

ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»  
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

ГОРОШКО АНДРІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ


УДК 621.515: 62-251:539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ КОНСТРУКЦІЙНОЇ МІЦНОСТІ І ЗНИЖЕННЯ**  
**ВІБРАЦІЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ**

Спеціальність 05.02.09 – динаміка та міцність машин

Галузь знань 13 – механічна інженерія

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело 

Науковий консультант Ройзман Вілен Петрович, доктор технічних наук, професор

Хмельницький – 2017

## АНОТАЦІЯ

*Горошко А. В.* Методи оцінювання конструкційної міцності і зниження вібрацій механічних систем на основі обернених задач. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.02.09 «Динаміка та міцність машин» (131 – Прикладна механіка). – Хмельницький національний університет, Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, 2017.

У дисертації вирішено науково-прикладну проблему міцності механічних систем та підвищення ефективності зниження їх вібрацій (МС) на основі методів розв'язання обернених задач (ОЗ) динаміки та міцності. Отримані результати в сукупності складають певний внесок у подальший розвиток теорії і практики динаміки та міцності складних МС на різних етапах їх створення.

Визначення за кресленням сучасної турбомашини, яка не має вивчених раніше прототипів, кількісних характеристик маси, пружності, демпфування тощо є надзвичайно складною задачею, через необхідність урахування залучення до коливань приєднаних мас підшипників, корпусів, рами кріплення двигуна, а також через радіацію коливань різноманітних частин, що надають, з однієї сторони, амортизувальну дію, а з іншої – є збудниками коливань. Це викликало необхідність розробки методів постановки і розв'язання ОЗ ідентифікації параметрів машини за результатами відповідних експериментів, коли шукані параметри обчислюються з урахуванням всіх особливостей машини, які мають більш-менш суттєвий вплив. Цінність ідентифікованих параметрів полягає у тому, що вони знайдені з урахуванням прийнятої ідеалізації реального об'єкту, тобто приведені до вибраної математичної моделі динамічного процесу, що описує реальну систему.

У *першому* розділі роботи показано, що значна частина задач зниження вібрацій гнучких роторів, зокрема компресора газотурбінного двигуна (ГТД),

турбонасосного агрегату (ТНА) тощо може бути розв'язана з залученням методів ОЗ динаміки і теорії коливань. Розглянуті ОЗ динаміки швидкісних гнучких роторів формалізуються лінійними дискретними ОЗ класу інтерпретації даних вимірювань. Для того, щоб показати універсальність і всебічне застосування запропонованих методів, у роботі проаналізовано проблеми забезпечення міцності зовсім іншого класу МС, а саме герметизованих конструкцій електронних систем і шляхи їх вирішення із залученням методів ОЗ міцності. Для проектувального розрахунку на міцність запропоновано застосовувати оптимізаційні ОЗ параметричного синтезу.

Розв'язання розглянутих ОЗ динаміки і міцності ускладнене з причини відсутності достовірних даних про пружно-інерційні характеристики ротора і опор, силові, демпферні характеристики; похибки вимірювання параметрів та розкид реальних значень фізико-механічних характеристик матеріалів (ФМХ), похибки статистичного оцінювання при обробці експериментальних даних, а також похибки, викликані нестійкістю розв'язків некоректно поставленої ОЗ.

У другому розділі з метою підвищення ефективності зниження вібрацій і оцінювання міцності МС за рахунок збільшення адекватності їх математичних моделей розроблено метод параметричної ідентифікації математичних моделей динаміки і міцності МС, що враховує ступінь їх ідеалізації і умови експлуатації, який, на відміну від існуючих, полягає у залученні пробних параметрів або режимів, що дає змогу підвищити точність розрахунків за рахунок доозначення задач.

Показано, що для ідентифікації дисбалансів та пружно-інерційних характеристик для моделі гнучкого ротора з розподіленими параметрами, вся необхідна інформація про ротор може бути отримана із вимірювань його прогинів на деякій кількості некритичних частот обертання та розв'язанням ОЗ, що ґрунтуються на інтегро-диференціальних залежностях теорії згину. Розв'язавши такі рівняння, складені для двох взаємно перпендикулярних площин, отримано значення довжини векторів ексцентриситетів та кутів їх розташування, а отже, і дисбалансів, у заданому перерізі. Ці вимірювання можуть бути здійснені

відомими методами, наприклад, на вакуумних стендах або інших розгінних пристроях, а також безпосередньо при роботі машини під навантаженням.

Розглянуто методи ідентифікації гнучких роторів з використанням моделі з зосередженими масами. Обґрунтовано метод ідентифікації дисбалансів багатомасової моделі ротора за статичними і динамічними коефіцієнтами впливу та динамічними прогинами. Рівняння Фредгольма II роду для наближеного розв'язання без урахування гіроскопії замінюється матричним рівнянням, що пов'язує динамічні прогини ротора у місцях посадки дисків, статичні коефіцієнти впливу, маси та ексцентриситети дисків.

Розглянуті методи ідентифікації мають практичне значення лише тоді, коли похибки ідентифікації є малими, тобто моделі та відповідні розв'язки ОЗ стійкі відносно похибок вимірних значень параметрів. Досліджено динамічну модель багатодискового ротора з зосередженими масами і доведено, що найменш стійкими ділянками частот обертання при балансуванні є області поблизу критичних частот. Встановлено залежність для визначення найстійкіших ділянок частот. Це дає змогу обирати оптимальний з позицій точності метод ідентифікації дисбалансів ротора. Показано, що точність та надійність ідентифікації, а саме відносна похибка розрахунків ексцентриситетів, залежить від кількості мас моделі, що апроксимує реальний ротор, і частоти обертання при балансуванні, тому кількість мас розрахункової моделі ротора і однакову з нею кількість коректувальних мас необхідно вибирати з урахуванням потрібної обчислювальної точності методу і проводити вимірювання на тій частоті обертання ротора, при якій обчислювальні похибки є мінімальними. Продемонстровано, що зі збільшенням гнучкості ротора суттєво зростає ефективність ідентифікації ексцентриситетів з використанням коефіцієнтів впливу. Встановлена кількісна залежність між точністю вимірювання прогинів і частот обертання та розрахунковою схемою, що дає змогу для вибраної моделі ротора підбирати необхідну за точністю апаратуру, або навпаки – для наявної апаратури вибирати ефективну в сенсі стійкості модель. Досліджено вплив гіроскопічного ефекту і виявлено, що його врахування збільшує похибку

ідентифікації дисбалансів.

Встановлено, що для практичного використання в задачах параметричної ідентифікації роторів традиційна оцінка похибки розв'язку ОЗ за числом обумовленості є недостатньою, оскільки оцінюється лише осереднена норма вектора розв'язків досліджуваної ОЗ, а похибка окремого розв'язку, який має конкретний фізичний зміст, залишається невідомою. Доведено, що відносна похибка елемента вектора розв'язку може перевищувати відносну похибку норми вектора. Тому у роботі запропонована достатня оцінка дисперсій розв'язків ОЗ за дисперсіями вимірних величин, яка дозволяє точніше і надійніше оцінити похибки ідентифікації динамічних параметрів роторів. Для випадку, коли погана обумовленість ОЗ виникає через «незбалансованість» матриць коефіцієнтів, розроблено методи підвищення стійкості розв'язків ОЗ шляхом зменшення обумовленості за рахунок масштабування коефіцієнтів, оптимізуючи їх за критерієм мінімуму числа обумовленості. Оскільки в практиці розв'язання задач ідентифікації дослідник, як правило, має можливість здійснити декілька вимірювань, для ОЗ з погано обумовленими матрицями з метою забезпечення стійкості розв'язків обґрунтовано застосування статистичної регуляризації за допомогою методу найменших квадратів (МНК) та лінійної фільтрації оцінок за МНК з використанням методу головних компонент. Запропоновано представляти розв'язки інтервалами у вигляді статистичних оцінок.

У *третьому* розділі представлені результати практичного застосування розроблених методів у задачах зниження вібрацій роторів. Для п'яти- і десятимасової моделі з зосередженими масами десятиступінчатого компресора ГТД застосування методів забезпечення стійкості дозволило підвищити точність ідентифікації дисбалансів ротора, що дало змогу зменшити рівень його вібрацій у 2,5 рази. За допомогою методу пробних параметрів ідентифіковано реальні пружно-інерційні характеристики і дисбаланси ротора компресора, що дало змогу дослідити АЧХ двигуна і пояснити походження всіх резонансів. Пробним

параметром була пружність спеціального податливого кільця типу кільця фірми «Allison Engine Company», що одягалось на підшипник опори.

З використанням моделі гнучкого ротора з розподіленими параметрами ідентифіковано дисбаланси, жорсткості і маси, приведені до математичної моделі гнучкого ротора ТНА, що дало змогу провести балансування на робочій частоті обертання в трьох площинах корекції, в результаті якого вібрації знизилися у 6 разів, амплітуди вібрацій опор – у 4 рази, статичні напруження в матеріалі вала – у 3,5 рази, а динамічні – у 3 рази.

Наведені відомі рекомендації з призначення допустимих дисбалансів роторів при низькочастотному балансуванні і нормальному законі розподілу проекцій вектора дисбаланса. Продемонстровано, що на практиці експлуатаційні дисбаланси, виміряні для партії роторів, можуть мати ненормальний, і навіть полімодальний розподіл, викликаний різними умовами експлуатації. Розвинуто теорію експериментального оцінювання динамічних та міцнісних параметрів МС шляхом розробки методу обробки полімодальної щільності розподілу (ЩР) ймовірностей значень параметрів, що дає змогу за результатами вимірювань оцінювати їх точніше і надійніше. Запропонований метод обробки полімодальних даних полягає у поданні емпіричної ЩР імовірностей у вигляді суперпозиції унімодальних функцій (в частинному випадку – лінійною комбінацією Гауссових функцій). Запропоновано метод декомпозиції суміші, тобто пошуку параметрів нормального закону розподілу для кожної з функцій, а також їх вагових коефіцієнтів (апріорної імовірності) у суміші. Обґрунтовано вибір кроку побудови гістограм і способи призначення допустимого значення досліджуваного параметра з певною надійністю: метод екстремальних характеристик і метод інтегральних характеристик. Представлено спосіб розв'язання ОЗ для випадку полімодального розподілу елементів вектора вимірювань за рахунок переходу до ОЗ з нормально розподіленими параметрами, який полягає у декомпозиції суміші ЩР, переході до дискретного розподілу, класифікації параметрів дискримінантним аналізом на  $k$  класів, використовуючи функцію максимальної вірогідності, і розв'язанні замість одного

$k$  систем рівнянь. Розроблені методи і підходи дали змогу виявити причини полімодальності розподілу експлуатаційних дисбалансів партії компресорів, а також границі міцності керамічних конструкцій, і з більшою надійністю визначити допустимі значення цих характеристик для партій виробів.

У четвертому розділі розв'язувалась задача забезпечення міцності герметизованих компаундом конструкцій електронної техніки. Встановлено, що руйнування конструкції відбувалось через суттєвий розкид значень ФМХ кераміки і компаунду, різниця між якими при перепаді температури викликає контактні напруження, що перевищують допустимі. Ґрунтуючись на методах ОЗ інтерпретації даних вимірювань і методі пробних параметрів, розроблено розрахунково-експериментальний метод і засіб визначення фізико-механічних характеристик (ФМХ) конструкційних матеріалів з недостатньо вивченими властивостями, який відрізняється тим, що сполучну конструкцію з досліджуваного зразка матеріалу і зразка із пробного матеріалу нагрівають (охолоджують) з одночасною реєстрацією виниклих деформацій, за значеннями яких обчислюють контактні тиски і шукані характеристики, що дає змогу визначати ФМХ за від'ємних температур (де вони були невідомими) у пружно-деформованому стані, максимально наближеному до експлуатаційного. За допомогою методу ідентифіковано модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт лінійного температурного розширення компаунду при температурах від  $-60^{\circ}\text{C}$  до  $-20^{\circ}\text{C}$ , що дало змогу уточнити математичну модель, яка описує контактні тиски на границі досліджуваних матеріалів при термоударах від  $-60^{\circ}\text{C}$  до  $+70^{\circ}\text{C}$ .

Запропонований загальний підхід до розв'язання оптимізаційних ОЗ синтезу значень конструкторських параметрів складних МС. Для цього умови міцності, жорсткості, стійкості тощо МС тощо виражають у вигляді нерівностей, що утворюють область допустимих значень, яка визначає у просторі вхідних параметрів деяку криволінійну область працездатності машини. Параметричний синтез геометрично означає вписування в неї гіперпаралелепіпедів, які визначаються номінальною точкою, і, в загальному

випадку, набором значень нижніх і верхніх відхилень від неї. Поставлена задача зводиться до задачі умовної багатокритеріальної нелінійної оптимізації з обмеженнями, у якій вимагається визначити такі допустимі максимальні відхилення вхідних параметрів від номінальних значень, щоб в отриманому паралелепіпеді виконувалась система обмежень (умови міцності та ін.). Задача розв'язується, максимізуючи цільові функції у вигляді згорток або максимізуючи об'єм паралелепіпеда допусків. Застосування розробленого метода для розрахунково-експериментального оцінювання міцності герметизованих конструкцій електронної техніки дало змогу отримати допустимі оптимальні значення геометричних параметрів і ФМХ конструкції, дотримання яких гарантує виконання умов міцності і підвищує надійність і довговічність.

У *н'ятому* розділі розроблені методи ідентифікації параметрів деяких класів статистично-детермінованих, детермінованих та з розподіленими параметрами МС. Зокрема розроблено метод побудови -статистично-детермінованих моделей структурно-складних МС, який відрізняється врахуванням детермінованих залежностей параметрів окремих підсистем при плануванні експерименту. Запропонований метод, який дає змогу формувати статистичні моделі з урахуванням теоретичних залежностей, дає значний вииграш у кількості експериментів при реалізації повного факторного експерименту (ПФЕ), що дає змогу знизити трудомісткість і тривалість моделювання. Застосування методу статистично-детермінованого моделювання, а також методу розв'язання оптимізаційних ОЗ параметричного синтезу для отриманої моделі дало змогу отримати математичну модель формування потужності літакового відповідача під впливом механічних чинників, здійснивши у 13 разів менше експериментів, ніж це було необхідно при використанні ПФЕ; обґрунтувати необхідність зміни конструкції на безконтактну і для неї знайти допустимі значення параметрів, які забезпечують заданий рівень потужності.

Розроблено метод ідентифікації нелінійних силових характеристик коливальних систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами, з представленням силових чинників, які діють на досліджувану систему у вигляді



лінійної комбінації незалежних функцій із невідомими коефіцієнтами. Метод ґрунтується на аналітичному розв'язанні прямої задачі нелінійних коливань; зіставленні експериментально отриманих основних характеристик динамічного процесу коливальної системи із отриманим аналітичним розв'язком математичної моделі і розв'язанні СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів.

*Ключові слова:* динаміка, вібрації, міцність, механічна система, обернена задача, ідентифікація, синтез, математична модель.

## ABSTRACTS

*Goroshko A.V.* Methods for evaluating structural strength and reducing vibrations of mechanical systems on the basis of inverse problems. – Qualifying research paper: manuscript copyright.

Dissertation submitted for the degree of Doctor of Science in Engineering; field of research: 05.02.09 – Dynamics and Strength of Machines (131 – Applied Mechanics). – Khmelnytskyi National University, Lviv Polytechnic National University, Lviv, 2017.

The study examines the theoretical and practical problem of assessing strength of mechanical systems and reducing their vibrations by solving inverse problems of dynamics and strength. The accumulated findings make an essential contribution into the further development of theoretical and practical aspects of calculating the dynamics and strength of complex mechanical systems at different stages of their design.

Finding the quantitative characteristics of mass, elasticity, damping, etc. by the design of a modern turbomachine without previously studied prototypes is an extremely difficult task, due to the necessity of taking into account the oscillations of the attached masses of bearings, bodies and engine mounting frames and the radiation of oscillations in different parts which acts as both damping and oscillatory agent. This fact adds to the necessity of developing new methods for posing and solving inverse problems of machine parameters identification based on the results of the corresponding experiments, when the required parameters are calculated taking into account all the essential features of the machine. The value of the identified

parameters is that they are found taking into consideration the accepted idealization of the real object, i.e. they are reduced to the selected mathematical model of the dynamic process that describes the real system.

The *first* chapter of the thesis proves that many problems connected with vibration reduction in flexible rotors, in particular, gas turbine compressor rotor, turbopump assembly, etc., can be solved through inverse problems of dynamics and oscillation theory. The considered inverse problems of dynamics of high-speed flexible rotors are formalized by linear discrete inverse problems of measurement data interpretation class.

In order to demonstrate the versatility and diverse uses of the proposed methods, the current research reveals the problems of increasing strength in mechanical systems belonging to a completely different class, namely, hermetic structures of electronic systems, and suggests their possible solutions with the use inverse problems of strength. For design calculation of strength it is suggested to use optimizing inverse problems of parametric synthesis.

The solution of the considered inverse problems of dynamics and strength is complicated with little reliable data on the elastic-inertial characteristics of the rotor and the supports, power and damping characteristics, as well as insufficient information about measurement errors and spreading of real values of physical and mechanical characteristics of materials, statistical evaluation errors while processing experimental data, and errors caused by instability of solutions for an incorrectly posed inverse problem.

In the *second* chapter, in order to increase the effectiveness of reducing vibrations and assessing the strength of the mechanical systems by increasing the adequacy of their mathematical models, a method of parametric identification of mathematical models of mechanical system dynamics and strength was developed. This method takes into account the degree of their idealization and operating conditions and, as opposed to the existing ones, involves trial parameters or modes, which improves the calculation accuracy due to the extension of problem's definition.

It has been shown that for detection of imbalances and elastic-inertial characteristics for a model of flexible rotor with distributed parameters, all necessary information about the rotor can be obtained from measurement of its deflections at a certain number of uncritical rotational frequencies and as a result of solving inverse problems which are based on integro-differential dependences of bending theory.

Having solved these equations for two mutually perpendicular planes, we obtain the value of the length of the eccentricity vectors and the angles of their arrangement, and hence of the imbalances, in the given section. These measurements may be carried out by conventional methods, for example, on vacuum booths or other accelerating devices, and also while the machine is working under load.

The methods of flexible rotor identification using a model with lumped masses are considered. The method for imbalance detection in a multivariate rotor model based on static and dynamic coefficients of influence and dynamic deflections is substantiated. The Fredholm II equation for an approximate solution without taking into account the gyroscopy is replaced by a matrix equation that associates the dynamic deflections of the rotor at the disk positions, static coefficients of influence, mass and eccentricity of the disks.

The considered identification methods have practical value only when the identification errors are small, that is, the models and corresponding inverse problem solutions are stable in terms of the errors of the measured parameter values. The dynamical model of multi-disk rotor with lumped masses is investigated and it is proved that the least stable parts of the rotational frequencies during balancing are areas near critical frequencies. Dependence is established for determining the most stable frequency regions.

It allows choosing the optimal method for identification of rotor imbalances in terms of its accuracy. It is shown that the accuracy and reliability of identification, namely, the relative error of eccentricity calculations, depends on the mass of the model approximating the real rotor and the rotational speed when balancing, so the number of masses of the calculated rotor model and the same number of correction masses must be chosen taking into consideration the necessary calculating precision

of the method. It is necessary to carry out measurements at the frequency of rotation at which computational errors are minor.

It is demonstrated that the efficiency of eccentricity identification with the use of influence coefficients increases dramatically while rotor flexibility is increasing. The quantitative dependence is established between the accuracy of measurement of deflections and rotational frequencies and the design diagram, which makes it possible to choose the necessary accuracy level of equipment, or vice versa – for the existing equipment it is possible to choose an effective model in terms of its stability. The impact of the gyroscopic effect is investigated and it is found that by taking it into consideration the error of imbalance detection is increased.

It has been established that the conventional error estimation of inverse problems by the number of conditionality is not sufficient to be used in the tasks of parametric rotor identification, since only the averaged norm for the vector of solutions of the investigated inverse problem is estimated, and the error of a separate solution having a specific physical content remains unknown. It is proved that the relative error of solution vector element may exceed the relative error of vector norm.

