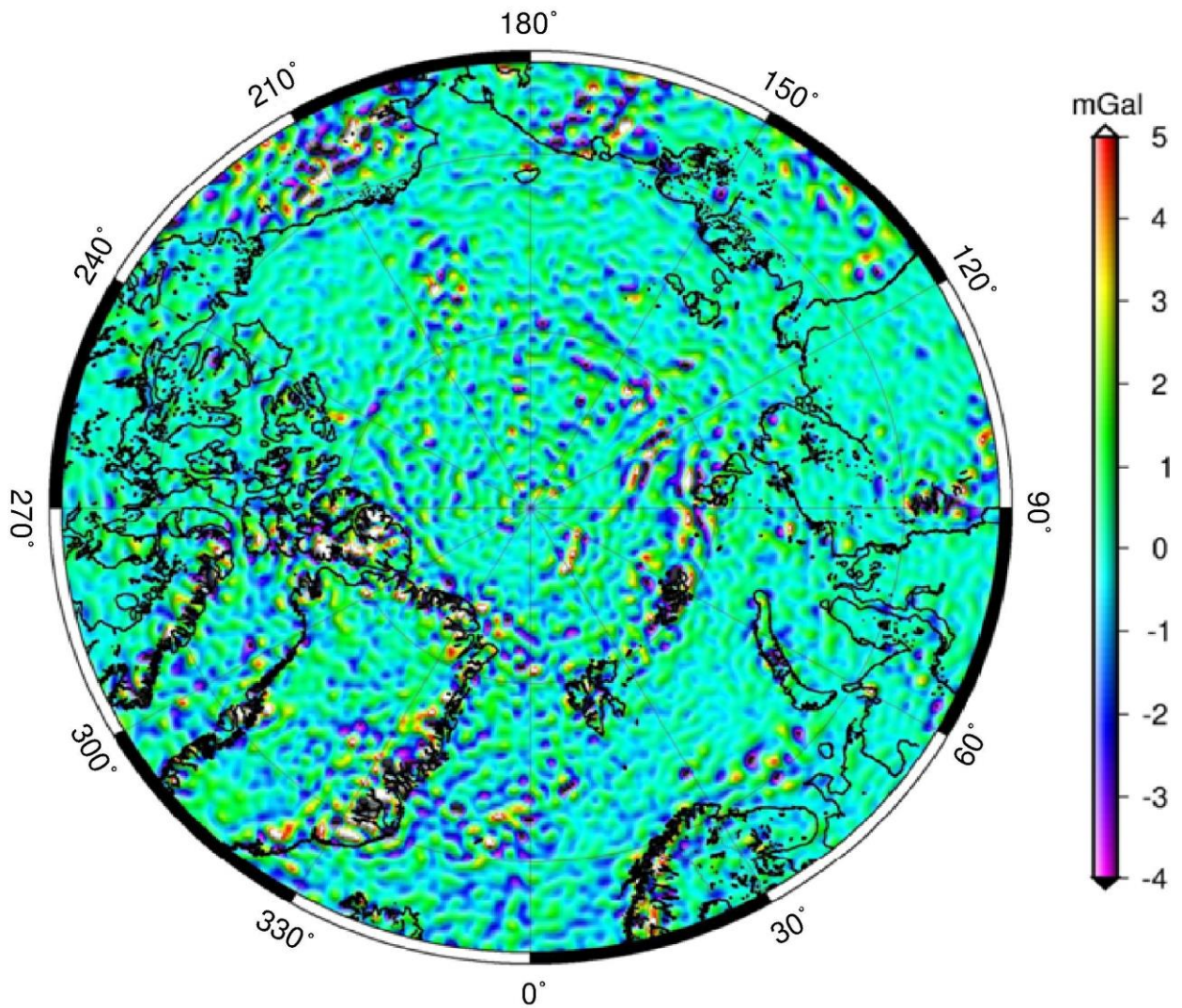
$$\delta\Delta g = \Delta g_{AP} - \Delta g_M, \quad (9)$$

отримаємо залишкові значення гравітаційних аномалій у вільному повітрі  $\delta\Delta g$  (рис. 5).