Therefore, the paper suggests a sufficient estimation of inverse problem solution dispersions for the variables of the measured values, which allows a more accurate and reliable estimation of the errors while identifying rotor dynamic parameters. For the case when poor conditionality of the inverse problem is caused by the "imbalance" in coefficient matrices, methods for increasing the stability of inverse problem solutions are developed. The methods imply conditionality reduction by scaling the coefficients and optimizing them by the criterion of the minimum conditionality number.

Since a researcher is usually able to perform several measurements, the study substantiates the use of statistical regularization by means of the least squares method and linear filtration of the least squares method estimates using the method of the main components in order to ensure solution stability for the inverse problems with poorly determined matrices. It is offered to represent interval solutions in the form of statistical estimates.

The *third* chapter presents the results of the practical application of the developed methods in rotor vibration reduction problems. For the five- and ten-mass model with lumped masses of the ten-stage compressor, the application of methods for ensuring stability has improved the accuracy of rotor imbalance detection, which made it possible to reduce the level of its vibrations by 2.5 times.

Using the method of trial parameters, the real elastic-inertial characteristics and imbalances of the compressor rotor have been identified, which enabled to investigate the engine's frequency response and explain the origin of all resonances. The trial parameter was the elasticity of a special alloy ring such as the ring of the company "Allison Engine Company", which was put on the bearings of the support.

Using the model of a flexible rotor with distributed parameters we detected imbalances, stiffnesses and masses, which are brought to the mathematical model of the flexible rotor of turbopump assembly. This allowed to balance it at the working rotation frequency in three correction planes, thus decreasing the vibration by 6 times, vibration amplitudes of the supports – by 4 times, static stresses in the material of the shaft – by 3,5 times, and dynamic stresses – by 3 times.

The well-known recommendations on assigning admissible rotor imbalances at low-frequency balancing and the normal law of projection distribution of the imbalance vector have been given. It has been demonstrated that in practice, operating imbalances measured for a batch of rotors may have an abnormal, even polymodal distribution, caused by different operating conditions. The theory of experimental evaluation of dynamic and strength mechanical system parameters has been expanded by developing a method for processing the polymodal distribution density of probabilities for parameter values, which makes it possible to evaluate them more accurately and reliably according to the measurements.

The proposed method for polymodal data processing implies representing empirical probabilities in the form of a superposition of unimodal functions (in the particular case, a linear combination of Gaussian functions). The method of decomposition of the mixture is suggested, i.e. the search for the parameters of the normal distribution law for each of the functions, as well as their weight coefficients

(a priori probability) in the mixture. The choice of the step of constructing histograms and methods of assigning an admissible value of the studied parameter with certain reliability is substantiated: the method of extreme characteristics and the method of integral characteristics.

The study has yielded a new way of solving the inverse problem for the particular case of polymodal distribution of vector measurement elements. The method involves decomposing of distribution density mixture and transferring to discrete distribution, classifying the parameters through descriptive analysis into  $k$  classes by means of the maximum probability function and solving  $k$  systems of equations instead of one. The developed methods and approaches made it possible to find the reasons underlying the polymodality of operating imbalances of a batch of rotors and identify the strength limits of ceramic structures, determining the permissible values of these characteristics for a batch of products.

In the *fourth* chapter the problem of increasing the strength of the compressed-by-compound designs in electronic equipment was solved. It was established that the destruction of the structure occurred due to the significant spread of the values of physical-mechanical properties of ceramics and the compound. The difference between them at certain temperatures causes contact stresses exceeding permissible values.

Based on the methods of the inverse problems of measurement data interpretation and the method of trial parameters, an experiment-calculated method and a means for determining the physical-mechanical properties of structural materials with poorly studied properties have been developed. According to the suggested method, the connecting structure of the test sample of the material and sample from the test material is heated (cooled) with the simultaneous recording of the resulting deformations, on the values of which the contact pressure and the required characteristics are calculated, which makes it possible to detect physical-mechanical properties at negative temperatures (where they were unknown) in the elastically deformed mode, as close as possible to the operational one.

By means of the method, the elastic modulus, the Poisson coefficient and the linear temperature expansion coefficient of the compound at temperatures from  $-60\text{ C}$

to -20 C were identified, which made it possible to refine the mathematical model describing the contact pressure on the boundary of the materials under investigation during thermal shock from -60 C to + 70 C.

A general approach to solving optimization inverse problems of synthesizing the values of design parameters of complex mechanical systems is suggested. For this condition of strength, rigidity and stability of mechanical systems are expressed in the form of inequalities that form an area of permissible values, which determines some curvilinear area of machine's performance in the input parameters area. Parametric synthesis is geometrically represented by inserting hyperparallelepipeds in machine performance area, which are determined by a nominal point, and, in general, by a set of the corresponding lower and upper deviation values. The given task is reduced to the problem of conditional multiobjective nonlinear optimization with constraints, in which it is required to determine allowable maximum deviations of the input parameters from the nominal values so that in the obtained parallelepiped the system of constraints (conditions of durability, etc.) is fulfilled.

The problem is solved by maximizing the target functions in the form of convolutions or maximizing the volume of parallelepiped tolerances. The application of the developed method for calculation and experimental evaluation of strength in pressurized structures of electronic equipment has allowed obtaining admissible optimal values of geometrical parameters and physical-mechanical properties of the structure, whose observance guarantees the fulfillment of durability conditions and increases reliability and durability.

The *fifth* chapter provides methods for identifying the parameters of certain classes of statistically-determined, deterministic mechanical systems and those with distributed parameters. In particular, a method for constructing hybrid statistically-deterministic models of structurally complex mechanical systems is developed, which takes into account the deterministic dependencies of the parameters of individual subsystems while planning the experiment. The proposed method makes it possible to form statistical models based on theoretical dependencies, cutting the number of

experiments with implementation of a complete factorial experiment, thus reducing the complexity and duration of modeling.

Applying the method of statistically determined modeling, as well as the method of solving the optimization inverse problems of parametric synthesis for the obtained model, allowed to obtain a mathematical model of airplane responder power formation under the influence of mechanical factors, carrying out 13 times fewer experiments than it would be necessary when using complete factorial experiment and substantiating the necessity of changing the design to non-contact and finding acceptable parameters values that provide a given level of power.

The method for identifying the nonlinear power characteristics of oscillatory systems with lumped masses and distributed parameters with the representation of force factors acting on the investigated system in the form of a linear combination of independent functions with unknown coefficients is developed. The method is based on the analytical solution of the direct problem of nonlinear oscillations; by comparing the experimentally obtained basic characteristics of the dynamic process in the oscillating system with the obtained analytical solution of the mathematical model and solving the system of linear equations for relatively unknown coefficients.

*Keywords:* dynamics, vibration, strength, mechanical system, inverse problem, identification, synthesis, mathematical model.

### **Список публікацій за темою дисертації**

1. Горошко А. В. Обернені задачі параметричної ідентифікації механічних систем : монографія / А. В. Горошко, В. П. Ройзман. – Хмельницький : ХНУ, 2016. – 245 с.
2. Горошко А. В. Стан проблеми забезпечення якісного проектування структурно-складних технічних виробів та технологічних процесів їх виготовлення / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2012. – № 5. – С. 59–68.
3. Горошко А. В. Методи обробки емпіричних даних, що підпорядковуються багатомодальним законам розподілу / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вісник



Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 4. – С. 195–201.

4. Горошко А. В. Про застосування гаусової суміші для статистичної обробки емпіричних даних / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2013. – №3. – С. 138–142

5. Горошко А. В. Розрахунок допустимих значень параметрів об'єктів у випадку полімодальності їх імовірнісних розподілів / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вібрації в техніці та технологіях. – 2013. – № 4 (72). – С. 19–27.

6. Горошко А. В. Шляхи підвищення точності розв'язків зворотних задач / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 6. – С. 60–69.

7. Горошко А. В. Уточнення методу обробки статистичних даних / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Збірник наукових праць Національної академії Державної прикордонної служби України. Військові та технічні науки / гол. ред. Б. М. Олексієнко. – Хмельницький : Вид-во НАДПСУ, 2014. – № 1 (61). – С. 304–313.

8. Горошко А. В. Обернена задача ідентифікації фізико-механічних характеристик матеріалів структурно-складних технічних систем / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 4. – С. 135–139.

9. Горошко А. В. Обернена задача динаміки турбонасосного агрегату / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 3. – С. 195–201.

10. Горошко А. В. Підвищення ефективності розв'язання обернених задач, що описуються лінійними моделями / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 5. – С. 44–49.

11. Горошко А. В. Параметричний синтез допусків як множинна обернена задача забезпечення працездатності складних технічних систем / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Проблеми машиностроєння. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 43–50.

12. Горошко А. В. Досвід постановки і розв'язання задачі параметричного синтезу допусків в конструкції дискових конденсаторів / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. –

№ 6. – С. 148–152.

13. Ройзман В. П. Метод ідентифікації параметрів моделей складних технічних систем / В. П. Ройзман, А. В. Горошко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2015. – № 3 (79). – С. 44–49.

14. Горошко А. В. Синтез допусків в задачі забезпечення якості виробництва елементів герметизованої радіоелектронної апаратури / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2015. – № 4. – С. 167–174.

15. Горошко А. В. Застосування методу головних компонент для усіченої оцінки найменших квадратів під час розв'язання оберненої задачі ідентифікації ексцентриситетів ротора / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2015. – № 6. – С. 49–53.

16. Горошко А. В. Забезпечення працездатності вузла тертя механічної системи літакового відповідача / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Проблеми трибології. – 2015. – №4 (78). – С. 54–63

17. Горошко А. В. Статистичні методи розв'язання лінійних некоректно поставлених задач у випадку полімодального розподілу імовірностей вимірних даних / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Збірник наукових праць Національної академії Державної прикордонної служби України. Сер.: Військові та технічні науки / гол. ред. Б. М. Олексієнко. – Хмельницький : вид-во НАДПСУ, 2015. – № 3 (65). – С. 226–241.

18. Горошко А. В. Забезпечення міцності дискових конденсаторів шляхом розв'язання обернених задач міцності / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2015. – № 4 (74). – С. 5–12.

19. Горошко А. В. Метод пробних параметрів в задачі ідентифікації ротора з метою зменшення його вібрацій / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Нафтогазова енергетика. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ. – 2015. – № 2 (24). – С. 53–58.

20. Горошко А. В. Стійкість алгоритмів ідентифікації гнучких роторів / А. В. Горошко // Вибрации в технике и технологиях. – 2016. – № 1. – С. 23–29.

21. Горошко А. В. Забезпечення працездатності вузлів машин шляхом розв'язання обернених задач / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького

національного університету. Технічні науки. – 2016. – № 1. – С. 150–159.

22. Горошко А. В. Методи підвищення точності параметричної ідентифікації роторів / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки . – 2016. – № 3 (237). – С. 151–156.

23. Горошко А. В. Призначення допустимих дисбалансів для високошвидкісних роторів / А. В. Горошко // Вибрации в технике и технологиях. – 2016. – №2(82). – С. 69–76.

24. Пат. UA 95044 U. Україна, МПК G01N 3/08, G01N 25/00. Спосіб визначення фізико-механічних характеристик матеріалів / А. В. Горошко, Є. В. Коробко, С. А. Петрашук, В. П. Ройзман ; заяв. і патентотримувач – Хмельниц. нац. університет. – № 201406757 ; заявл. 16.06.2014 ; опубл. 10.12.2014, Бюл. № 23.

25. Горошко А. В. Представление и обработка статистических данных, не подчиняющихся унимодальным законам распределения / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Машиностроение и инженерное образование. – 2013. – № 3. – С. 56–77.

26. Горошко А. В. Обработка экспериментальных данных, подчиняющихся многомодальным законам распределения / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Петербургский журнал электроники. – 2013. – № 3. – С. 105–112.

27. Горошко А. В. Исследование динамики и снижение виброактивности турбонасосного агрегата путем решения обратных задач / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Машиностроение и инженерное образование. – 2014. №1. – С. 29–35.

28. Goroshko A. Experience Formulating and Solving Inverse Problems for Strength Design of Electronic Equipment / A. Goroshko // American Association for Science and Technology AASCIT Communications. Vol. 1, Issue 2. – August 2014. – online <http://www.aascit.org/communications/paperInfo?journalId=940&paperId=575>

29. Горошко А. В. Статистические методы обеспечения устойчивости решений обратных задач и их применение для снижения виброактивности роторов / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – № 3. – С. 50–57.

30. Горошко А. В. Обратные задачи обеспечения заданного уровня качества сложных технических систем /А. В. Горошко, В. П. Ройзман / Машиностроение и инженерное образование. – 2015. – № 3. – С. 31–44.

31. Горошко А. В. Повышение устойчивости решения плохо обусловленных обратных задач динамики / А. В. Горошко, В. П. Ройзман/ Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. – № 6. – С. 24–28.

32. Горошко А. В. Исследование устойчивости и точности алгоритма идентификации эксцентриситетов в задачах балансировки быстровращающихся роторов /А. В. Горошко, В. П. Ройзман, О. В. Бармина / Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. – № 3. – С. 42–48.

33. Royzman V. Multiple inverse problem / V. Royzman, A. Goroshko // Journal of Vibroengineering. September. – 2012. – Vol. 14. ISSUE 3. – С. 1417–1424.

34. Goroshko A. V. Methods for testing and optimizing composite ceramics-compound joints by solving inverse problems of mechanics / A. V. Goroshko, V. P. Royzman, A. Bubulis, K. Juzėnas // Journal of Vibroengineering. – 2014. – Vol. 16, Issue 5. – P. 2178–2187.

35. Goroshko A. Construction and practical application of hybrid statistically-determined models of multistage mechanical systems / A. Goroshko, V. Royzman, J. Pietraszek // Mechanics. – 2014. – Т. 20. – №. 5. – С. 489–493.

36. Pietrashek J. The Heuristic Approach to the Selection of Experimental Design, Model and Valid Pre-Processing Transformation of DoE Outcome / J. Pietrashek, A. Goroshko // Trans Tech Publications, Switzerland, Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 874. – P. 145–149.

37. Bootstrap Identification of Confidence Intervals for the Non-Linear DoE Model / J. Pietraszek, N. Radek, M. Stojek, A. Goroshko, M. Kołomycki // Applied Mechanics and Materials, Trans Tech Publications, Switzerland. – 2015. – Vol. 712. – P. 11–16.

38. Pietraszek J. The Principal Component Analysis of Tribological Tests of Surface Layers Modified with IF-WS2 Nanoparticles / J. Pietraszek, J. Korzekwa, A. Goroshko // Applied Mechanics and Materials, Trans Tech Publications, Switzerland. – 2015. – Vol. 235. – P. 9–15.

39. Goroshko A. V. Statistical Methods for Providing the Stability of the Solutions of Inverse Problems and Their Application to Decrease Rotor Vibroactivity / A. V. Goroshko, V. P. Roizman // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2015. – Vol. 44, № 3. – P. 232–238.

40. Goroshko A. V. Increase in Solution Stability of Ill Conditioned Dynamics Problems / A. V. Goroshko, V. P. Royzman // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2016. – Vol. 45, Issue 1. – P. 21–24.

41. Goroshko A.V. Study of the Stability and Accuracy of the Eccentricity Identification Algorithm in Fast-Revolving Rotor Balancing Problems / A. V. Goroshko, V. P. Royzman, O. V. Barmina // Journal of Machinery Manufacture and Reliability.– 2016. – Vol. 45, Issue 3. – P. 227–232.

42. Goroshko A. Balancing of turbomachine rotors by increasing the eccentricity identification accuracy/ A Goroshko, V. Royzman, V. Ostaševičius // Mechanika. – 2016. – Volume 22(3) – pp. 206–211.

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

43. Royzman V. Mechanical strength and hermiticity of moisture protection units of thinfilm and electrolytic capacitors / V. Royzman, A. Goroshko, A. Bubulis // International Conference & Exhibition for Power Electronics Intelligent Motion Power Quality, 2–4 June, 2009, Shanghai, [China]: official conference proceedings of the 8th International PCIM China Conference Stuttgart : Mesago PCIM GmbH, 2009. – P. 101–105.

44. Goroshko A. V. Identification of physical and mechanical properties of compound by solving inverse problems / A. V. Goroshko, V. P. Royzman, A. Bubulis // Vibroengineering Procedia of International Conference «Vibroengineering–2013», 17-19 September 2013, Druskininkai, Lithuania. – P. 81–86.

45. Горошко А. В. Труднощі одержання ефективних математичних моделей технічних виробів та технологічних процесів їх виготовлення / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Сб. тр. X междунар. науч.-техн. конф. (г. Эйлат, Израиль, 20–27 нояб. 2012 г.). – Хмельницкий : ХНУ, 2012. – С. 95–102.

46. Горошко А. В. Об одном параметрическом методе обработки экспериментальных данных / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Современные достижения в науке и образовании : сб. тр. VIII междунар. науч.-метод. конференции, 28 апреля - 5 мая 2013 г., г. Париж (Франция). – Хмельницкий : ХНУ. – 2013. – С. 42–45.

47. Горошко А. В. Алгоритми статистичної ідентифікації технічних об'єктів і

технологічних процесів / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Повышение качества, надежности и долговечности технических систем и технологических процессов : сб. тр. XI междунар. науч.-техн. конф. (г. Эйлат, Израиль, 12–20 ноября 2013 г.). – Хмельницкий : ХНУ, 2013. – С. 57–60.

48. Goroshko A. V. Solution of inverse problems of dynamics of an aircraft engine turbopump to reduce its vibration / A. V. Goroshko, V. P. Royzman // Aviation in the XXI-st Century Proceedings the Sixth World Congress : Safety in Aviation and Space Technologies, September 23–25, 2014. – Kyiv, 2014. – Vol. 1. – P. 1.5.31–1.5.34.

49. Горошко А. В. Параметрическая идентификация эксцентриситетов и упруго-инерционных характеристик турбонасосного агрегата / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Наука и образование : сб. тр. V междунар. науч. конф. (г. Хайдусобосло, Венгрия, 3–11 янв. 2014 г.). – Хмельницкий : ХНУ, 2013. – С. 5–10.

50. Горошко А. В. Синтез допусків як множинна обернена задача міцності дискових конденсаторів / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Современные достижения в науке и образовании : сб. тр. IX междунар. науч. конф. (г. Нетания, Израиль, 22–29 сент. 2014 г.). – Хмельницкий : ХНУ, – 2014. – С. 28–34.

51. Горошко А. В. Обеспечение заданного уровня мощности самолетного ответчика путем решения обратных задач / А. В. Горошко, А. К. Яновицкий, В. П. Ройзман // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах : матеріали XIV міжнар. наук.-техн. конф. (м. Одеса, 5–10 черв. 2015 р.). – С. 195–197.

52. Горошко А. В. Статистично-детерміноване моделювання багатовузлових технічних об'єктів / А. В. Горошко // Математичне та імітаційне моделювання систем «МОДС 2016» : зб. пр. 11-ї міжнар. наук.-практ. конф. (м. Київ, 27 червня–1 липня 2016 р.) – С. 196–200.

53. Горошко А. Обеспечение работоспособности механических систем путем решения обратных задач / А. Горошко, В. Ройзман, Я. Петрашек // Second Georgian-Polish Scientific & Technical Conference «Europe-Asia Transport Bridge» (Tbilisi, Georgia, October 11-14, 2016). – P. 71–81.

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....  | 28 |
| ВСТУП.....  | 30 |
| <b>РОЗДІЛ 1</b>   |    |
| <b>АНАЛІЗ МЕТОДІВ ЗНИЖЕННЯ ВІБРАЦІЙ І РОЗРАХУНКІВ НА</b>  |    |
| <b>МІЦНІСТЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ</b>  |    |
| <b>ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ.....</b>   |    |
|   | 40 |
| 1.1. Проблема зниження вібрацій швидкісних роторів.....   | 40 |
| 1.2. Пряма і обернена задачі динаміки.....  | 47 |
| 1.3. Проблема забезпечення міцності герметизованих конструкцій<br>електронних систем. Пряма і обернена задачі міцності..... | 49 |
| 1.4. Проблема забезпечення працездатності механічного резонатора<br>літакового відповідача.....                             | 56 |
| 1.5. Обернені задачі інтерпретації (ідентифікації) та синтезу.....  | 58 |
| 1.6. Методи синтезу допустимих значень конструкторських параметрів<br>механічних систем за критеріями міцності.....         | 62 |
| 1.6.1. Методи отримання будь-якого зі сполучень вхідних параметрів... 62  | 62 |
| 1.6.2. Вибір раціональної (оптимальної) системи допусків на вхідні<br>параметри.....  | 69 |
| 1.6.3. Методи інженерної реалізації оптимальних рішень.....   | 71 |
| 1.7. Проблеми математичного моделювання і розв’язання обернених задач<br>динаміки та міцності.....                          | 73 |
| 1.7.1. Адекватність математичних моделей і стійкість розв’язків.....  | 73 |
| 1.7.2. Статистична обробка емпіричних даних.....  | 80 |
| 1.7.3. Багатокритеріальна оптимізація.....  | 84 |
| 1.8. Постановка задач досліджень.....   | 86 |
| <b>РОЗДІЛ 2</b>   |    |
| <b>МЕТОДИ ЗНИЖЕННЯ ВІБРАЦІЙ ШВИДКІСНИХ РОТОРІВ</b>  |    |
| <b>НА ОСНОВІ РОЗВ’ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ.....</b>  |    |
|   | 88 |

|   |     |
|---|-----|
| 2.1. Методи параметричної ідентифікації гнучких роторів.....  | 88  |
| 2.1.1. Обернені задачі параметричної ідентифікації механічних систем  | 88  |
| 2.1.2. Ідентифікація пружно-інерційних характеристик гнучких роторів з використанням інтегро-диференціальних залежностей згину..... | 92  |
| 2.1.3. Ідентифікація дисбалансів за статичними коефіцієнтами впливу   | 102 |
| 2.2. Стійкість розв'язків погано обумовлених обернених задач.....   | 106 |
| 2.2.1. Зв'язок числа обумовленості лінійного оператора і похибки розв'язку дискретної лінійної оберненої задачі.....                | 106 |
| 2.2.2. Покращення обумовленості матриць масштабуванням коефіцієнтів.....  | 121 |
| 2.2.3. Статистична постановка обернених задач.....  | 124 |
| 2.2.4. Наближені оцінки точності розв'язку.....   | 130 |
| 2.2.5. Метод формування стійких розв'язків шляхом фільтрації оцінок найменших квадратів.....  | 137 |
| 2.2.6. Деякі аспекти проблеми точності розв'язків.....  | 142 |
| 2.3. Дослідження стійкості і точності методів ідентифікації ексцентриситетів за статичними і динамічними коефіцієнтами впливу.....  | 145 |
| 2.4. Висновки до розділу.....   | 158 |
| <b>РОЗДІЛ 3</b>   |     |
| <b>ШЛЯХИ ЗНИЖЕННЯ ВІБРАЦІЙ ШВИДКІСНИХ РОТОРІВ.....</b>  |     |
| 3.1. Дослідження динаміки і балансування ротора багатоступінчатого компресора газотурбінного авіаційного двигуна.....               | 160 |
| 3.1.1. Ідентифікація ексцентриситетів ротора.....   | 160 |
| 3.1.2. Аналіз амплітудно-частотної характеристики.....  | 179 |
| 3.1.3. Ідентифікація жорсткостей опор ротора компресора і пояснення причин резонансів.....  | 185 |
| 3.2. Оцінювання збалансованості ротора при низькочастотному балансуванні..  | 194 |
| 3.2.1. Призначення допустимих дисбалансів при унімодальному законі розподілу ймовірностей.....                                      | 194 |



|   |     |
|---|-----|
| 3.2.2. Полімодальність реальних емпіричних даних про параметри механічних систем.....   | 203 |
| 3.2.3. Динаміка механічних систем із декомпозицією полімодальних сумішей імовірнісних розподілів.....   | 210 |
| 3.2.4. Метод побудови гістограм при довільному розподілі ймовірностей емпіричних даних.....   | 213 |
| 3.2.5. Призначення допустимих значень параметрів з певною надійністю.....   | 218 |
| 3.2.6. Статистичні методи розв'язання обернених задач з полімодальним розподілом імовірностей вимірних даних.....   | 224 |
| 3.2.7. Призначення допустимих дисбалансів роторів з полімодальним законом розподілу дисбалансу.....   | 226 |
| 3.3. Зниження віброактивності турбонасосного агрегата.....  | 229 |
| 3.3.1. Побудова математичної моделі.....  | 229 |
| 3.3.2. Визначення податливості ротора статичними випробуваннями   | 232 |
| 3.3.3. Динамічні випробування ротора.....   | 238 |
| 3.3.4. Ідентифікація дисбалансів і пружно-інерційних характеристик ротора.....  | 241 |
| 3.3.5. Результати дослідження динаміки турбонасосного агрегату після балансування на робочих частотах.....  | 255 |
| 3.4. Висновки до розділу.....   | 259 |
| <b>РОЗДІЛ 4</b>   |     |
| <b>ОЦІНЮВАННЯ І ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МІЦНОСТІ ГЕРМЕТИЗОВАНИХ КОНСТРУКЦІЙ ЕЛЕКТРОННИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ МІЦНОСТІ.....</b>               |     |
| 4.1. Математична модель конструкції «керамічний резистор-компаунд».....   | 261 |
| 4.2. Визначення реальних фізико-механічних характеристик компаунда.....   | 267 |
| 4.3. Визначення допустимих напружень у кераміці шляхом статистичної обробки результатів експериментів з полімодальним законом розподілу ймовірностей..... | 280 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.4. Формалізація оберненої задачі параметричного синтезу.....   | 284 |
| 4.5. Етапи розв'язання обернених задач параметричного синтезу.....   | 290 |
| 4.5.1. Врахування функціональних і параметричних обмежень.....   | 290 |
| 4.5.2. Врахування техніко-економічних вимог.....   | 291 |
| 4.5.3. Оптимізація допусків. Загальна методика проектувального розрахунку на міцність на основі розв'язання обернених задач інтерпретації і синтезу..... | 292 |
| 4.5.4. Синтез оптимальних конструкторських варіантів з урахуванням їх технологічності.....   | 296 |
| 4.5.5. Структура інженерної методики оптимального забезпечення заданого рівня міцності механічних систем.....  | 297 |
| 4.6. Оптимізація допустимих значень фізико-механічних характеристик матеріалів і геометричних розмірів конструкції «керамічний резистор-компунд».....    | 300 |
| 4.7. Конструкторсько-технологічні шляхи забезпечення міцності конструкції «керамічний резистор-компунд».....   | 311 |
| 4.8. Забезпечення міцності дискових керамічних конденсаторів.....  | 313 |
| 4.9. Висновки до розділу.....  | 317 |

## РОЗДІЛ 5

|   |     |
|---|-----|
| ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ДЕЯКИХ КЛАСІВ СТАТИСТИЧНО-ДЕТЕРМІНОВАНИХ, ДЕТЕРМІНОВАНИХ ТА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ..... | 319 |
| 5.1. Статистично-детерміноване моделювання структурно-складних технічних систем.....  | 319 |
| 5.2. Постановка задачі про ідентифікацію нелінійних силових характеристик коливальної системи із одним ступенем вільності.....          | 325 |
| 5.2.1. Трансформація дискретного способу задання динамічного процесу аналітичними залежностями.....                                     | 327 |
| 5.2.2. Побудова наближеного розв'язку прямої задачі для систем рівнянь (5.8).....   | 330 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.2.3. Ідентифікація параметрів нелінійної коливальної системи.....   | 332 |
| 5.3. Метод ідентифікації нелінійних силових чинників деяких класів нелінійних систем із розподіленими параметрами.....  | 335 |
| 5.3.1. Ідентифікація силових характеристик систем із розподіленими параметрами, математичним моделями динаміки яких є крайові задачі для рівнянь другого чи четвертого порядку..... | 335 |
| 5.3.2. Принцип одночастотності коливань у розв'язуванні ОЗ для крайових задач.....  | 337 |
| 5.3.3. Обернені задачі для поздовжньо-рухомих одновимірних систем   | 339 |
| 5.4. Побудова математичної моделі складання літакового відповідача та забезпечення його працездатності.....   | 340 |
| 5.4.1. Математична постановка задачі.....   | 343 |
| 5.4.2. Виявлення, аналіз і шляхи усунення впливу основних дестабілізуючих первинних факторів.....   | 354 |
| 5.4.3. Оптимізація конструкторських параметрів моделі за критерієм забезпечення заданого рівня потужності у модифікованій конструкції.  | 358 |
| 5.5. Висновки до розділу.....   | 363 |
| ВИСНОВКИ.....   | 364 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....   | 367 |
| ДОДАТКИ.....  | 399 |
| Додаток А. Прикладні програми для розв'язання задачі зниження вібрацій швидкісних роторів.....  | 399 |
| А.1. Достатнє оцінювання похибки розв'язку дискретної лінійної оберненої задачі.....  | 399 |
| А.2. Статичні коефіцієнти впливу роторів компресорів ГТД АИ-20.....   | 400 |
| А.3. Реалізація методу усіченої оцінки найменших квадратів для одержання стійких розв'язків задачі ідентифікації ексцентриситетів ротора компресора авіадвигуна АИ-20.....          | 401 |

|  |     |
|--|-----|
| А.4. Статистична обробка випадкових величин з полімодальним розподілом імовірностей.....   | 402 |
| А.5. Оптимізація допустимих значень дисбалансів ротора ТНА-150.....  | 404 |
| А.6. Реалізація алгоритму забезпечення стійкості і заданої точності розв'язків задачі ідентифікації ексцентриситетів ротора ТНА-150..... | 405 |
| Додаток Б. Розв'язання задачі забезпечення міцності конструкції «керамічний елемент-компаунд».....                                       | 406 |
| Б.1. Реалізація методу зниження числа обумовленості СЛАР масштабуванням її коефіцієнтів .....  | 406 |
| Б.2. Статистичне моделювання області працездатності конструкції.....   | 406 |
| Б.3. Одержання вагових коефіцієнтів експертних оцінок.....   | 408 |
| Б.4. Оптимізація допустимих значень конструкторських параметрів.....   | 411 |
| Б.5. Моделювання напружень у кераміці й компаунді при оптимальних значеннях параметрів.....  | 412 |
| Б.6. Математична модель контактного тиску у кераміці і компаунді конструкції дискового конденсатора.....                                 | 413 |
| Додаток В. Дані експериментів і прикладні програми для розв'язання задачі забезпечення працездатності літакового відповідача.....        | 422 |
| В.1. Матриця стратегії проведення ПФЕ типу 2 <sup>6</sup> .....  | 422 |
| В.2. Матриця стратегії проведення ПФЕ типу 2 <sup>4</sup> .....  | 425 |
| В.3. Оптимізація допустимих значень силових і геометричних параметрів.....   | 426 |
| В.4. Моделювання потужності при оптимальних значеннях параметрів.  | 427 |
| Додаток Г. Акти впровадження.....  | 428 |

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

|          |  |
|----------|--|
| ОЗ       | обернена задача  |
| МС       | механічна система  |
| ФМХ      | фізико-механічні характеристики                                |
| СЛАР     | система лінійних алгебраїчних рівнянь                          |
| РСА      | principal component analysis (метод головних компонент)        |
| ММВ      | метод максимальної вірогідності                                |
| МНК      | метод найменших квадратів                                      |
| ОНК      | оцінка найменших квадратів                                     |
| ГТД      | газотурбінний двигун   |
| ТНА      | турбонасосний агрегат  |
| ТУ       | технічні умови   |
| АПЕ      | активний планований експеримент                                |
| ПФЕ      | повний факторний експеримент                                   |
| ЛВ       | літаковий відповідач   |
| НВЧ      | надвисокі частоти  |
| ЩР       | щільність розподілу  |
| АЧХ      | амплітудно-частотна характеристика                             |
| $\alpha$ | КЛТР (коефіцієнт лінійного температурного розширення)          |
| $\mu$    | коефіцієнт Пуассона  |
| $M=M(Z)$ | маса ротора в перерізі з координатою $Z$                       |
| $E=E(Z)$ | модуль пружності матеріалу ротора в перерізі з координатою $Z$ |
| $I=I(Z)$ | осьовий момент інерції в перерізі ротора з координатою $Z$     |
| $D=D(Z)$ | значення дисбаланса ротора в перерізі з координатою $Z$        |

|  |   |
|--|---|
| $D_x(Z), D_y(Z)$   | проекції вектора дисбаланса в перерізі з координатою $Z$ в площини $XOZ$ та $YOZ$             |
| $\mathbf{e}=\mathbf{e}(Z)$                                       | вектор ексцентриситету ротора в перерізі з координатою $Z$                                    |
| $e_x(Z), e_y(Z)$   | проекції вектора ексцентриситету ротора в перерізі з координатою $Z$ в площини $XOZ$ та $YOZ$ |
| $\omega_k$   | $k$ -та критична частота обертання гнучкого ротора  |
| $y=y(Z)$   | прогин ротора в перерізі з координатою $Z$  |
| $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_l]^T$                          | вектор вхідних параметрів моделі  |
| $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]^T$                          | вектор вихідних параметрів і характеристик моделі   |
| $\mathbf{X}_{\min} = [x_{1\min}, x_{2\min}, \dots, x_{l\min}]^T$ | вектори шуканих границь значень вхідних параметрів  |
| $\mathbf{X}_{\max} = [x_{1\max}, x_{2\max}, \dots, x_{l\max}]^T$ |   |
| $\mathbf{X}_0 = [x_{10}, x_{20}, \dots, x_{l0}]^T$               | вектор номінальних значень вхідних параметрів   |
| $t_\gamma$   | квантиль розподілу Стьюдента  |
| $t_\gamma^{(n)}$   | квантиль розподілу $\chi^2$   |
| $\mu, \sigma$  | математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини                   |
| $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$                          | вектор математичного сподівання і матриця коваріацій багатомірної випадкової величини         |
| $\sigma_{екв}$   | еквівалентне напруження в матеріалі   |
| $[\sigma]$   | допустиме напруження в матеріалі  |
| $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n]^T$               | вектор абсолютних похибок (допусків)  |

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Проблеми міцності і віброактивності завжди супроводжують створення нових механічних систем (МС): машин, механізмів, споруд тощо, тому є і будуть актуальними, а отже потребують залучення сучасних досягнень науки і техніки, на базі яких можна розробити більш точні і ефективні методи розрахунків та експериментальних досліджень. Проектувальний розрахунок на міцність МС будь-якої складності належить до класу обернених задач (ОЗ) і полягає у визначенні таких значень її геометричних, силових, демпфувальних та інерційних характеристик тощо, щоб залежні від них значення максимальних або еквівалентних напружень не перевищували допустимих. Тут відомі допустимі напруження є вихідними характеристиками (параметрами) МС, а розраховані характеристики – вхідними. Аналогічно, в ОЗ теорії коливань, зокрема задачах параметричної ідентифікації роторів, шукають такі значення пружно-інерційних, силових і демпфувальних характеристик тощо, які забезпечують наперед задані або виміряні значення вібрацій, динамічних напружень, прогинів, деформацій роторів.

Під час проектування структурно-складних технічних систем, в яких розрахункові напруження описуються складними математичними залежностями, процес розв'язання ОЗ міцності пов'язаний з певними труднощами, зокрема нестійкістю розв'язків, тобто високою чутливістю до малих змін вхідних даних, викликаною поганою обумовленістю задачі, що призводить до суттєвих похибок у результатах.

Подібні проблеми характерні і для ОЗ динаміки. Слід відмітити, що задача визначення кількісних характеристик мас, пружностей і демпфування, наприклад у багатомасовій розрахунковій моделі авіадвигуна, який не має вивчених раніше прототипів, на стадії його проектування, є надзвичайно складною задачею. Це викликає необхідність розробки методів постановки і розв'язання задач ідентифікації динамічних характеристик машини за

результатами відповідних експериментів, коли вони обчислюються з урахуванням усіх особливостей машини. Це дає змогу ідентифікувати дисбаланси, розподілені по довжині ротора, а отже підвищити ефективність його балансування.

На практиці розв'язання ОЗ міцності з заданою точністю ускладнено розкидом реальних значень фізико-механічних характеристик (ФМХ) матеріалів, що потребує їх ідентифікації на реальному об'єкті розв'язанням ОЗ класу інтерпретації даних вимірювань. Джерелами невизначеності також можуть бути похибки вимірювання та природний розкид значень параметрів. Ефективність методів суттєво знижують похибки статистичного оцінювання вимірних значень параметрів МС, особливо у разі ненормальних, зокрема полімодальних законів розподілу, а також похибки, викликані нестійкістю розв'язків некоректних ОЗ.

Недостатнє відпрацювання наведених проблем стримує більш широке застосування методів ОЗ для розрахунку динаміки і міцності складних МС. Отже, науково-прикладна проблема удосконалення методів розрахунку конструкційної міцності із одночасним зниженням вібрацій МС, що ґрунтуються на розв'язанні ОЗ динаміки і міцності, є актуальною.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана відповідно з Державною програмою, назва пріоритетного тематичного напрямку згідно з постановою КМУ від 07.09.2011 № 942: «Найважливіші проблеми фізико-математичних та технічних наук», відповідно до плану наукових досліджень кафедри інженерної механіки та комп'ютерних графіки ХНУ у рамках НДР 0113U002064 «Множинні обернені задачі механіки структурно складних технічних систем». Роль автора як відповідального виконавця полягає у проведенні досліджень і отриманні всіх основних вагомих наукових і практичних результатів. Деякі результати дисертаційної роботи були отримані в рамках НДР 0115U000225 «Розвиток наукових та інженерних основ надійності електронної техніки шляхом удосконалення технології її тестування на вібрації та удари» і НДР



0116U001547 «Розробка теорії та практики автоматичного зрівноваження обертових тіл рідинними і сипкими матеріалами без підведення енергії та керування рухом», де автор був виконавцем. Робота виконана відповідно з поточними та перспективними планами наукової роботи Хмельницького національного університету.

**Мета і задачі дослідження.** Мета дисертаційного дослідження полягає у підвищенні ефективності зрівноваження та оцінювання і забезпечення конструкційної міцності складних механічних систем шляхом ідентифікації їх параметрів методами обернених задач динаміки і міцності.

*Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:*

1. Формалізувати ОЗ параметричної ідентифікації гнучких роторів і синтезу допусків на конструкторські параметри МС та (або) технологічні процеси їх виготовлення за умови забезпечення заданих вимог на їх міцнісні і вібраційні характеристики.

2. Розробити метод параметричної ідентифікації математичних моделей динаміки і міцності МС за результатами вимірювання їх вихідних параметрів, що враховує ступінь їх ідеалізації та умови експлуатації, шляхом доозначення ОЗ, і застосувати його для ідентифікації АЧХ двигунів та визначення ФМХ матеріалів зі значним розкидом реальних значень.

3. Дослідити динамічні процеси у машинах зі швидкісними гнучкими роторами і розробити методи ідентифікації дисбалансів і пружно-інерційних характеристик роторів, що ґрунтуються на ОЗ інтерпретації даних вимірювань.

4. Розробити методи забезпечення стійкості ОЗ і підвищення точності ідентифікації дисбалансів та пружно-інерційних характеристик швидкісних гнучких роторів, а також міцнісних параметрів машин.

5. Розвинути теорію експериментального оцінювання динамічних та міцнісних параметрів МС, розробивши метод обробки статистичних даних результатів вимірювань для їх імовірнісних розподілів з полімодальним характером.

6. Ґрунтуючись на методах ОЗ інтерпретації, розробити розрахунково-експериментальний метод визначення ФМХ конструкційних матеріалів з недостатньо вивченими або невідомими властивостями в широкому діапазоні температур.

7. Розробити метод ідентифікації нелінійних силових характеристик коливальних систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами зведенням їх до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

8. Розробити принципи оперативної побудови математичних моделей складних МС, які містять незалежні підсистеми, з метою істотного зменшення кількості необхідних експериментів при використанні планування експерименту і застосування їх для скорочення тривалості моделювання.