*Рис. 5 Залишкові значення гравітаційних аномалій у вільному повітрі  $\delta\Delta g$*

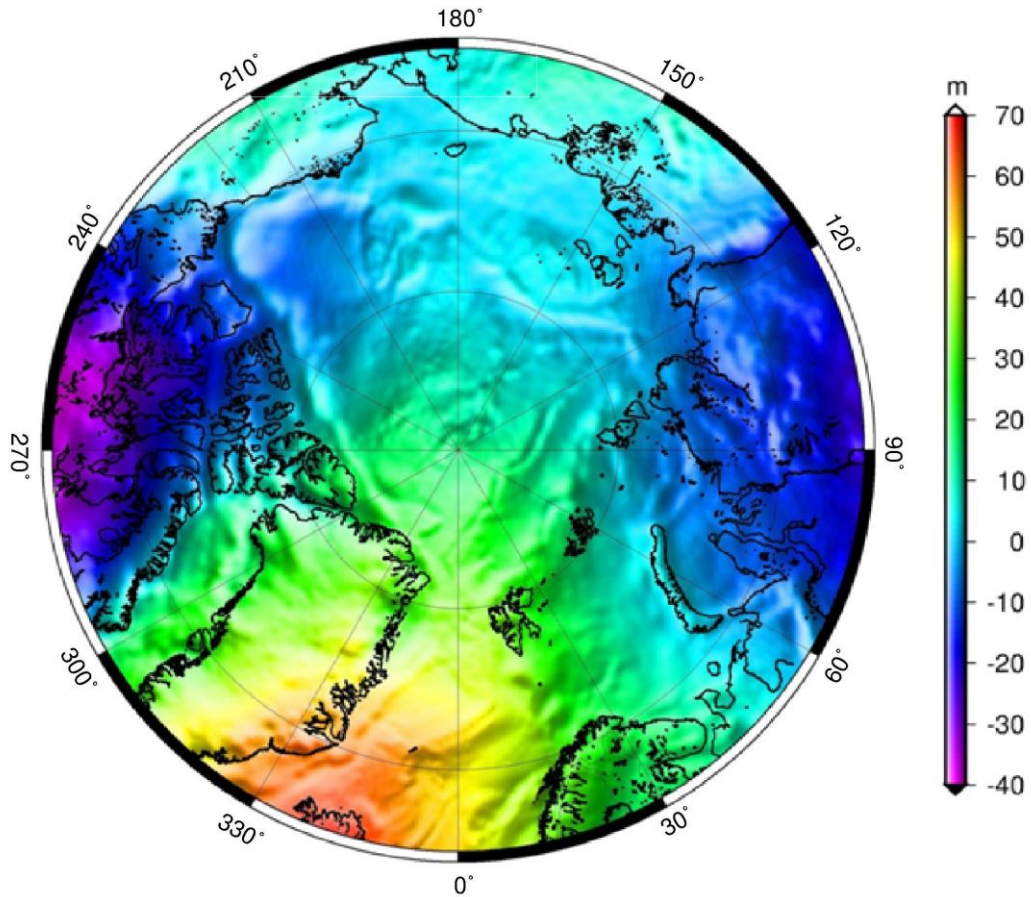
З використанням отриманих залишкових значень гравітаційних аномалій у вільному повітрі було побудовано АША-модель на територію Арктики до 150-го порядку (рис.6).



**Рис. 6 ASHA-модель залишкових значень гравітаційних аномалій у вільному повітрі на територію Арктики до 150-го порядку**

Таким чином, була отримана комбінована модель регіонального (квазі)геоїда на територію Арктики (рис. 7). Така комбінована модель являє собою суму глобальної моделі EGM2008 і ASHA-моделі

$$\zeta = \frac{GM}{\gamma R} \sum_{n=2}^{360} \sum_{m=0}^n \{ \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda) \} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) + \frac{GM}{\gamma R} \sum_{k=2}^{150} \sum_{m=0}^k \{ \bar{C}_{km}^* \cos(m\lambda) + \bar{S}_{km}^* \sin(m\lambda) \} \bar{P}_{km}(\cos\theta) \quad (10)$$



**Рис. 7 Регіональний (квазі)геоїд на територію Арктики**

Основні характеристики полів гравітаційних аномалій у вільному повітрі, такі як мінімальне, максимальне та середнє значення, а також стандартне відхилення, подано в таблиці 1. В свою чергу, основні характеристики полів висот (квазі)геоїда подано в таблиці 2.

*Таблиця 1*

Основні характеристики полів гравітаційних аномалій у вільному повітрі

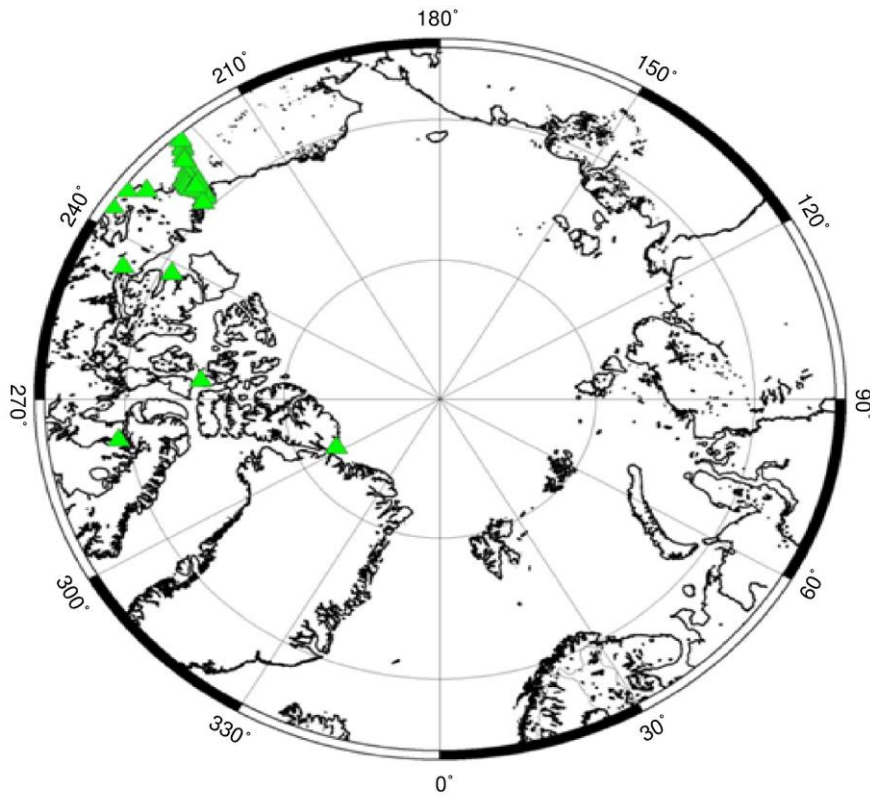
	Мін., мГал	Макс., мГал	Сер., мГал	Ст. відх., мГал
$\Delta g_{AGP}$	-167.5	222.7	3.50	27.32
$(\Delta g_M + \delta \Delta g_{mod})$	-154.3	198.4	3.10	26.62

*Таблиця 2*

Основні характеристики полів висот (квазі)геоїда

	Мін., м	Макс., м	Сер., м	Ст. відх., м
$\zeta_M$	-40.5	68.1	10.8	17.85
$\zeta$	-41.0	68.2	10.9	17.89

Для порівняння отриманої моделі висот (квазі)геоїда (10) було використано 49 точок, на яких проводилося GPS-нівелювання на території Арктики. Схема розміщення даних точок зображена на рисунку 8.