9. Розробити метод параметричного синтезу конструкторських параметрів структурно-складних технічних систем і застосувати його для розрахунково-експериментального оцінювання міцності герметизованих конструкцій електронної техніки, а також забезпечення працездатності МС літакового відповідача.

*Об'єктом* дисертаційного дослідження є процес оцінювання і забезпечення зрівноваженості і конструкційної міцності складних механічних систем методами обернених задач.

*Предметом* дослідження є методи розв'язання обернених задач ідентифікації і синтезу динамічних та конструктивних параметрів, оптимальних для забезпечення конструкційної міцності та зниження вібрацій складних механічних систем.

*Методи дослідження.* В основу досліджень, формування наукових основ та практичних методів розв'язання ОЗ динаміки і міцності покладений єдиний концептуальний методологічний принцип, що полягає у формалізації і постановці ОЗ міцності, ідентифікації, діагностики та ін., та розробці комплексу методів їх розв'язання. Аналіз стійкості систем рівнянь ґрунтується на засадах лінійної алгебри і теорії матриць. Для теоретичних досліджень методів

ідентифікації використано теорію згину. Дослідження методу статистично-детермінованого моделювання ґрунтується на теорії планування експерименту. Розроблений метод ідентифікації нелінійних коливальних систем базується на теорії коливань МС. В дослідженнях параметричного синтезу використано методи умовної нелінійної оптимізації. Теоретичні дослідження полімодальних сумішей імовірнісних розподілів параметрів МС ґрунтуються на засадах математичної і прикладної статистики. Експериментальні дослідження віброактивності роторів здійснювались за допомогою методів електротензометрії та вібрографування з використанням тензометрів, віброметрів, осцилографів та персональних комп'ютерів. Для розрахунково-експериментального методу ідентифікації ФМХ використано теорію міцності товстостінних циліндрів Ламе-Гадоліна. Достовірність теоретичних положень роботи підтверджена результатами експериментальних досліджень і практикою промислового використання розробок.

*Фундаментальною проблемою, на вирішення якої спрямовано дисертаційне дослідження, є проблема міцності і зниження вібрацій структурно-складних технічних систем.*

**Наукова новизна одержаних результатів.** У роботі вирішено науково-прикладну проблему оцінювання зрівноваженості та міцності МС методами ОЗ, що підтверджено наступними науковими результатами.

1. *Подальшого розвитку набула* теорія захисту машин від вібрацій за рахунок підвищення точності ідентифікації дисбалансів і пружно-інерційних характеристик швидкісних роторів. Нові теоретичні результати відрізняються можливістю розрахунку при полімодальному розподілі ймовірностей значень вимірних параметрів. Зокрема:

- одержано достатню оцінку величини похибки розв'язків лінійних ОЗ і розроблено метод оптимізації коефіцієнтів матриць лінійних дискретних ОЗ за критерієм мінімуму числа обумовленості, *що дає змогу зменшити похибку ідентифікації дисбалансів і пружно-інерційних характеристик роторів при балансуванні з урахуванням їх гнучкості;*

- *вперше* для підвищення стійкості розв'язків застосовано лінійну фільтрацію оцінок найменших квадратів, в якій за рахунок використання методу головних компонент здійснюється статистична регуляризація задачі, що дає змогу з необхідною точністю визначати дисбаланси багатомасових роторів.

2. *Вперше* розроблено метод ідентифікації параметрів математичних моделей динаміки і міцності МС, що враховує ступінь їх ідеалізації і умови експлуатації, який на відміну від існуючих, полягає у залученні пробних параметрів (режимів), що дозволяє підвищити ефективність моделювання і точність розрахунків за рахунок доозначення ОЗ.

3. Досліджено динамічні процеси у швидкісних гнучких роторах з зосередженими масами і науково обґрунтовано вибір найменш і найбільш «стійких» ділянок частот обертання ротора шляхом врахування обумовленості матриці його коефіцієнтів впливу, що дозволяє мінімізувати похибку ідентифікації дисбалансів за вимірними динамічними прогинами і коефіцієнтів впливу.

4. *Розвинуто* методи експериментального дослідження міцності машин. *Сутність новизни* полягає у:

- апроксимації емпіричної полімодальної щільності розподілу ймовірностей сумішшю унімодальних законів, обґрунтованому виборі кроку побудови гістограм розподілів і методах призначення допустимих значень вимірних параметрів, що дозволяє одержувати точніші значення шуканих параметрів з гарантованою надійністю;

- розробці розрахунково-експериментального методу визначення ФМХ матеріалів, який відрізняється тим, що сполучну конструкцію з досліджуваного зразка матеріалу і зразка із пробного матеріалу нагрівають (охолоджують) з одночасною реєстрацією виниклих деформацій, що дає змогу визначати шукані характеристики при від'ємних температурах у пружно деформованому стані, максимально наближеному до експлуатаційного.

5. *Вперше* розроблено метод побудови гібридних статистично-детермінованих моделей МС з урахуванням детермінованих залежностей параметрів окремих підсистем при плануванні експерименту, що дозволяє в

$\prod_{i=1}^k 2^{l_i} / \sum_{i=1}^k 2^{l_i}$  разів зменшити обсяг необхідних експериментів, де  $l_i$  - кількість факторів впливу у  $i$ -й підсистемі МС.

6. Розроблено метод ідентифікації нелінійних силових характеристик коливальних систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами, *сутність новизни якого полягає* у представленні силових чинників, які діють на досліджувану систему, у вигляді лінійної комбінації незалежних функцій із невідомими коефіцієнтами, аналітичному розв'язанні прямої задачі нелінійних коливань та зіставленні експериментально отриманих основних характеристик динамічного процесу коливальної системи із отриманим аналітичним розв'язком математичної моделі і розв'язанні систем лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

*Достовірність і обґрунтованість* наукових результатів та висновків підтверджується коректністю використання фундаментальних положень класичної механіки деформівного твердого тіла та теорії механічних коливань, застосування методів математичного моделювання, прикладної статистики, прикладної математики, методів оптимізації; багаторазовим повторенням експериментів з подальшою статистичною обробкою результатів; високою збіжністю результатів експериментів з розрахунками; практикою експлуатації впроваджених рекомендацій; апробацією результатів роботи на наукових семінарах та міжнародних науково-технічних конференціях, а також впровадженням результатів роботи на виробничих підприємствах.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати складових комплексу виконаних теоретичних і експериментальних досліджень, спрямовані на забезпечення міцності і зниження вібрацій машин, реалізовані в запропонованих у роботі нових методах, алгоритмах і способах. Це дало змогу знизити вібрації і підвищити міцність низки МС.

Ідентифіковано дисбаланси окремих дисків ротора багатоступінчатого компресора ГТД за вимірними значеннями податливостей ротора і динамічними прогинами; ідентифіковано амплітудно-частотну характеристику

(АЧХ) ротора і обґрунтовано причини появи всіх резонансних піків; знайдені усі форми коливань для цього ротора на податливих опорах. Це дало змогу балансуванням зменшити прогини валу компресора у 2,5 рази. Статистична обробка даних вимірювань дисбалансів з полімодальним розподілом дала змогу встановлювати із заданою надійністю допустимі значення залишкових дисбалансів партії компресорів. Ідентифіковано жорсткості і маси, приведені до прийнятої динамічної моделі ТНА, що дало змогу відбалансувати гнучкий ротор на робочій частоті обертання у трьох площинах корекції, знизивши вібрації у 6 разів, амплітуди вібрацій опор – у 4 рази, статичні напруження в матеріалі валу – у 3,5 рази, а динамічні – у 3 рази. Визначено ФМХ компаунда і кераміки в напруженому стані, наближеному до експлуатаційного, при температурі від  $-60^{\circ}\text{C}$  до  $-20^{\circ}\text{C}$ . Статистична обробка значень вимірних міцнісних характеристик кераміки з полімодальним розподілом імовірностей дала змогу підвищити ефективність математичних моделей. Знайдено оптимальні значення конструктивних параметрів конструкції «керамічний елемент–компаунд», що дало змогу підвищити міцність нових виробів.

Застосування методу гібридного моделювання з наступним синтезом допусків на конструкторські параметри, дало змогу в 13 разів скоротити витрати часу на моделювання потужності літакового відповідача (ЛВ), обґрунтувати необхідність зміни конструкції його резонатора, модифікувати конструкцію і знайти оптимальні значення конструкторських параметрів МС ЛВ, чим забезпечено збільшення рівня його працездатності на 24 %.

Результати наукових досліджень у вигляді методик і рекомендацій впроваджено на ТДВ «Адвіс» та ТОВ «Нейл» (м. Хмельницький). Результати роботи у вигляді методів використовуються в навчальному процесі у Хмельницькому національному університеті.

**Особистий внесок здобувача.** Здобувачем самостійно сформульована наукова ідея роботи, запропоновані напрями її розробки та реалізації. Особисто сформульовані основні задачі досліджень та методи їх вирішення, окреслені фактори, що визначають особливості розв'язання ОЗ динаміки і міцності, розроблені

методики забезпечення міцності структурно-складних технічних систем.

Дисертація є самостійною науковою працею, в якій висвітлені власні ідеї і розробки автора, що дали змогу вирішити поставлені завдання. Робота містить теоретичні та методичні положення і висновки, сформульовані дисертантом особисто. Використані в дисертації ідеї, положення чи гіпотези інших авторів мають відповідні посилання і використані лише для підкріплення ідей здобувача. У роботах, опублікованих у співавторстві, автору належить: аналіз сучасного стану проблеми забезпечення працездатності МС, методи синтезу допусків на їх параметри [68, 79]; експериментальне визначення параметрів машин апроксимацією полімодальних імовірнісних розподілу сумішами [64, 76]; застосування методу обробки полімодальних даних для розрахунку допустимих значень дисбалансів роторів [74, 77]; підвищення точності ідентифікації параметрів машин за рахунок забезпечення стійкості розв'язків ОЗ [68, 80, 85]; декомпозиція сумішей, метод побудови гістограм імовірнісних розподілів [69, 84]; обґрунтування і формулювання задачі забезпечення працездатності МС як ОЗ синтезу допусків, оптимізація допусків [58, 70, 71]; застосування методу пробних параметрів для дослідження АЧХ і пружно-інерційних характеристик роторів ГТД [63, 209, 274]; оптимізація геометричних допусків і ФМХ за критерієм міцності [68, 78]; розвиток теорії статистичних методів регуляризації ОЗ для параметрів з полімодальним законом розподілу, застосування методу головних компонент [81, 296]; розв'язання ОЗ міцності [57]; дослідження стійкості алгоритмів ідентифікації ексцентриситетів роторів [62, 68, 73, 273]; розрахунок ФМХ матеріалів [188] і забезпечення працездатності за критерієм міцності [271]; комплекс досліджень динаміки ТНА [68, 61], зниження вібрацій [272]; метод підвищення точності розв'язків у задачах динаміки, пошук ексцентриситетів ротора компресора [270]; постановка і методи розв'язання ОЗ забезпечення міцності машин [86, 297]; метод розрахунку параметрів МС шляхом гібридного моделювання [255, 295]; побудова статистично-детермінованих моделей [267].

**Апробація результатів дослідження.** Матеріали роботи доповідалися і обговорювалися на понад 10 міжнародних науково-технічних конференціях та

конгресах, зокрема: International Conference & Exhibition for Power Electronics Intelligent Motion Power Quality (Shanghai, China, 2009); International Conference «Vibroengineering – 2013» (Druskininkai, Lithuania, 2013); XIV Міжнародній науково-технічній конференції «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах» (м. Одеса, Затока, 2015 р.); «Підвищення якості, надійності і довговічності технічних систем і технологічних процесів» (Ейлат, Ізраїль, 2012, 2013 р.); «Сучасні досягнення в науці та освіті» (м. Нетанія, Ізраїль, 2011–2014 р.) і «Наука та освіта» (м. Париж, Франція, 2013, Dubai, ОАЕ, 2015); 6 Всесвітньому конгресі «Авіація у XXI столітті» (м. Київ, 2014); XI Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем» (м. Київ, 2016); Second Georgian-Polish Scientific & Technical Conference «Europe-Asia Transport Bridge» (Tbilisi, Georgia, 2016), щорічних наукових конференціях ХНУ (2013–2016 р.). Результати дисертаційного дослідження заслухано і схвалено на наукових семінарах спеціалізованих кафедр Хмельницького національного університету, Національного університету «Львівська політехніка», Національного технічного університету «ХПІ» та в Інституті проблем машинобудування ім. А.Н. Підгірного НАН України.

**Публікації.** Основні положення дисертаційної роботи опубліковано у 53 наукових працях, серед яких 1 монографія, 22 статті у наукових фахових виданнях України, 18 у наукових періодичних виданнях інших держав (з них 10 у виданнях, що індексуються у Scopus), 11 у матеріалах і тезах доповідей міжнародних конференцій, 1 патент на винахід.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації складає 430 сторінок машинописного тексту, з них 333 сторінки основного тексту, 81 рисунок, 38 таблиць, 4 додатки на 32 сторінках, список використаних джерел із 314 найменувань на 32 сторінках.



# РОЗДІЛ 1.

## АНАЛІЗ МЕТОДІВ ЗНИЖЕННЯ ВІБРАЦІЙ І РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

### 1.1. Проблема зниження вібрацій швидкісних роторів

Різноманітні дослідження свідчать, що більше 40% аварій турбомашин викликані підвищеними вібраціями їх деталей. Найчастіше джерелом підвищених вібрацій є незрівноваженість їх роторів.

Тенденція отримання більших потужностей в менших габаритах викликає появу у різних галузях техніки машин з гнучкими роторами і гнучкими опорами. Поряд з конструкторськими методами боротьби з вібраціями ефективним методом є високоякісне балансування роторів з урахуванням їх деформацій. Практика показала, що зниження коливань роторів балансуванням з урахуванням їх деформованості, за своїми результатами є рівнозначною конструкторським заходам. Для таких МС відомі методи балансування роторів як абсолютно жорстких тіл є неефективними [150, 214], і зниження динамічних прогинів і реакцій опор має відбуватись на всіх частотах обертання ротора.

Практика балансування доводить, що більшість роторів сучасних турбомашин і потужного електрообладнання балансують з урахуванням їх гнучкості під час експлуатації, оскільки для них не є ефективними методи балансування жорстких роторів у двох крайніх площинах корекції на низькооберткових балансувальних верстатах [262, 261]. Такі ротори балансують на робочих швидкостях і не у двох, а у трьох і більше площинах корекції, прагнучи виявити, а потім компенсувати дисбаланси, які певним чином розподілені по довжині ротора. Для цього перш за все вимірюють деформації по всій довжині ротора або в деяких місцях, де можуть бути зосереджені найбільші дисбаланси [287]. Найчастіше в

цих місцях вимірюють прогини ротора, за якими розраховують ексцентриситети і відповідні їм значення дисбалансів, а потім і врівноважують вантажі.

У машин з гнучкими роторами резонансні режими і критичні швидкості часто знаходяться в межах експлуатаційних частот. При цьому динамічні характеристики, зокрема пружно-інерційні характеристики таких МС, що входять до рівняння зв'язку між частотами, формами коливань і дисбалансами, важко піддаються обрахунку. Як зазначає автор у роботі [44], розрахунок критичних частот на абсолютно жорстких роторах без врахування податливості змащувального шару може призвести до похибки визначення першої критичної частоти в межах від 14% до 21%, а другої критичної частоти – від 40% до 88%.

Сучасні CAD- і CAE-системи, такі як SolidWorks, Ansys, Nastran, Abaqus тощо добре зарекомендували себе при розв'язанні деяких задач проектування турбомашин, але в задачах балансування готових машин вони можуть виступати лише деяким інструментом у руках дослідника. Аналіз даних щодо резонансів газотурбінних двигунів (ГТД) свідчить – що незважаючи на те, що вони проектувались з умовою віддалення експлуатаційних частот від критичних не менше ніж на 30%, на практиці значна кількість резонансів лежить на ділянці експлуатаційних частот [195]. Цей факт підтверджує складність дослідження динаміки таких машин, тому його необхідно проводити з обов'язковою ідентифікацією пружно-інерційних характеристик роторних систем. Зокрема, критичні частоти обертання роторів компресорів ГТД АИ-20 знаходяться саме в зоні експлуатаційних частот [287]. Звідси очевидно, що задача аналітичного визначення форм вигину і критичних частот обертання ротора авіадвигуна, встановленого на крилі літака, надзвичайно складна і не завжди приводить до бажаних результатів. Це пояснюється необхідністю комплексного підходу до вирішення вказаної проблеми – врахування впливу на коливання ротора авіадвигуна приєднаних мас підшипників, корпусів, рами кріплення двигуна і крила через радіацію коливань різноманітних частин, що, з однієї сторони, мають амортизаційну дію, а з іншої – є збудниками коливань.

Вагомий внесок у розвиток теорії розрахунку динамічних процесів машин зроблено у працях А. П. Бессонова, Я. Г. Пановко, Дж. П. Ден-Гартога, А. Г. Костюка, В. А. Марцинковського, В. Б. Струтинського, А. П. Зіньковського, Б. І. Сокола, Г. Б. Філімоніхіна тощо. На сьогодні відома достатньо велике різноманіття методів визначення критичних частот ротора. Їх можна поділити на точні і наближені. Точні методи мають суттєвий недолік – громіздкість, а часом, і неможливість використання. Тому в багатьох задачах, особливо для валів зі змінним по довжині моментом інерції, більш зручними є наближені методи, які допускають деяке спрощення обчислень з певною похибкою. Серед найпоширеніших методів визначення критичних частот слід відмітити як загальновідомі програмні комплекси, які використовують метод кінцевих елементів, так і енергетичний метод, метод Релея, метод Б. Г. Галеркіна, метод послідовних наближень (ітерацій), метод Дункерлея, інтегральний метод, метод динамічних податливостей і метод початкових параметрів або їх сполучення [194]. Останній часто застосовується при комп'ютерних розрахунках. Однак точність цих методів залежить від точності обрахованих значень пружно-інерційних характеристик коливальної системи, які, як правило, відрізняються від «реальних». Сучасні методи обрахунку коефіцієнтів жорсткості пружних елементів опор роторів ГТД не завжди мають задовільну точність [18].

На сьогодні основними методами балансування гнучких роторів є балансування за власними формами коливань і балансування за динамічними коефіцієнтами впливу. Більшість робіт з теорії і практики зниження вібрацій, наприклад [53, 54, 140, 239] та ін., присвячено балансуванню гнучких роторів за формою згину. Це передбачає, що форми і частоти, а отже, і пружно-інерційні характеристики ротора, є заздалегідь (наперед) відомими. Теорія зрівноваження роторів за формою коливань розвинута у роботах А. А. Гусарова [97, 98] та Ф. М. Диментберга [106]. Важливу роль тут зіграє властивість ортогональності власних форм коливань, яка полягає у тому, що робота сил інерції, розподілених за  $m$ -ю формою власних коливань на переміщеннях, які відповідають  $n$ -й формі, дорівнює нулю. Це означає, що будь-яку незрівноваженість можна розкласти на складові, які відповідають формам

пружної лінії, причому кожна складова викликає коливання лише за своєю формою. Як показала практика, деформації роторів складної конструкції і на критичних частотах відбуваються у просторі, а не у одній площині, і умови ортогональності для них не виконуються. Крім того, не всі конструкції дозволяють установку пробних мас, а тому для них необхідні методи балансування без застосування пробних дисбалансів. Внаслідок труднощів одержання власних форм коливань складних машин актуальним є розробка методів балансування, які не вимагають знання цих форм.

Очевидно, що для вирішення проблеми динамічної міцності ротора необхідно починати балансування з визначення характеристик дисбалансу. Однак, величину дисбалансу можна визначити лише опосередковано за результатами вимірювань інших, пов'язаних з ним величин. Звідси випливає, що єдиним способом визначення дисбалансів гнучкого ротора є їх ідентифікація. Ідентифікаційні підходи щодо удосконалення методів балансування розвиваються в роботах [44, 45], де розроблено низку методів оцінювання параметрів розрахункових динамічних моделей роторних систем, зокрема коефіцієнтів жорсткості і опору сегментних підшипників.