**Рис. 8** Схема розміщення точок GPS-нівелювання

В таблиці 3 подано різниці  $d$  між модельними значеннями висот (квазі)геоїда та значеннями, отриманими з GPS-нівелювання.

*Таблиця 3*

Різниці висот (квазі)геоїда

B, °	L, °	d, m	B, °	L, °	d, m	B, °	L, °	d, m
68,302	226,489	0,153	67,663	226,151	-0,015	65,193	236,566	0,104
67,437	226,228	0,109	67,908	226,425	0,124	68,250	225,204	0,071
67,457	226,246	0,188	68,192	226,563	0,123	65,361	221,700	0,113
67,098	223,874	-0,108	68,562	226,024	0,037	67,792	226,222	0,116
67,245	224,793	-0,156	68,690	225,864	0,076	68,037	226,512	0,137
67,429	225,134	0,059	68,754	225,651	0,084	68,898	225,470	0,116
67,416	225,126	0,070	69,061	225,408	0,095	68,373	225,902	0,094
65,068	221,751	-0,103	69,226	225,757	0,138	68,306	226,473	0,149
65,772	222,154	-0,063	69,437	226,986	0,257	69,438	227,006	0,261
65,899	222,470	-0,002	69,437	227,011	0,291	68,203	224,885	0,025
66,261	223,191	-0,063	68,217	224,998	-0,041	68,292	225,570	0,194
66,449	223,367	-0,021	68,148	224,564	0,059	82,491	297,676	-0,551
66,565	223,692	-0,264	65,275	233,214	0,260	74,691	265,106	-0,463
69,288	226,096	0,119	65,281	233,157	0,248	67,818	244,868	-0,439
65,193	236,575	0,097	66,253	231,356	0,265	69,377	278,190	-0,439
67,543	226,212	0,111	66,257	231,370	0,312	70,736	242,239	-0,393
82,494	297,660	-0,561						

Як видно з таблиці 3, стандартне відхилення цих різниць складає  $\approx 0.22$ м. В свою чергу, стандартне відхилення різниць між висотами (квазі)геоїда з моделі EGM2008 та висотами з GPS-нівелювання на цих точках складає  $\approx 0.26$ м.



## ВИСНОВКИ

1. Проаналізовано різні підходи та алгоритми апроксимації регіонального гравітаційного поля Землі, такі як SCHА, АSHА та TOSHА і встановлено, що для задач геодезії найкраще підходить метод АSHА.

2. Отримано формули для побудови та обертання розрідженої матриці нормальних рівнянь при моделюванні регіонального гравітаційного поля методом АSHА (5) з використанням ортогональної властивості базової системи функцій по довготі;

3. Обґрунтовано побудову комбінованої моделі регіонального гравітаційного поля, яка включає в себе як коефіцієнти глобальної моделі, так і знайдені за допомогою вищезгаданого алгоритму коефіцієнти регіональної АSHА-моделі.

4. Розроблено та реалізовано алгоритм створення комбінованої моделі регіонального гравітаційного поля в межах процедури „Вилучення-Вдновлення”.

5. Для апробації запропонованого методу побудовано комбіновану модель регіонального гравітаційного поля на територію Арктики. Як вихідні дані було використано гравітаційні аномалії у вільному повітрі на територію Арктики з проекту АGR, розміщені на рівномірній сітці 5'×5'. Достовірність отриманої моделі підтверджено на двох незалежних масивах даних. Апробація даної моделі на висотах (квазі)геоїда проводилася з моделлю EGM 2008 та на ряді точок з висотами (квазі)геоїда, отриманими за допомогою GPS-нівелювання.