Не менш важливою проблемою є ідентифікація амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) газотурбінного авіаційного двигуна. ГТД АИ-20 є відповідальними конструкціями, що застосовуються як в авіації на літаках Ан-8, Ан-10, Ан-12, Ан-26, Ан-30, Ан-32, Ил-18, Ил-38, так і в різноманітних наземних установках потужністю 2,5-3 МВт, наприклад у енергетичних пристроях і генераторах як приводи газотурбінних електростанцій. Ротор компресора ГТД АИ-20 дисково-барабанного типу містить десять окремих дисків, які несуть на своїх вінцях робочі лопатки, задній вал ротора і лабіринти ущільнення вузлів заднього і переднього підшипника (рис. 1.1). Особливістю такого ротора є достатньо велика жорсткість і велика критична частота обертання. Це відбувається через те, що окремі секції, які мають диски і барабанні ділянки, з'єднуються між собою, причому з'єднання здійснюється на такому радіусі, де окружна швидкість є невеликою і допустимою за умовою міцності барабана [173]. Парк двигунів сім'ї АИ-20 з початку експлуатації і до сьогодні нараховує більше 13000 одиниць.

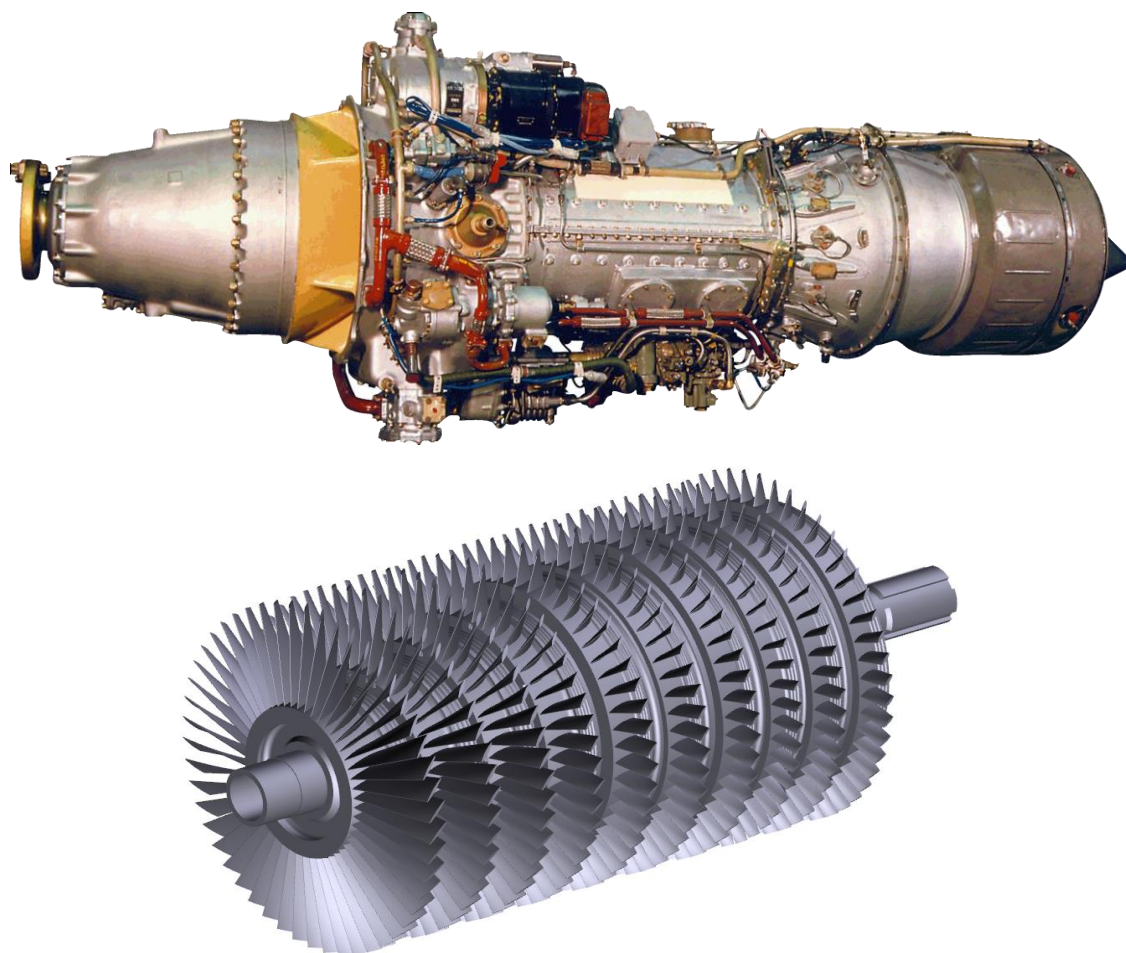


Рис. 1.1. Газотурбінний двигун АІ-20 і 3D-модель ротора його компресора

Крутний момент турбіни сприймається шліцами заднього валу і від диску до диску передається радіальним штифтам, розташованим в пазах під лопатками. Диски компресора з'єднуються один з одним напруженням по посадкових поясах із заданим натягом. Всі диски і задній вал компресора після механічної обробки піддаються статичному балансуванню в динамічному режимі, а зібраний ротор компресора – динамічному балансуванню до залишкового дисбалансу 0,5 г·мм на кожному опорі. При складанні машини передній підшипник ротора монтується у лобовому картері, а задній – у корпусі камери згоряння. Цими вузлами і визначається жорсткість опор ротора. Сам ротор працює в умовах значних перевантажень, обумовлених відцентровими силами інерції [144]. Досвід проектування, виробництва і експлуатації компресорів виявив цілу низку проблем міцності і надійності цих конструкцій, зокрема перевищення ротором допустимих за ТУ вібрацій [117].

Отже, актуальними задачами є:

- отримання математичної моделі динаміки багатоступінчастого компресора, розташованого на пружних опорах з приєднаними до них масами корпусів лобового картера і камери згоряння;
- отримання інформації про АЧХ ротора компресора та двигуна при обертанні всієї системи;
- визначення невідомих параметрів цієї системи;
- причино-наслідкові розрахунки походження всіх резонансів.

Подібні проблеми мають місце і під час експлуатації ТНА, які містять швидкісні ротори. Вони широко поширені у ракетній, авіаційній, хімічній та інших галузях техніки. Повздовжній розріз турбонасосного агрегату ТНА (без силового циліндра і клапана-перемикача) показаний на рис. 1.2. Вал ТНА, який обертається на двох радіальних кулькопідшипниках, несе на собі крильчатку двох ступенів компресора і облопачений диск осьової турбіни. Момент від вала на крильчатках і на осьове колесо передається за допомогою прямобічних шліц. Один із підшипників розташований в основному корпусі, а опорою іншого служить лопатковий апарат, що містить дифузор першого ступеня, корпусу переводного каналу і дифузора другого ступеня. Крильчатка першого ступеня і осьове колесо кріпляться за допомогою притисної гайки, розпірних кілець і стопорної шайби. Диск турбіни центрується на валу за допомогою переднього і заднього конусів.

ТНА досліджуваного типу ТНА-150, у багатьох випадках, мають підвищені вібрації, зумовлені дисбалансом ротора. Проблема полягає у визначенні причин їх виникнення, а відтак – шляхів уникнення підвищених вібрацій, отже і деформації ротора, напруження і навантаження на його підшипники до рівня 300 Н, передбаченого в ТУ експлуатації.

Спроби знизити вібрації ротора ТНА за рахунок зниження допустимих значень залишкових дисбалансів при виконанні низькочастотного балансування в двох площинах корекції з огляду на припущення, що ротор жорсткий, не давали позитивних результатів, збільшуючи при цьому складність і вартість технологічного процесу [210].

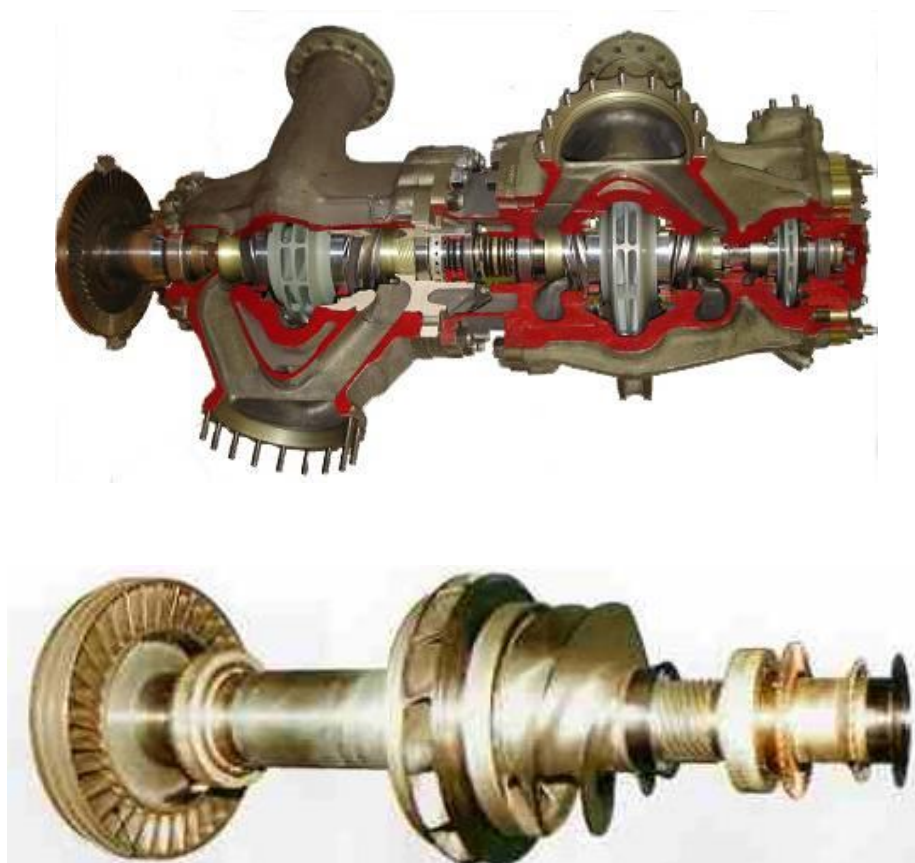


Рис. 1.2. Зовнішній вигляд ТНА і його ротора

Для вирішення цих проблем на етапах конструювання і виробництва необхідно забезпечити достатньо малі значення залишкових дисбалансів ротора. Тоді природно постає питання: як знайти їх допустимі значення ?

Очевидно, що для зменшення вібрацій ТНА необхідно застосовувати як конструкторські методи, так і методи високоякісного балансування. Для успішного балансування ротора необхідно знати його ексцентриситети (дисбаланси), а також орієнтацію їх розташування в площинах корекції. Шукані значення дисбалансів можна знайти із рівнянь, що пов'язують їх з даними експериментів, а саме із значеннями прогинів ротора, частот обертання, пружно-інерційних характеристик тощо. В роботах Ройзмана В. П. показано [123], що єдиним способом знаходження дисбалансів гнучких роторів є їх розрахунок за результатами експлуатаційних або близьких до них випробувань машин, причому одночасно з дисбалансами можуть бути знайдені пружно-інерційні та інші параметри. Такі задачі відносяться до класу ОЗ.

## 1.2. Пряма і обернена задачі динаміки

Розв'язання ОЗ нерозривно пов'язане з математичним моделюванням відповідних динамічних процесів МС та інформацією про зміни визначальних параметрів її руху. Стосовно розглядуваних у роботі проблем, математичне моделювання і постановка розглянутих задач динаміки має свої особливості. Тому нижче коротко зупинимось на основних із них.

Під математичною моделлю МС або технологічних процесів їх виготовлення і складання будемо розуміти такий наочний формалізований опис об'єкта у вигляді системи функціональних залежностей, який з достатньою для конкретних виробничих умов точністю відбиває закономірності формування його вихідних характеристик. З погляду співвідношення «причина-наслідок» усі задачі математичного моделювання можна розділити на два великих класи: прямі задачі і обернені задачі (ОЗ). Для сучасного дослідника необхідне чітке розуміння відмінностей як в постановці, так і в методах розв'язання прямих і обернених задач.

Для більшої ясності розглянемо дві задачі динаміки. «Пряма» (друга) задача динаміки полягає у розрахунку закону руху досліджуваного об'єкту за заданими силами, що діють на нього, розподілом маси та заданими початковим параметрами руху. В «оберненій» (першій) задачі динаміки необхідно за інформацією про рух досліджуваного об'єкту, розподілом маси знайти силові чинники, які спричиняють вказаний рух. Вказані задачі є взаємно оберненими, і в прямій задачі динаміки за деякими причинами і умовами досліджується певний наслідок (закон руху), а в ОЗ за наслідком досліджуються причини.

У наведеному прикладі ОЗ, який стосуються динаміки ТНА та ГТД, явно прослідковується порушення причинно-наслідкових зв'язків і, на відміну від прямих задач, неможливість їх фізичної реалізації. Дійсно, видається неможливим реалізація експерименту з утворення сили, що діє на об'єкт, або



його маси за заданим законом руху [235], точніше кажучи за законом зміни певних параметрів, які його описують.

В загальному випадку для будь-яких прямих задач відомі відповідні причини. Отже, необхідно знайти їх наслідки. Причинами можуть слугувати наступні фактори:

- початкові умови для моделі;
- коефіцієнти диференціальних операторів, що описують модель (зовнішні та внутрішні чинники);
- граничні умови;
- область, зайнята об'єктом вивчення (геометрія області).

Наслідками в механіці і фізиці, зазвичай, є компоненти фізичних полів (переміщення, напруження, деформації, температура, електричний потенціал).

Для ОЗ ситуація інша: відомі наслідки, необхідно визначити причини і фактори 1-4 (або один із них) за деякою додатковою інформацією про об'єкт досліджень і, по суті, здійснити обернення причинно-наслідкових зв'язків.

За поширеною класифікацією ОЗ, їх можна поділити на такі класи [183]:

- ретроспективні – задачі визначення початкового стану об'єкта досліджень;
- коефіцієнтні – задачі визначення коефіцієнтів диференціальних операторів;
- граничні ОЗ;
- геометричні (задачі визначення області, визначеної об'єктом досліджень);
- ОЗ змішаних типів.

Отже, забезпечення обумовленого в ТУ допустимого рівня вібрацій ротора, реакцій в опорах, мінімальних залишкових напружень від сумісної дії дисбаланса і зрівноважувальних вантажів балансуванням з ідентифікацією його дисбалансів зводиться до розв'язання ОЗ динаміки. В цілому задачу ідентифікації динамічних характеристик, зокрема пружно-інерційних характеристик і дисбалансів гнучких роторів можна розглядати як ОЗ теорії коливань, коли за заданим законом руху необхідно ідентифікувати зовнішні дії і параметри системи.

### 1.3. Проблема забезпечення міцності герметизованих конструкцій електронних систем. Пряма і обернена задачі міцності

В багатьох роботах, наприклад у [46, 47, 107, 135, 146, 164, 176], наведені дані про відмови виробів електроніки через механічні пошкодження. Аналіз конструктивних особливостей сучасних електронних систем свідчить, що вирішення проблем забезпечення вологозахисту і стійкості при змінах температури та тиску навколишнього середовища привело до використання в їх конструкціях нових матеріалів з недостатньо вивченими властивостями і з'єднанню в них різнорідних матеріалів. Механічні взаємодії, що виникають у таких конструкціях, можуть суттєво впливати як на перебіг основних електричних процесів, так і на працездатність виробу в цілому. Однак роботи з проектування електронної техніки часто ведуться лише в чисто схемному напрямі, без необхідних розрахунків на міцність, без вимірювання напружень і оцінювання напруженого стану конструкцій в цілому та їх окремих елементів.

Герметизація елементів електронної апаратури широко використовується для підвищення надійності їх експлуатації в умовах змін температури, тиску, впливу вологи тощо. [46, 47, 176]. Зокрема, в авіаційній і ракетній галузі в апаратурі керування на сьогодні широко використовуються електронні вузли у вигляді мікромодулів (ММ) (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Ракета класу «повітря-повітря» з системою керування, що містить мікромодулі з конструкцією «керамічний елемент-компаунд»

В склад ММ входять металокерамічні резистори (рис. 1.4), які разом з іншими електрорадіоелементами (ЕРЕ) припаюються до друкованої плати. Герметизація виробу досягається поміщенням плати у металевий корпус і заповненням вільного простору у ньому компаундом, що адгезується із ЕРЕ, корпусом і выводами (рис. 1.5).

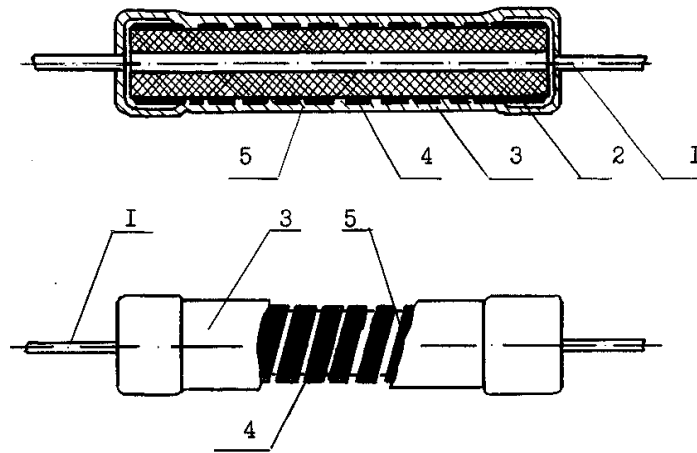


Рис. 1.4. Конструкція резистора типу ОМЛТ (закордонний аналог MF):

- 1 – вивід; 2 – ковпачок; 3 – захисна емаль;
- 4 – резистивна плівка; 5 – керамічна основа

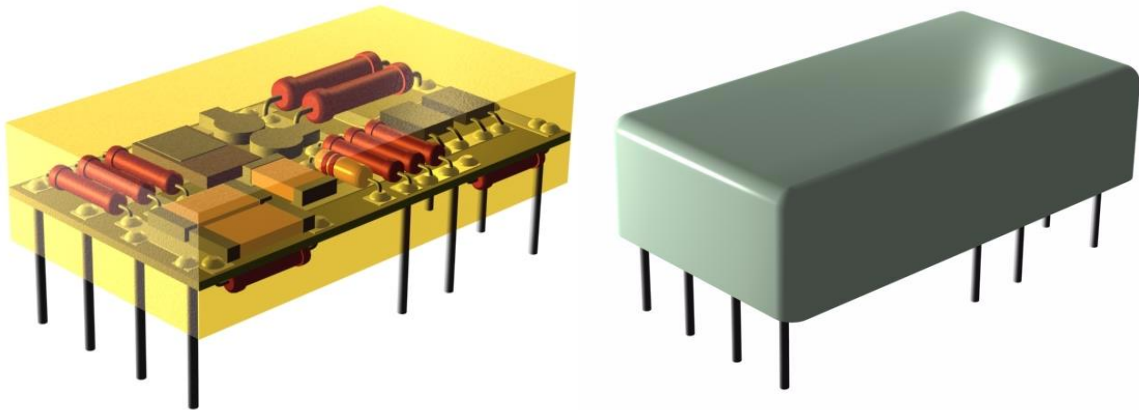


Рис. 1.5. Резистори, конденсатори та інші ЕРЕ у мікромодулі до і після герметизації

У практиці випробувань і експлуатації ММ мали місце випадки руйнування кераміки резисторів. Такі дефекти викликали або обрив кола відразу, або так званий «миготливий» дефект, коли краї тріщини розходяться

під дією тих чи інших впливів, а за їх відсутності дотикаються, відновлюючи цілісність кола, і тим самим маскують поломку. Проблема наслідків дефектів у тому, що неможливо замінити елемент, що вийшов з ладу, і, відповідно, гине весь вузол або прилад, а часто, і сам об'єкт, на якому цей прилад розташований. У зв'язку з вказаним, необхідно виявити можливі причини виникнення таких дефектів та розробити заходи і рекомендації з їх усунення.

Дефектація зруйнованих резисторів і аналіз умов випробувань і експлуатації ММ, при яких відбуваються поломки, дали змогу зробити припущення, що причини дефектів є або наслідком чинної технології складання ММ, або вони закладені в самій конструкції, тобто визначаються невдалим сполученням міцнісних властивостей з'єднувальних елементів, яке проявляється у певних умовах.

В зв'язку з цим в першу чергу було досліджено вплив низки технологічних операцій, таких як формовка, обрізка, лудіння, припаювання виводів, на зміну міцності елементів [41].

Проведенні експериментальні дослідження і статистична обробка їх результатів дали змогу зробити висновок про те, що хоча деякі з операцій і знижують міцність елементів, це зниження, по-перше, з імовірністю 0,99 можна вважати несуттєвим, а по-друге, воно несуттєве у порівнянні з існуючим розкидом міцнісних характеристик резисторів, що постачаються.

Друге припущення полягало в тому, що поломки резисторів виникають від навантажень зі сторони компаунда. У процесі герметизації і випробувань під час коливань температури, зміни тиску, зумовленого експлуатацією на різних висотах, відбувається природній стиск або розтяг матеріалів резистора і компаунда. Внаслідок існування сил адгезії на поверхні контакту і різниці у ФМХ з'єднувальних матеріалів на границі їх розділу виникає контактний тиск, що викликає появу додаткових напружень. Їх перевищення допустимих значень для заданих матеріалів може спричинити механічні пошкодження елементів конструкції. У роботі при більш повному аналізі розглянутої задачі буде показано, що вказане припущення є правомірним.

З метою усунення таких дефектів необхідно забезпечити в конструкції «керамічний резистор-компаунд» виконання умов міцності в матеріалах резистора і герметика. Отже, потрібно визначити такі визначальні фактори, які впливають на величини напружень в матеріалах резистора і герметика, і знайти множину їх значень, що забезпечують виконання умов міцності.

Для деяких матеріалів, таких як компаунд, характерним є значний розкид у реальних значеннях їх ФМХ, пов'язаний з об'єктивними причинами, наприклад технологією виробництва або якістю сировини. Для частини матеріалів ці значення взагалі невідомі при температурах нижче  $0^{\circ}\text{C}$ , (відсутня інформація у довідниках), а відомі експериментальні методи їх розрахунку не дають можливості провести експерименти при від'ємних температурах. Нарешті, деякі матеріали, наприклад композитні, існують лише у певних конструкціях, і їх реальні ФМХ невідомі. З цих причин математичні моделі МС або технологічних процесів їх виготовлення, що містять ці характеристики матеріалів у вигляді коефіцієнтів, не можуть адекватно описувати реальний об'єкт. Знайдені з використанням таких моделей в результаті розв'язання ОЗ оптимальні значення конструкторських і технологічних параметрів машин будуть хибними. Отже, проблема забезпечення працездатності МС шляхом вибору оптимальних значень їх параметрів потребує ідентифікації математичних моделей, зокрема пошуку і уточнення реальних значень ФМХ матеріалів.

Знайти «точні» значення ФМХ для конкретної партії матеріалу можна лише розрахунковим шляхом за результатами експерименту. Така розрахункова задача зводиться до розв'язання дискретної ОЗ, у якій за інформацію про відомі (виміряні) значення геометричних параметрів конструкції і деформації (напруження) можна знайти відповідні ФМХ матеріалу

Аналіз показав, що руйнування конструкції може відбуватись внаслідок перевищення напруженнями на контакті «кераміка-компаунд» допустимих напружень для цих матеріалів. Сучасні підходи для розв'язання цієї проблеми

полягають у зменшенні допустимих відхилень на ФМХ і геометричні розміри конструкції. В той же час бажано дати відповідь на питання: а якими мають бути ці допуски для забезпечення працездатності вузла? Ця задача є оптимізаційною ОЗ синтезу допусків, в якій за допустимими значеннями вихідних характеристик у механічній конструкції необхідно знайти допустимі значення її вхідних первинних параметрів  $x$ .

Подібні задачі (проблеми) мають місце із дисковими конденсаторами. Останні являють собою керамічні диски з металізованими торцями, до яких припаяні виводи (рис. 1.6). При герметизації цих конденсаторів епоксидними компаундами і наступному процесі термоциклювання часто відбувалось руйнування кераміки конденсаторів (рис. 1.7).

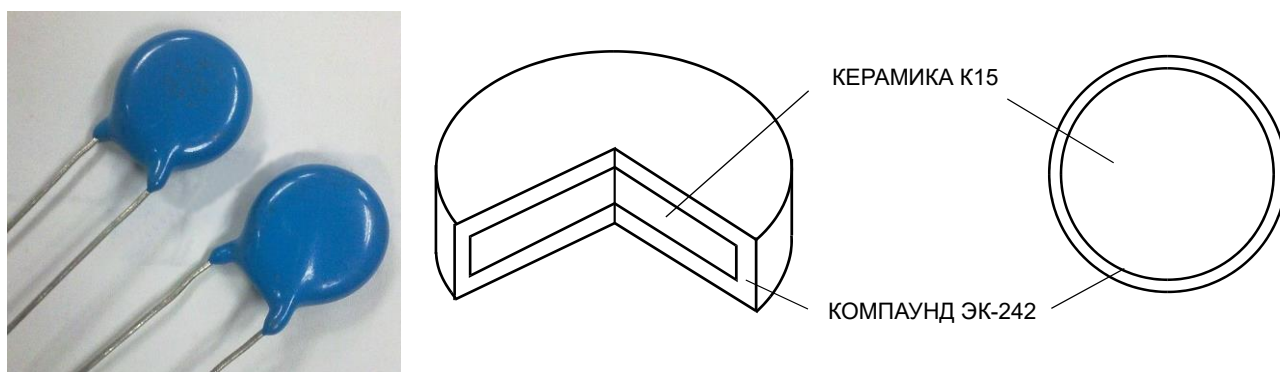


Рис. 1.6. Конденсатор типу К15-5 (закордонний аналог СТ81)



Рис. 1.7. Поверхня руйнування кераміки конденсатора

Причинами цього дефекту, як і у випадку конструкції «керамічний резистор-компаунд», можуть бути невдалі сполучення властивостей

з'єднувальних матеріалів. Процеси герметизації і термоциклювання супроводжуються появою напружень у матеріалах, що контактують. У випадку, коли величини цих напружень в кераміці перевищують допустиме для даного матеріалу значення, може відбуватись руйнування конденсаторів.

З метою пошуку причин появи дефектів і розробки заходів щодо їх усунення були поставлені дві ОЗ:

- задача визначення тих первинних факторів, від яких залежить величина напружень в конструкції «керамічний конденсатор-компаунд»;

- задача пошуку такої множини їх значень, які забезпечували б виконання умов міцності для керамічних конденсаторів.

Стосовно математичних моделей, які описують міцність МС, то, як правило, розрахунки для таких моделей ґрунтуються або на основних співвідношеннях опору матеріалів, або на обчислювальних технологіях, наприклад на базі методів скінченних або граничних елементів.

Разом з тим слід відзначити, що на сьогодні в практику впроваджується величезна кількість нових конструкційних матеріалів: композитів різноманітної структури з різноманітними складовими, кераміки, полімерів, п'єзоматеріалів, матеріалів з пам'яттю форми тощо, з мало вивченими ФМХ, що ускладнює ідентифікацію моделей.

Часто у довідковій літературі значення модулів пружності, коефіцієнтів Пуассона, коефіцієнт лінійного температурного розширення (КЛТР) таких матеріалів або взагалі не регламентовані, або суттєво відрізняються за різними джерелами (нормами, ДСТУ). Крім цього, відсутні дані про допустимі або фактичний розкид цих значень. Між тим, як показали контрольні перевірки на різних партіях одного і того ж компаунду, цей розкид досягає 100...300% від номінальних значень, викликаючи такий же чи ще більший розкид розрахункових і експериментальних значень напружень.

Нерідко ФМХ, які наводяться у роботах одного автора, мають істотну відмінність. Так, у роботі [129] вказані значення КЛТР низки компаундів, що у три рази відрізняються від значень компаундів, вказаних у роботі [130]. У цих

роботах наводяться результати досліджень експериментальних залежностей ФМХ від температури, але, на жаль, дані з розкиду їх значень є відсутніми. Зважаючи на композитну природу компаундів, на їх характеристик впливають як власна неоднорідність, так і включення інших тіл, з якими вони взаємодіють. Наприклад, у електронній промисловості широко використовується кераміка, що відноситься до полімерів і має композитну будову. Її ФМХ мають значний розкид у значеннях, наприклад для оксидної кераміки  $\text{TiO}_2$  границя міцності на розтяг  $\sigma_{\text{в}}=28\dots70$  МПа, границя міцності на стиск  $\sigma_{\text{вс}}=281\dots843$  МПа, границя міцності при згині  $\sigma_{\text{з}}=281\dots843$  МПа, модуль Юнга  $E=70\dots105$  ГПа. З цієї причини виникає необхідність уточнення значень вказаних характеристик. В іншому разі, після підстановки навіть у найточнішу модель, отримані результати будуть далекі від істини. Відповідна задача ідентифікації значень ФМХ матеріалів є ОЗ інтерпретації.

Що стосується сучасних досліджень з розв'язання задач міцності з використанням апарату ОЗ, то в першу чергу треба відзначити роботи [35, 36, 55, 132, 183, 242, 284]. Так у:

[52] – представлені метод і нові класи аналітичних розв'язків ОЗ раціонального проектування композитних пластин і оболонок;

[203] – розроблені розрахунково-експериментальні методи дослідження параметрів навантаженості елементів конструкцій на основі методології ОЗ експериментальної механіки;

[96] – пропонується визначати невідомі характеристики матеріалу із розв'язку оберненої коефіцієнтної задачі теорії оболонок в умовах динамічного пружно-пластичного деформування.

Ґрунтовні дослідження з ідентифікації моделей міцності виконали автори роботи [143], в якій поставили і розв'язали ОЗ ідентифікації жорсткостей повздовжніх ребер нерегулярної тонкостінної конструкції, ОЗ синтезу для виявлення зовнішніх факторів, що діють на конструкцію при випробуваннях, близьких до умов її експлуатації. Одержані результати мають значну теоретичну



і практичну цінність при розв'язанні задач міцності розглянутих у роботі конструкцій, але застосування їх для інших технічних систем є дискусійним.

У монографії [15], присвяченій теорії ідентифікації крайових умов спектральних задач, розроблені методи ідентифікації закріплень МС за власними частотами їх коливань, а також способи синтезу кріплень, що забезпечують потрібний безпечний діапазон частот коливань МС.

#### 1.4. Проблема забезпечення працездатності механічного резонатора літакового відповідача

Прилад, що розглядається, є передавачем літакового відповідача (ЛВ) СО-69. Цей ЛВ призначений для роботи з радіолокаційними системами, які входять до системи керування повітряним рухом. ЛВ забезпечує автоматичну видачу цим радіолокаційним системам інформації про координати літака (рис. 1.8), бортовий номер, барометричну висоту польоту, а також сигнали індивідуального розпізнавання та аварії. ЛВ призначений для роботи з системами керування повітряним рухом і встановлюються на цивільних і військових літаках, таких як МиГ-23, МиГ-25, МиГ-27, МиГ-29, МиГ-31, Ту-142, Ту-95, Як-40, Л-410, АН-26, вертоліт МІ-26. Зовнішній вигляд прийомопередавача основного блоку СО-69 представлений на рис. 1.9.

В практиці виробництва, випробувань і експлуатації часто відбувались випадки, коли ЛВ приймалися на вихідних випробуваннях, під час яких встановлювалась відповідність всіх вихідних характеристик вимогам ТУ, а далі в експлуатації по завершенню деякого часу відбувались відмови цих виробів. Аналіз таких відмов показав, що найбільший відсоток невиконання (23,7%) відповідачем свого функціонального призначення відбувався з причини недопустимого за ТУ зниження потужності вихідного ВЧ сигналу.

Попередні експерименти, проведені заводом-виробником, довели, що подальша обробка електричних параметрів відповідача не може привести до

стабілізації величини потужності його вихідного ВЧ сигналу, оскільки ці параметри на основі наявної елементної бази доведені до деяких оптимальних значень. Однак вказана потужність формується також під дією деяких первинних факторів механічної природи. Сучасні методи розв'язання проблеми працездатності ЛВ зводились до звуження допустимих відхилень силових і геометричних параметрів і характеристик деталей конструкції резонатора, в якому відбувається формування сигналу з необхідною потужністю. Але звуження цих допусків навіть до мінімально можливих на підприємстві було неефективним.



Рис. 1.8. Літак АН-26 зі встановленим літаковим відповідачем

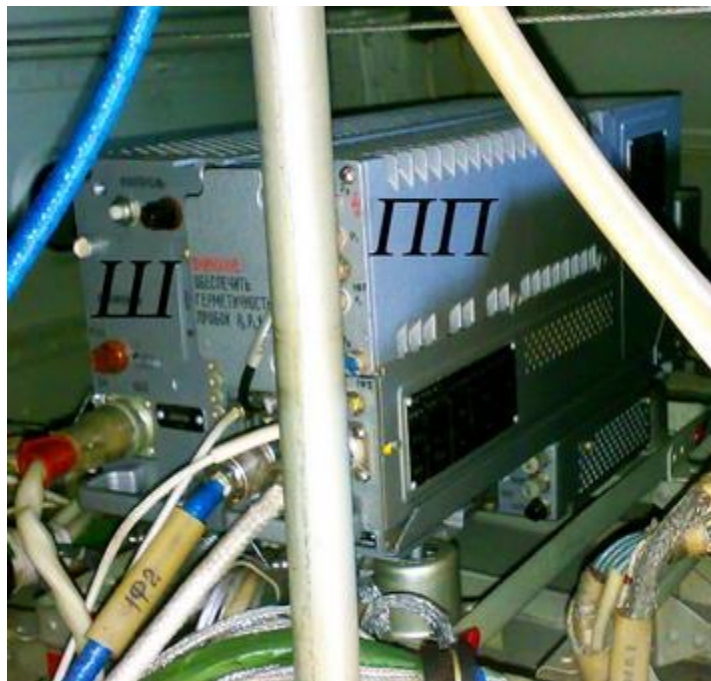


Рис. 1.9. Прийомопередавач основного блоку літакового відповідача СО-69

Через це була поставлена задача з'ясування первинних факторів механічної природи, які впливають на величину потужності вихідного ВЧ сигналу ЛВ і пошуку множини значень цих факторів, що забезпечують виконання умов ТУ на цю вихідну характеристику протягом всього терміну експлуатації. Ця задача також є ОЗ, де за вимірними значеннями параметрів моделі і за значеннями допустимої вихідної характеристики необхідно знайти допустимі значення первинних факторів, які формують цю характеристику.

Підводячи підсумок, відзначимо, що всі вищезазначені науково-технічні задачі є ОЗ, що формалізуються функціональною залежністю

$$f(x) = y, \quad (1.1)$$

де  $x \in X$ ,  $X$  – множина шуканих значень параметрів МС;

$y \in Y$ ,  $Y$  – множина даних спостережень, а саме вимірні значення прогинів ротора, частоти обертання, деформації, температури тощо;

$f$  – деякий оператор, що описує явні співвідношення між вимірними параметрами і шуканими значеннями.

Внаслідок лінійності оператора  $f$  сформульовані вище задачі ідентифікації є лінійними дискретними ОЗ.

### 1.5. Обернені задачі інтерпретації (ідентифікації) та синтезу

Загалом кажучи, будь-яка побудова моделі досліджуваного об'єкту на основі аналізу його вхідних і вихідних даних є ідентифікацією [103]. Як правило, розглядають структурну і параметричну ідентифікацію, але оскільки вхідні параметри майже завжди випадковими, то в реальних задачах параметрична ідентифікація фактично перетворюється на статистичну, отже реальні ОЗ слід ставити з урахуванням цієї обставини.

Згідно з сучасними науковими поглядами, ОЗ – тип задач, в яких параметри моделі знаходять за даними спостережень. Розглянуті в п. 1.1 ОЗ

динаміки належать до задач класу інтерпретації даних спостережень. Їх називають також задачами розпізнавання або діагностики в залежності від специфіки області застосувань. Надалі в роботі будемо дотримуватися такої класифікації ОЗ.

Наприклад, діагностування АЧХ швидкісного ротора – типова ОЗ інтерпретації (ідентифікації), в якій за вимірними на різних частотах обертання значеннями параметрів вібрацій визначають причини резонансів.

Розглянута в п. 1.1 задача ідентифікації дисбалансів та невідомих пружно-інерційних характеристик також є ОЗ інтерпретації даних вимірювань. Тут за наслідком (вимірними прогинами) необхідно знайти причину (ексцентриситети). Внаслідок лінійності оператора  $f$  задача, як буде показано у розділі 2, зводиться до розв'язання дискретної лінійної ОЗ типу

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad (1.2)$$

де  $\mathbf{X}$  – вектор невідомих, що містить інформацію про жорсткісні та інерційні характеристики, а також ексцентриситети ротора;

$\mathbf{A}$  – лінійний оператор у вигляді матриці коефіцієнтів, що містять інформацію про прогини і кривизну ротора;

$\mathbf{Y}$  – вектор вимірних прогинів.

Ідентифікаційні підходи до розрахункових моделей динаміки і міцності розроблені у роботах вчених В. П. Ройзмана, В. І. Симоновського, В. А. Костіна, О. О. Полушкина, В. В. Туктарової, Jin Y. Song, Н. І. Ободан та ін. Необхідно відмітити праці Божко А. Є. та його учнів [25, 202], у яких розвинуто методи параметричної ідентифікації коливальних систем методом динамічних випробувань, зокрема із застосуванням методів пробних величин: пробних мас, пробних коефіцієнтів жорсткості, пробних амплітуд і пробних фаз, але зазначені методи не володіють універсальністю щодо визначення динамічних параметрів багатомасових систем.

Сучасні методи розрахунку на міцність розроблені у роботах багатьох вчених, серед яких слід особливо відмітити М. І. Бобиря, О. Ф. Дащенко, А. П. Зіньковського, О. О. Ватульяна, Sh. Kubo, Ю. С. Воробйова, Г. І. Львова. Конструкційна міцність машин і приладів характеризується критеріями міцності, надійності та довговічності. Відомо, що з умови міцності розв'язується три типи задач: перевірка на міцність, визначення допустимого навантаження і проектувальний розрахунок. Отже, задача міцності зустрічається у вигляді «прямої» та «оберненої». В «прямій» задачі міцності відбувається перевірка вже існуючих елементів на міцність. Такий розрахунок називають перевірковим. Проектувальний розрахунок відносять до класу ОЗ. В «оберненій» задачі необхідно знайти розміри нового елемента машини, щоб він міг витримати протягом потрібного терміну задане навантаження при мінімальній вартості. Такий розрахунок називається проектувальним.

Абсолютно у всіх задачах забезпечення конструкційної міцності машин вихідні параметри і характеристики, які мають бути забезпечені, відомі, а невідомими є вхідні параметри моделі (первинні фактори) та (або) інтервали їх значень.

Слід відзначити, що до ОЗ належать також задачі синтезу або розробки (проекування) нових приладів або конструкцій з наперед заданими (в межах відомого допуску) експлуатаційними характеристиками, оскільки такі задачі розв'язуються в рамках точної математичної постановки. Ці задачі відрізняються від задач інтерпретації тим, що в них мова йде про ще неіснуючий об'єкт або явище, яке має бути реалізованим [235].

При створенні МС значення їх вихідних параметрів в тій чи іншій мірі можуть залежати від номінальних значень і допусків на них (надалі будемо їх називати вхідними параметрами або первинними факторами) багатьох підсистем, що складають конструкцію, взаємодія яких і забезпечує функціональне призначення об'єкту.

Як доводить практика, забезпечення ТУ за критеріями міцності і віброактивності в процесі проектування, виробництва і наладки є досить непростюю задачею. Але навіть при вдалому на перший погляд результаті МС внаслідок

реального розкиду значень характеристик її окремих складових не застрахована від того, що її міцнісні характеристик не вийдуть поза межі ТУ під час експлуатації, тобто конструкційна міцність забезпечена не буде. Об'єктивні причини і відомі шляхи подолання сучасних проблем забезпечення конструкційної міцності МС потребують ґрунтового аналізу, що і здійснено в цьому розділі. При цьому доцільніше розглядати заданий рівень міцності і віброактивності як критерій якості МС.