Запропонований алгоритм створення комбінованої моделі регіонального гравітаційного поля за допомогою неортогональної системи функцій може використовуватися для побудови регіонального (квазі)геоїда з використанням різних видів вихідних даних на регіон, який за формою близький до сегменту сфери.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Джуман Б. Апроксимація аномалій сили ваги методом АSHА на територію Арктики / Б.Б. Джуман // Геодезія, картографія та аерофотознімання, 80, 2014. – С. 62-68.
2. Джуман Б. Про побудову моделі локального гравітаційного поля / Б.Б. Джуман // Геодинаміка - №1(14), 2013. – С. 29-33.
3. Джуман Б. Побудова матриці нормальних рівнянь для моделювання локального гравітаційного поля / О.М. Марченко, Б.Б. Джуман // Геодезія, картографія та аерознімання, 2014. – (79), С. 29-34.
4. Джуман Б. Оцінювання тензора швидкостей деформацій за даними GPS вимірювань у регіоні Греції, Туреччини та Ірану / О. Марченко, К. Третяк, Н. Ярема, Б. Джуман // Геодинаміка, 1 (12), 2012. – С. 5-10.

5. Джуман Б. Поле лінійних швидкостей та рухи земної кори в регіоні південно-східної Європи / О. Марченко, К. Третяк, Н. Ярема, Б. Джуман, І. Сідоров // Геодинаміка, 2 (13), 2012. – С. 18-27.
6. Dzhuman B. Regional quasigeoid determination: an application to arctic gravity project / A. Marchenko, B. Dzhuman // Geodynamics, Vol. 1(18), 2015. – P. 7-17.
7. Dzhuman B. Aproksymacja anomalii grawitacyjnych przez metode ASHA w regionie Arktyki / A. Marchenko, B. Dzhuman // IV Miedzynarodowa konferencja naukowa, Kamionka, 2015. – P. 110-111.

### АНОТАЦІЯ

**Джуман Б.Б. Апроксимація регіонального гравітаційного поля неортогональними функціями.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.24.01 – геодезія, фотограмметрія та картографія. – Національний університет „Львівська політехніка” МОН України, Львів, 2016.

Дисертацію присвячено розробленню теоретичних основ та методик для моделювання регіонального гравітаційного поля неортогональними функціями з використанням гравітаційних аномалій у вільному повітрі.

В роботі побудовано поле висот квазігеоїда на територію регіону Арктики. В якості вихідних даних прийнято поле гравітаційних аномалій у вільному повітрі на даний регіон з Арктичного проекту. Побудова (квазі)геоїда здійснювалася за допомогою процедури „Вилучення - Відновлення” в три етапи. На першому етапі від поля гравітаційних аномалій з Арктичного проекту віднімалися модельні значення гравітаційних аномалій, обчислені за моделлю EGM2008 до 360-го порядку. На другому етапі виконувалося моделювання отриманих залишків гравітаційних аномалій за допомогою методу adjusted spherical harmonic analysis (ASHA). Даний метод передбачає редукування вихідних даних на півсферу і їх моделювання за допомогою системи неортогональних функцій, які задовільняють рівнянню Лапласа. При цьому під час побудови матриці нормальних рівнянь було використано дискретну ортогональність базової системи функцій по довготі, що призвело до значного скорочення часу обчислень невідомих коефіцієнтів без втрати точності. На третьому етапі, використовуючи попередньо знайдені коефіцієнти моделі, було побудовано залишки висот (квазі)геоїда (короткохвильові ефекти поля), також побудовано внесок квазігеоїда із моделі EGM2008 (довгохвильові ефекти поля), і відновлено повне поле (квазі)геоїда.

**Ключові слова:** модель регіонального гравітаційного поля, метод ASHA, гравітаційні аномалії у вільному повітрі.

### АННОТАЦИЯ

**Джуман Б.Б. Аппроксимация регионального гравитационного поля неортогональными функциями.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

по специальности 05.24.01 – геодезия, фотограмметрия и картография. – Национальный университет „Львівська політехніка” МОН України, Львов, 2016.

Диссертация посвящена разработке теоретических основ и методик для моделирования регионального гравитационного поля неортогональными функциями с использованием гравитационных аномалий в свободном воздухе.