Під якістю МС розуміють відповідність їх вихідних характеристик нормативним рівням їх значень. Питання забезпечення якості МС на різних етапах проектування і виробництва розглянуті у численних вітчизняних і закордонних роботах та монографіях. Частина їх повністю присвячена вказаним проблемам, інші торкаються лише деяких їх аспектів.

Як правило, результатом розв'язання розглянутих ОЗ інтерпретації і синтезу є значення фізичних, механічних тощо характеристик машин, приладів та апаратури. Очевидно, що внаслідок природного розкиду реальних характеристик, похибок вимірювальних приладів, методичних похибок, похибок обчислень тощо для проектувальника становлять інтерес не точні значення шуканих конструкторських параметрів, а інтервали їх значень, при потраплянні в які були б забезпечені ТУ. Отже, однією з основних задач, пов'язаних із забезпеченням конструкційної міцності МС є обґрунтований вибір таких допустимих відхилень від номінальних значень (допусків) відповідних конструкторських параметрів, які для конкретних техніко-економічних і організаційних умов серійного виробництва конструктивно і технологічно гарантують отримання вихідних характеристик міцності і вібростійкості виробу у передбачених ТУ межах. В подальшому будемо називати цю задачу ОЗ синтезу допусків. Незважаючи на те, що задача синтезу допусків виникає достатньо часто, на сьогодні не вироблені ясні і чіткі підходи до її розв'язання. Дослідники використовують різні методи, що різняться за своєю ефективністю і складністю застосування. Що стосується загальної методології розв'язання

задачі синтезу допусків на конструкторські параметри при проектуванні МС або технологічних процесів їх виготовлення, то вона просто відсутня.

Проаналізуємо відомі методи розв'язання ОЗ синтезу допусків з погляду їх еволюції. Описані в літературі методи розв'язання вказаної задачі можна поділити на три основні групи, що відповідають еволюції підходів до її постановки. Розробка і розвиток методів, що належать до кожної з груп, історично були обумовлені ростом рівня складності систем, їх конструкції і, відповідно технологічних процесів їх виготовлення, ускладненням умов експлуатації і задач, що ними виконуються, а також досягнутим на відповідному етапі рівнем розвитку обчислювальної техніки, засобів виробництва і ступенем автоматизації. Характерною відмінністю методів однієї групи від іншої є конкретні цілі, що ставляться перед дослідниками і розробниками об'єктів на тому чи іншому етапі, а також засоби їх досягнення.

Охарактеризуємо методи кожної з цих груп. При цьому для отримання повного уявлення про стан проблеми технологічності виробів і ефективності технологічних процесів їх виробництва поряд з методами синтезу допусків розглянемо і методи їх аналізу, а також інші питання, пов'язані з особливостями практичної реалізації кожного типу вказаних методів.

## 1.6. Методи синтезу допустимих значень конструкторських параметрів механічних систем за критеріями міцності

1.6.1. Методи отримання будь-якого зі сполучень вхідних параметрів. До цієї групи можуть бути віднесені методи одержання будь-якого з можливих сполучень допусків на вхідні параметри моделі об'єктів, їх конструкцій і технологічних процесів їх виготовлення, що забезпечують їх працездатність (міцність, стійкість, жорсткість), точність, надійність та інші характеристики якості. У відповідності до способів одержання розв'язку методи цієї групи можуть бути поділені на розрахунково-експериментальні, розрахунково-аналітичні і статистичні (рис. 1.10).

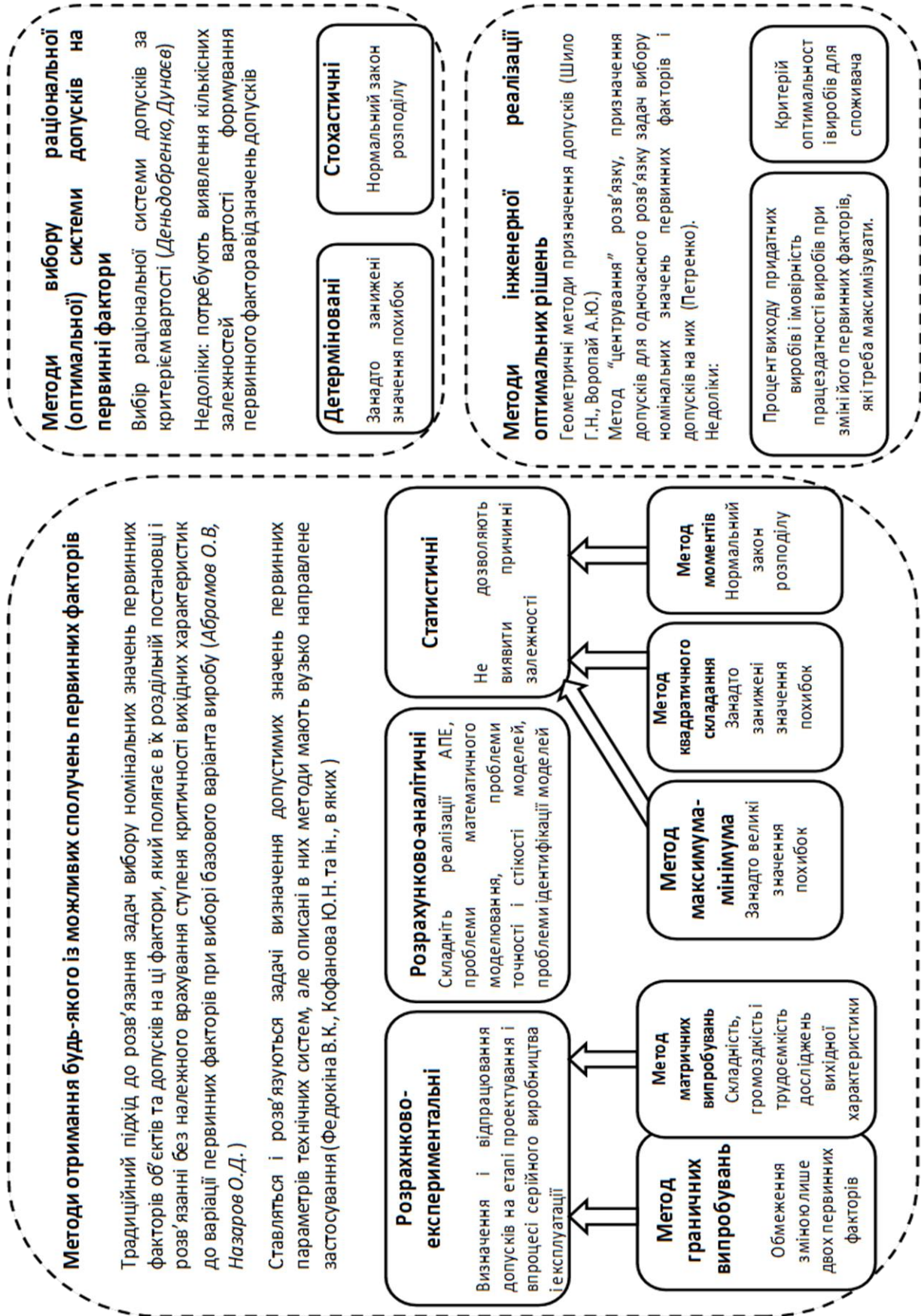


Рис. 1.10. Методи синтезу допусків на конструкторські параметри МС



До розрахунково-експериментальних належать методи граничних і матричних випробувань. Метод граничних випробувань [159, 244] дає змогу розв'язувати як задачу аналізу, так і синтезу допусків, базується на визначенні розрахунковим шляхом граничного параметра, тобто того з вхідних параметрів, який найбільше впливає на вихідну характеристику, і побудові за результатами випробувань області працездатності в просторі двох факторів (граничного параметра і будь-якого з решти факторів). Зазначений метод набув широкого застосування завдяки наочності і відносно простій реалізації. Проте він має суттєвий недолік – проведення досліджень значень вихідної характеристики при одночасній зміні лише двох вхідних параметрів.

Метод матричних випробувань позбавлений цього недоліку і є подальшим розвитком і вдосконаленням попереднього методу.

Його суть полягає в моделюванні області стійкої роботи виробу при випробуваннях при всіх значеннях вхідних параметрів. Перевагою цього методу є можливість визначення допусків на вхідні параметри з урахуванням їх взаємного впливу на вихідну характеристику. До недоліків слід віднести трудомісткість і громіздкість обчислень при дослідженні вихідних характеристик, які залежать від великої кількості первинних факторів.

Загальним недоліком розрахунково-експериментальних методів є те, що при їх використанні процес визначення і відпрацювання допусків починається на підготовчому етапі і продовжується на всіх етапах проектування, а подальше уточнення допусків проводиться в процесі серійного виробництва і експлуатації.

З розвитком складних об'єктів деякі етапи налаштування, на яких забезпечувалась відповідність вихідних характеристик заданим вимогам, стають взагалі нездійсненними. Отже, вимоги визначення допусків на етапі вибору і розрахунок конструкції виробу обумовили перехід від емпіричного способу їх встановлення до розрахункового.

Розрахунково-аналітичний метод визначення допусків обумовлює встановлення залежностей, по-перше, між вхідними і вихідними параметрами

математичних моделей машин, і, по-друге, між змінами вихідних параметрів і характеристик виробів або їх вузлів і розкидом первинних факторів.

Синтез допусків на первинні похибки і значення факторів впливу може бути здійснений за допомогою різноманітних проектних методів [111, 156, 208], з яких найбільшого поширення набули метод «однакових допусків», «відповідності коефіцієнтам впливу» і «врахування економічних факторів» [154].

Метод однакових допусків ґрунтується на тому, що сумарний допуск на точність функціонування пристроїв спочатку розподіляють між частинними похибками (впливом), причому цей розподіл здійснюють пропорційно до передавальних функцій (коефіцієнтів впливу) первинних похибок і факторів. В цьому випадку допуски на первинні похибки і фактори виявляються однаковими. Метод однакових допусків можна застосовувати лише для однорідних первинних похибок, передавальні функції яких мають однакову розмірність. Його недолік проявляється в тому, що у разі сильного впливу однієї або декількох первинних похибок пристрою розрахунковий допуск на всі похибки одержуються жорстким. Для технологічних похибок це означає, що необхідна точність пристрою (сумарний допуск) досягається за рахунок точного виготовлення всіх деталей. Економічно це, як правило, невиправдано, тим більше, що часто значення допусків виходять нездійсненними.

Метод відповідності допусків коефіцієнтам впливу ґрунтується на тому, що сумарний допуск розподіляється рівнозначно між частковими похибками (впливами). Допуски на первинні похибки (і фактори впливу) тут виходять різними, залежно від величини передавальної функції (коефіцієнта впливу) первинної похибки. Такий спосіб первісного розрахунку допусків є більш раціональним, оскільки може бути застосований для різнорідних похибок і враховує ступінь впливу кожної похибки і фактора. Недоліком цього методу, як і попереднього, є те, що розраховані допуски на технологічні первинні похибки отримані без урахування економічних факторів.

Метод урахування економічних чинників (при розрахунку допусків) базується на умові забезпечення заданого критерію міцності при мінімізації

величини витрат. Недоліком способів розрахунку, що враховують економічні фактори, є те, що вони можуть бути застосовні тільки для технологічних похибок, причому мають однакову розмірність передавальних коефіцієнтів. Слід зауважити, що формули для розрахунку допусків не враховують наявність систематичних складових випадкових похибок і відмінність законів розсіювання від нормального (тобто справедливі лише для похибок, що розподілені за законом Гауса).

Повертаючись до основних напрямів теорії точності, розглянемо принципи побудови рівнянь похибок, на яких, в свою чергу, ґрунтуються методи розрахунку допусків. Розрізняють статистичний і розрахунково-аналітичний підходи до складання рівнянь похибок [99].

Основою розрахунково-аналітичного підходу [99, 224, 233, 241] є розкладання функції залежності вихідної характеристики виробу або процесу від його первинних факторів в ряд Тейлора в околі номінальної точки з точністю до лінійних членів і подальшому переході від абсолютних похибок до відносних. Коефіцієнти розкладання є основними якісними показниками параметричної чутливості виробу до зміни його вхідних параметрів і називаються функціями чутливості (ФЧ). На сьогодні в теорії параметричної чутливості розроблені методи знаходження ФЧ як для аналітичних, так і для інших видів математичних моделей, наприклад в роботах Федюкіна В. К. [114], Кофанова Ю.Н. [145, 146,], Zhu J. [313] та ін. [257, 119].

Статистичні методи синтезу допусків ґрунтуються на методах теорії імовірностей і математичної статистики [217]. В роботі [133] використаний метод статистичних випробувань для аналізу автоматизованого виробництва процесу складання прецизійних з'єднань. Статистичний підхід дає змогу зробити певні висновки, але не дозволяє виявити причинні залежності. Крім того, він може застосовуватись у випадку нормальних законів розподілу імовірностей первинних факторів.

Проте необхідно відзначити і поширені на практиці методи статистичних випробувань математичних моделей [137, 254]. Найбільш вживаним з них є

метод статистичного аналізу – метод Монте-Карло, прийнятний для оцінки імовірності знаходження вихідних характеристик виробу в області працездатності при заданих обмеженнях на вихідні характеристики і відомій функції багатовимірної щільності імовірності розподілу вхідних параметрів виробу, який позбавлений недоліків, властивих переліченим вище методам. Наприклад, в роботі [139] розглянуто застосування методу Монте-Карло як чисельного методу розв'язання статистичних задач при забезпеченні функціональної взаємозамінності. Дослідження функціональної взаємозамінності методом Монте-Карло дає можливість встановити оптимальні співвідношення між похибками функціональних параметрів та експлуатаційними показниками, а також дати якісну і кількісну оцінку ймовірності попадання експлуатаційного показника в задане поле допуску. При цьому функціональні зв'язки можуть бути нелінійними, а розподіл функціональних параметрів може відрізнятися від нормального закону.

Однак, як і будь-який статистичний метод, він не розкриває справжньої суті і причини появи похибок та інтервалів значень шуканих параметрів. До того ж застосування цього методу ускладнено через застосування багатовимірної функції щільності імовірності сумісного розподілу вхідних параметрів, яка, як правило, невідома або важко визначається.

До статистичних методів слід віднести метод визначення граничних похибок (за максимумом-мінімумом або теоретико-імовірнісним способом), що дає можливість за умов відомої функціональної залежності знайти граничні відхилення експлуатаційного показника. Недоліком методу є те, що інтервал розсіювання експлуатаційного показника визначається лише за зміною двох функціональних параметрів, тобто не враховує одночасного впливу похибок всіх функціональних параметрів.

Відомий також метод натурних випробувань як емпіричний метод оцінки точності експлуатаційних показників. На жаль, такий метод вимагає великих затрат часу і є занадто дорогим.

Відомий метод синтезу допусків з використанням методу моментів і методу найгіршого випадку. Метод моментів вимагає обчислення функції чутливості, що пов'язано з проблемами нелінійності, тому похибка при розрахунку допусків може досягати від 30 до 40 %. Метод найгіршого випадку не вимагає обчислення функції чутливості, але значення обчислених допусків можуть бути настільки широкими, що застосування цього методу втрачає сенс [233].

Слід відзначити, що задача аналізу допусків є однозначною, задача ж синтезу допусків [258–260, 280, 309], яка є оберненою до задачі аналізу, є математично недовизначеною і некоректною, має безліч розв'язків, тобто безліч можливих сполучень допусків або параметрів законів розподілу первинних факторів, що забезпечують заданий розкид значень вихідної характеристики. Отже, розрахунок допусків на первинні фактори конструкцій або технологічних процесів їх виготовлення лише на основі методів «максимуму-мінімуму», квадратичного складання і моментів [34, 112, 161], відбувається підбором шуканих величин послідовним наближенням в наступному порядку. На основі рівнянь допусків відповідно до вказаних методів їх аналізу, досліджується ступінь впливу похибок первинних факторів на похибки вихідних характеристик і, виходячи із відомих допусків на вихідні характеристики, вибираються допуски на первинні фактори. Далі розв'язується задача аналізу допусків, і у випадку, якщо розрахункове значення поля допуску більше заданого значення, то розрахунок повторюється. Таким чином, описані методи синтезу допусків з умови точності вимагають проведення громіздких обчислень без гарантії отримання задовільного результату на кожному поточному етапі процесу послідовних наближень. Крім того, застосування цих методів може призводити до отримання недоцільних (неоптимальних) розв'язків з економічної, виробничої та інших поглядів.

Значний внесок у вирішення проблеми синтезу допусків на параметри вузлів машин внесли зарубіжні науковці Hong-Chao Zhang [280] (застосування геометричних і статистичних методів синтезу допусків в CAD), Spotts M. F. [304] (оптимальний вибір допусків за критерієм вартості), Ting K. [308]. В

роботі [260] пропонується синтез надійних конструкцій, найменш чутливих до допусків, в роботах [258, 259] пропонується метод синтезу допусків для МС, що ґрунтується на індексах надійності. António Mourão [289] розглядає задачу синтезу механічних допусків з позицій послідовного складання вузла.

Між тим, теорія точності слугувала основою, на якій розвивались методи розрахунку допусків другої групи. Методи цієї групи дали змогу перейти до більш відповідального і важливого етапу комплексного вивчення похибок з метою не тільки аналізу і викриття причин, що їх породжують, але і відшукування шляхів керування процесом і переходу до оптимального синтезу похибок в реальних умовах виробництва. Отже, метою застосування методів другої групи є вибір раціональної системи допусків на первинні фактори виробів, а також технологічних процесів їх виготовлення з умов точності на їх вихідні характеристики і оптимальності обраних техніко-економічних показників [107, 125, 145]. З цієї причини, що методи цієї групи використовують співвідношення теорії точності, для них характерні всі ті ж труднощі, пов'язані з дослідженням виробничих похибок, побудови математичних моделей і забезпечення їх стійкості, що і для методів першої групи.

1.6.2. Вибір раціональної (оптимальної) системи допусків на вхідні параметри. У контексті постановки методи оптимізації допусків відрізняються типами вибраних критеріїв оптимальності, які можна поділити на статистичні і детерміновані, видами і кількістю лімітованих факторів, а також типом використаних співвідношень теорії точності.

Дослідники використовують різні методи, що різняться своєю ефективністю і складністю застосування. Більшість робіт присвячено вибору раціональної системи допусків за критерієм вартості [51, 135, 151, 169, 182, 218, 245, 248, 309]. Так, наприклад, в [152] розглядається задача визначення такої системи допусків на первинні фактори, яка вибирається з умови забезпечення заданих допусків на вихідну характеристику і мінімізує функцію вартості. При цьому необхідним є існування достатньо гладкої функціональної залежності для вихідної характеристики об'єкту від параметрів окремих вузлів. В [51] ця ж

задача розв'язується за умови єдиного критерію оптимізації, в той час як інші характеристики процесу є обмеженнями. В роботі [163] запропонована методика автоматичного двоетапного забезпечення технологічних допусків із застосуванням методу лінійного програмування, на основі спільного використання інформаційних моделей деталі, заготовки та технологічного процесу, баз даних, алгоритмів розрахунку технологічних розмірів. Для зниження вартості обробки, пов'язаної із забезпеченням точності, необхідно максимально розширити технологічні допуски в межах обмежень, що накладаються конструкторськими допусками.

Всі перераховані підходи до розв'язання задач оптимізації допусків за критеріями вартості потребують для кожного з первинних факторів попереднього виявлення кількісної залежності вартості його формування від можливих поточних значень допусків. При всіх своїх перевагах ці методи не набули широкого практичного застосування саме через відсутність в розпорядженні конструкторів і технологів вказаних достовірних техніко-економічних залежностей.

Традиційний підхід до розв'язання задач вибору номінальних значень первинних факторів і допусків на ці фактори описаними методами полягав у їх роздільній постановці і розв'язанні на різних етапах проектування без необхідного врахування ступеня критичності вихідних характеристик до варіації первинних факторів при виборі базового варіанта виробу. Такий стан проблеми обумовив недостатнє або несвоєчасне відпрацювання основних питань точності технологічних процесів виготовлення виробів, мірою яких є допуски.