В работе построено поле высот квазигеоида на территорию региона Арктики. В качестве исходных данных принято поле гравитационных аномалий в свободном воздухе на данный регион с Арктического проекта. Построение (квази)геоида осуществлялось с помощью процедуры „Изъятие – Восстановление” в три этапа. На первом этапе от поля гравитационных аномалий с Арктического проекта отнимались модельные значения гравитационных аномалий, вычисленные по модели EGM2008 до 360-го порядка. На втором этапе выполнялось моделирование полученных остатков гравитационных аномалий с помощью метода *adjusted spherical harmonic analysis* (ASHA). Данный метод предусматривает редукцию исходных данных на полусферу и их моделирование с помощью системы неортогональных функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа. При этом при построении матрицы нормальных уравнений было использовано дискретную ортогональность базовой системы функций по долготе, что привело к значительному сокращению времени вычислений неизвестных коэффициентов без потери точности. На третьем этапе, используя предварительно найдены коэффициенты модели, было построено остатки высот (квази)геоида (коротковолновые эффекты поля), также построено вклад квазигеоида с модели EGM2008 (длинноволновые эффекты поля), и восстановлено полное поле (квази)геоида.

**Ключевые слова:** модель регионального гравитационного поля, метод ASHA, гравитационные аномалии в свободном воздухе.

## ANNOTATION

**Dzhuman B.B. Approximation of regional gravity field using nonorthogonal functions.** – On the rights of manuscript.

The thesis for the degree of candidate of technical sciences on specialty 05.24.01 – geodesy, photogrammetry and cartography. – „Lviv Polytechnic” National University under the MES of Ukraine, Lviv, 2016.

The thesis is devoted to development of theoretical foundations and methodologies for modeling of regional gravity field by nonorthogonal functions using gravity anomalies in free air.

Investigation to study quasigeoid computations based on the regional gravimetric data and different types of nonorthogonal basis functions was assessed to be important. The data set used is gravity anomalies data in the Arctic area taken from the Arctic Gravity Project (AGP).

Traditionally, initial data is selected in the nodes of grid, especially for fast computations. There are many kinds of uniform grids, which allow to speed up the process of computation the unknown harmonic coefficients. Among these grids it is possible to allocate the geographical grid, Gauss grid and others. Thus, grid is

developed to accommodate the initial data and is defined its basic properties in the segment of sphere and hemisphere . Using the properties of grid technique for computing the matrix of normal equations is obtained, which leads to a time reducing procedure. Also formulas for computations of unknown coefficients are obtained which allow to switch from the inversion of matrix with order  $\alpha^2$  to matrix with order  $\alpha$  . The proposed algorithm for the constructing of the normal equations matrix and determination of harmonic coefficients of the local gravitational field leads to a time reducing procedure without degradation of accuracy.

The method applied on this data set is adjusted spherical harmonic analysis (ASHA). The determination of the geoid heights in the Arctic area was based on the AGP gravity anomalies. Computation of the geoid heights was fulfilled by means of the procedure „Remove - Restore” in the three steps. On the first step the free air gravity anomalies of the EGM 2008 model up to degree/order 360 were subtracted from the initial gravity anomalies of the AGP to get rid of the low frequency gravity field content. On the second step the approximation of the residual gravity anomalies was based on the ASHA method. This method involves the transformation of initial data from spherical cap segment to the hemisphere and their approximation based on the nonorthogonal basis functions. On the whole the construction of the normal equations matrix may lead to the time consuming procedure. For this reason the discrete orthogonality property in longitude for the chosen basis system was taken into account and led to the significant decrease of the computational time of the residual coefficients  $\bar{a}_{km}, \bar{b}_{km}$  . On the last step the residual geoid heights (high frequency components of the gravity field) were computed via the residual harmonic coefficients  $\bar{a}_{km}, \bar{b}_{km}$  and added to the global contribution of geoid heights taken from the EGM2008 model up to degree/order 360 (low frequency components of the gravity field). Hence the gravity field model was constructed and compared with AGP gravity anomalies.

**Keywords:** model of regional gravity field, ASHA method, gravitaty anomalies in free air.