Лише останнім часом з'явилися методи, які враховують жорсткий взаємозв'язок питань забезпечення необхідної точності технологічних процесів зі специфікою конструктивних рішень, які приймаються на стадії проектування. В цих методах, які належать до третьої групи, визначення номінальних значень первинних факторів практично пов'язане з методами інженерної реалізації оптимальних рішень.

1.6.3. Методи інженерної реалізації оптимальних рішень. Аналізуючи методи цієї групи, необхідно відзначити, що в літературі визначаються два типи критеріїв оптимальності [189].

До першого з них належить відсоток виходу придатних за критерієм міцності виробів та імовірність працездатності виробів при зміні його вхідних параметрів, які необхідно максимізувати. Ці критерії характеризують оптимальність виробу для виробника.

Другий тип критеріїв характеризує оптимальність виробу для споживача. Тут важливо, щоб вихідні характеристики знаходились якомога далі від меж ділянки працездатності і якомога повільніше в часі просувались до цих меж. Оскільки для проєктованого виробу, зазвичай, невідома швидкість цього руху, то зазвичай критерій максимальної надійності (який характеризує імовірність того, що протягом певного часу характеристики міцності виробу не вийдуть за межі працездатності) замінюють критерієм максимально віддалення параметрів від меж ділянки працездатності без врахування відмінностей у швидкостях руху параметрів до цих границь. Однак ці задачі розроблені лише в постановному плані, або для їх розв'язання застосовується вдосконалений метод проб і помилок. Відомі геометричні методи призначення допусків (Шило Г. Н. [249, 250]), методи «центрування» допусків (Петренко А. І [191]). У роботах Абрамова О. В [1, 2], Назарова О. Д. [178] пропонуються різноманітні оптимальні алгоритми побудови областей працездатності.

Слід особливо відзначити роботу [191], в якій описаний метод «центрування» розв'язку і призначення допусків для одночасного розв'язання задач вибору номінальних значень первинних факторів і допусків на них. Задача вибору номінального проєкту ставиться як задача оптимізації працездатності виробу при зміні його вхідних параметрів. Оптимізація допусків за критерієм вартості ставиться у відповідність вписуванню в ділянку працездатності деякого тіла при регулюванні допусків так, щоб мінімізувати вартість. Розв'язання цієї задачі передбачає зведення її до задачі лінійного програмування за рахунок кусково-лінійної апроксимації ділянки



працездатності та функції вартості і подальший її розв'язок симплекс-методом. Позитивною відмінністю запропонованого у [191] підходу від згадуваних раніше є оптимізація допусків за критерієм вартості при заданні обмежень на самі вихідні характеристики, а не на їх допуски, оскільки перехід від рівнянь зв'язку вихідних характеристик з вхідними параметрами до рівнянь їх допусків пов'язаний з внесенням певних похибок. При всіх перевагах зазначеного методу застосування його на практиці є ускладненим, по-перше, через складність математичного апарата кусково-лінійної апроксимації ділянки працездатності і функції вартості при великій розмірності простору вхідних параметрів і, по-друге, через відсутність достовірних техніко-економічних, а також статистичних залежностей.

Заслужують на увагу геометричні методи призначення допусків, такі як наприклад метод призначення номінальних допусків при нормальному законі розподілу параметрів елементів і заданих зовнішніх впливах [250]. Ці методи ґрунтуються на інтервальній і нечітко-інтервальній математиках, головною проблемою яких є швидкий ріст ширини результуючих інтервалів з збільшенням кількості арифметичних операцій при розв'язанні задачі. Не зважаючи на те, що зростання інтервалів є незворотнім і відповідає загальнометодологічним положенням, на практиці це положення може призводити до неприйнятних результатів [104]. В роботах Воцинина А. П. [42, 43], Дивака М. П. [102], Шарія С. П. [246, 247] розв'язуються задачі в допусках з застосуванням методів інтервального обчислення, які, на жаль, не враховують нестійкість, що призводить до занадто широких інтервалів допусків. Інтервальним методам оцінювання допусків притаманні всі недоліки інтервального обчислення, а також неможливість оцінити номінальні значення шуканих параметрів.

Підсумовуючи сказане, зауважимо, що на сьогодні відсутні усталені погляди на задачу визначення значень допусків. Це вносить певний хаос і не дає можливості інженеру-досліднику чітко обрати ефективний метод розрахунку допусків. Отже, бажаною є розробка відповідної інженерної методики і рекомендацій щодо її застосування.

Слід відзначити, що абсолютно всі методи аналізу і синтезу допусків пов'язані із створенням математичних моделей. Процес математичного моделювання – не просто пошук найбільш адекватного відображення сутності процесів і явищ. Математична модель має обов'язково враховувати особливості мислення і конкретні цілі дослідника. При цьому, за способом використання експериментальних даних моделі поділяються на апіорні (розроблені теоретично) та апостеріорні (отримані в результаті обробки експериментальних даних) [228]. Загалом, проблемам моделювання присвячено досить багато робіт, тому зупинимось докладніше лише на деяких найважливіших проблемах, без вирішення яких неможливе розв'язання ОЗ інтерпретації і синтезу.

#### 1.7. Проблеми математичного моделювання і розв'язання обернених задач динаміки та міцності

1.7.1. Адекватність математичних моделей і стійкість розв'язків. Питаннями побудови математичних моделей МС і технологічних процесів їх виготовлення, що відображають залежності їх вихідних характеристик від вхідних і внутрішніх параметрів, присвячена достатньо велика кількість робіт, наприклад [14, 102, 108, 110, 120, 155, 190, 201, 283, 305]. Практично у кожній із них у тій чи іншій мірі приділяється увага проблемам проектування, міцності і динаміки машин, адже адекватність математичних моделей реальним об'єктам і процесам є однією з основних умов ефективного використання результатів розрахункових методів з метою забезпечення якості, як на етапах проектування, так і виробництва.

В роботах [110, 131, 191, 230, 251, 264, 310], у яких розглядаються загальні проблеми моделювання, наведено різноманітні варіанти класифікації математичних моделей, основні принципи їх побудови, головні властивості, вимоги до них та інші питання. Так у [131] запропоновано п'ять основних класів моделей: аналітичні, емпірико-статистичні, імітаційні, моделі евристичного програмування і такі, що самі організуються.

Поклавши в основу класифікації способи побудови математичних моделей і властивості їх внутрішньої структури, моделі можна поділити на *аналітичні (детерміновані) і статистичні*.

Аналітичні моделі, одержання яких вимагає знань особливостей внутрішніх процесів досліджуваного об'єкту або процесу, можуть бути запозичені з літератури або з числа вже розроблених схем аналогічних об'єктів [105], або ж вимагають проведення спеціальних досліджень. До детермінованих моделей можна віднести аналітичні, імітаційні та всі інші математичні моделі, що побудовані на основі редукції і синтезу теоретичних положень природознавства. Параметри цих моделей зазвичай мають ясний і кількісний фізичний зміст, а зв'язки між ними виражаються математичними співвідношеннями: алгебраїчними, диференціальними та інтегро-диференціальними рівняннями.

Слід відзначити, що не завжди вдається побудувати розрахункову модель, яка б достатньо точно описувала реальний об'єкт, суто аналітичними методами. Так, за умови значної складності об'єкта, така задача стає або дуже складною, або отримана модель є малопридатною для отримання конкретних практичних результатів. В цьому випадку при наявності дослідного зразка застосовують один із відомих *експериментально-статистичних* методів, наприклад активного планування експерименту (АПЕ), пасивного експерименту та ін. Наявні плани АПЕ дають змогу побудувати моделі у вигляді лінійних, неповних або повних квадратичних поліномів, а також поліномів третього порядку [6, 7, 135]. Порівняльна оцінка планів показує, що вони відрізняються один від одного порядком моделей, можливістю врахування ефектів взаємодії первинних векторів, обсягом експерименту і ступенем простоти його обробки, а також точністю отриманих результатів [20, 95, 101, 134, 160, 263, 285, 292, 302].

Практика планування експерименту отримала в наш час широке поширення. Однак складність технологічних процесів дає свій відбиток і на планування експерименту. Побудова порівняно простих моделей не викликає проблем, але дослідники прагнуть будувати все більш складні –

багатопараметричні, нелінійні за параметрами моделі [219, 253, 266]. Труднощі, які виникають при цьому (наприклад, через необхідність проведення занадто великої кількості експериментів для побудови математичних моделей об'єктів, що складаються зі значної кількості підсистем, вузлів та деталей) настільки серйозні, що питання можливості зниження кількості вказаних експериментів стає питанням перспективності самого методу АПЕ.

Суттєвою проблемою є визначення оптимальної складності математичної моделі. Кожен раз, коли модель виявляється занадто складною, все більшою мірою не вистачає емпіричних даних для її однозначного пояснення, тобто модель виявляється складнішою того, що несуть в собі накопичені факти, і ці факти просто не в змозі відновити таку модель. В задачах відновлення багатомірних залежностей всякі огрублення (спрощення) моделі приводять до згладжування тих чи інших особливостей. І навпаки, значне ускладнення моделі без урахування обмеженого обсягу експериментальних даних приводить до небажаної свободи поведінки апроксимуючої функції в області, не охопленій експериментом, в той час як більш прості моделі в цій області поведуться «обережно» [32].

Проблемі постановки і розв'язання ОЗ присвячені роботи А. Н. Тихонова, D. L. Phillips, A. Tarantola, М. М. Лаврентєва, В. К. Іванова, Ю. М. Мацевітого, О. М. Аліфанова, Р. С. Hansen. Слід зауважити, що в супереч поширеному твердженню, не всі ОЗ є некоректно поставленими і не всі некоректно поставлені задачі є оберненими [50]. Із трьох умов коректно поставленої задачі (існування розв'язку, єдиність розв'язку і його стійкість) в ОЗ найчастіше порушується останнє. Тому однією з визначальних вимог, які ставляться до математичних моделей динамічних систем, є стійкість отриманих з її допомогою розв'язків. Що стосується стійкості розв'язків ОЗ, то доцільно коротко зупинитись на самому понятті «стійкість», оскільки зміст, який інженер інтуїтивно в нього вкладає, часто не співпадає із математичним визначенням цього поняття [234]. Р. Белман охарактеризував «стійкість» як сильно перевантажений термін з неусталеним визначенням [22], і це зауваження можна

цілком і повністю віднести до цього поняття в розрахунках на статичну і динамічну міцність. У найширшому розумінні стійкість характеризує співвідношення між змінами збурюючих причин в деякому околі параметрів і змінами наслідків, що з них випливають. Збурений процес називають стійким, якщо, змінюючи причини в малому околі параметрів її зміни, реакцію системи на вказану зміну можна зробити меншою за довільну наперед задану величину. Строге визначення стійкості моделі за всіма або окремою групою первинних факторів наведене в [234]. Поняття стійкості тісно пов'язане з поняттям «коректності моделі». Причому дуже часто в задачах з практичним значенням, приходять до некоректних моделей [204], внаслідок їх поганої обумовленості.

Мірою обумовленості, наприклад, систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) є число обумовленості матриці системи, яке показує, у скільки разів відносна похибка величин, що визначаються, може перевищувати відносну похибку вхідних даних [22]. В [97] наводиться дещо інше трактування обумовленості матриці з імовірнісного погляду. Якщо при розгляді системи вектор правої частини заданий точно, а елементи системи є незалежними випадковими величинами з однаковими дисперсіями, то число обумовленості показує, в скільки разів відношення середньоквадратичних похибок невідомих до середньоквадратичного самих невідомих перевищує відношення середньоквадратичних похибок елементів матриці до середньоквадратичного самих елементів.

Ціла низка авторів пропонують різні характеристики обумовленості матриць [21, 203, 231]. Так, в [171] автор використовував для характеристики обумовленості одне з чисел Тюринга. В більшості робіт число обумовленості виражається через власні числа матриці системи рівнянь. У вказаних роботах приводяться приклади систем, число обумовленості яких досягає 20000. Однак при цьому зустрічаються лише деякі загальні якісні міркування фізичного характеру, які мають на меті збільшити точність розв'язку таких погано обумовлених систем. Питання стійкості тісно пов'язане з питанням вибору математичної моделі. В роботах [171, 231, 210] показано, що стійкість розв'язків різко падає з ростом порядку системи. І в цьому полягає протиріччя, суть якого

в тому, що прийнята лінійна модель тим точніше описує реальний об'єкт, чим більше різноманітних факторів, які впливають на його функціонування, вона враховує, тобто чим більше порядок системи; але в цьому випадку різко зростає похибка розв'язку. Отже, природній шлях підвищення інформативності математичних моделей їх ускладненням і деталізацією на практиці є обмеженим, оскільки для формалізованих систем, складність яких перевищує деякий пороговий рівень, детальність опису і практична цінність одержуваної інформації стають антагоністичними характеристиками. Це протиріччя, відоме як принцип несумісності [312], є наслідком недосконалості прийнятої розрахункової моделі і підкреслює необхідність пошуку оптимального розрахункового варіанта, прийняттого з погляду стійкості, який би дав задовільну точність опису об'єкта.

В роботі [19] розроблені методи, які ґрунтуються на представленні досліджуваного об'єкту у вигляді крупних підсистем, кожен з яких описується лінійною системою, дослідженні кожної підсистеми окремо і далі – їх взаємодії. Така ідея, на жаль, може бути застосована не завжди, оскільки зазвичай реальний об'єкт не вдається представити у вигляді незалежних підсистем.

Математичній проблемі розв'язання погано обумовлених СЛАР або задач, які зводяться до їх розв'язку, присвячені роботи [3, 11, 185, 192, 193, 229, 252, 265, 279, 281, 286, 294, 307].

В [294] Д. Філіпс пропонує евристичний підхід, суть якого полягає в пошуку замість точного розв'язку СЛАР, сім'ї розв'язків, які б задовольняли цю систему в межах похибки задання вихідних даних, і подальшому виборі єдиного значення на основі деякого критерію гладкості.

Загальний підхід до розв'язання СЛАР запропонований А.Н. Тихоновим (метод регуляризації). Він полягає в побудові згладжувального функціонала і знаходження розв'язку, яке доставляє йому екстремальне значення [100, 234]. Метод зводиться, фактично, до накладання обмеження на гладкість допустимого розв'язку, тобто відповідає заданню апріорної інформації про властивості розв'язку. Не менш відомі різноманітні методи розкладання

матриць з метою покращення точності розв'язків погано обумовлених систем рівнянь, наприклад [38, 247].

При розв'язанні ОЗ в багатьох галузях науки і техніки дослідники пропонують спеціальні підходи, що базуються, як правило, на регуляризації некоректних задач і приведення їх до умовно коректних різноманітними засобами [5, 31, 247].

В роботі [116] розвинутий апроксимаційний підхід до розв'язання ОЗ. Вказується, що при розв'язанні некоректних ОЗ в промислових умовах явні перспективи мають апроксимаційні методи вирішення. У математичній фізиці і класичній теорії некоректних задач до проблеми побудови аналітичних апроксимацій стали звертатися лише в останні роки. Використання апроксимаційного підходу дає передумови системного об'єднання через математичну модель апріорної інформації, що виражає фізичну сутність розв'язуваної задачі, структури та характеристик вимірювальних засобів і методів, а також процедури здійснення вимірювань та інтерпретації їх результатів. В роботі узагальнено підходи до апроксимаційних завдань ідентифікації, регуляризації, фільтрації, оцінювання, розпізнавання і дослідження методів, алгоритмів та інструментальних засобів в області інформаційно-вимірювальної, контрольної-діагностичної та випробувальної техніки. Але в інженерній практиці апроксимаційні методи не знайшли поширення.

Грунтовною роботою є [166], в якій автори провели огляд всіх описаних в літературі на сьогодні методів і засобів розв'язання ОЗ, зокрема одержання регулярних розв'язків. Охарактеризовано детерміновані методи: умовно-регулярні, регуляризація за грубленням, методи накладання на алгоритм регуляризації, регуляризація по Тихонову; автоматизовані методи підбору розв'язків; методи спектральних функцій впливу; стохастичні методи: статистична регуляризація, динамічна фільтрація (фільтр Калмана), ітераційні фільтри, адаптивний фільтр тощо.

Відомі також методи підвищення стійкості розв'язків ортогоналізацією рядків і стовпців матриці, застосування певним чином побудованих ітераційних

процесів [118], матричного розкладання тощо [8, 17, 235, 252, 279]. Однак, як і метод регуляризації, вони не дають універсального підходу до розв'язку вказаних задач, оскільки для своєї реалізації потребують врахування індивідуальних особливостей матриці системи, як то достатньо кваліфікованої математичної кваліфікації виконавця, тривалої роботи на комп'ютерах, врахування фізичної сутності системи, що не завжди може бути виконано, особливо у виробничих умовах. З цих причин виникає задача розробки вільних від вказаних недоліків методів підвищення точності ідентифікації об'єктів, що описуються погано обумовленими лінійними моделями.

Окремою проблемою математичного моделювання є врахування у них нечітких даних про значення параметрів МС представлення різноманітних невизначених характеристик в єдиній універсальній формі. Найчастіше для формального опису використовують три способи представлення: нечіткими інтервалами, чіткими інтервалами та розподілом ймовірностей [102, 104].

Обмеження інтервалу нерівностями відповідає опису параметрів МС чітким інтервалом. На жаль, чіткий інтервал має найбільшу невизначеність і, відповідно, найменший обсяг корисної інформації. Спосіб опису можна застосовувати тоді, коли достатньо точно відомі лише границі допустимих значень досліджуваного параметра, і відсутня будь-яка кількісна і якісна інформація про імовірності (можливості) реалізації його різних реалізацій всередині інтервалу. Як правило, чіткими інтервалами описуються інтервали значень параметрів, задані в ТУ.

В деяких випадках дослідник може мати певну додаткову якісну інформацію про реалізації параметра в межах інтервалу, наприклад про те, що більші його значення є більш бажаними, ніж менші. В такому разі невизначеність параметра може описуватись нечітким інтервалом.

У випадках, коли можна встановити кількісний зв'язок із можливостями реалізації різних значень параметра, невизначені інтервали значень зручно представляти у вигляді імовірнісних розподілів. Така ситуація спостерігається



при експериментальному визначенні певних параметрів МС випробуванням деякої вибірки із партії і наступній статистичній обробці результатів.

Обрати один універсальний підхід до опису невизначених значень параметрів досить складно. Наприклад, перехід від інтервального та нечітко-інтервального способів запису до ймовірнісного неможливий, оскільки для цього відсутня необхідна кількісна інформація. Крім того, операції з ймовірнісними розподілами досить обмежені, оскільки, фактично, проводяться не з самими даними, а з характеристиками їх множини, такими як математичне сподівання, дисперсія тощо. Перехід від ймовірнісного запису до нечітко-інтервального можливий, але не завжди доцільний. Враховуючи сказане, в роботі рекомендовано використовувати різні підходи до запису невизначеності значень параметрів в залежності від конкретної ситуації.

Часто дослідник може отримати найбільш точну інформацію про параметри об'єкта лише дослідним шляхом з наступною статистичною обробкою результатів дослідів. Не зважаючи на, здавалося б, достатньо розвинуту теорію і практику статистичної обробки емпіричних даних, на практиці виникає багато питань щодо її застосування. Розглянемо докладніше ці проблеми.

1.7.2. Статистична обробка емпіричних даних. Як відмічалось раніше, розрахунковий метод визначення допусків на конструкторські параметри МС передбачає встановлення, окрім розглянутих залежностей міцнісних характеристик від вхідних і внутрішніх параметрів моделі, залежностей між їх розкидом (похибками). Визначення цього типу залежностей за умови, що математичні моделі вже побудовані, базується на основних положеннях теорії точності, розробленої Н. Г. Бруєвичем і Н. А. Бородачевим [27, 29], узагальненої і розвинутої в роботах [99, 177].

Основними напрямками проблеми точності виробництва є дослідження виробничих похибок, обґрунтування розрахунку допусків, конструктивне і технологічне забезпечення розрахункової точності [99]. Вирішення цих питань потребує в першу чергу дослідження законів розподілу виробничих похибок.

Слід відмітити, що дослідження законів розподілу представляє собою самостійну проблему. Її доводиться розв'язувати при ідентифікації технологічних процесів, розробці нормативної документації, контролі якості продукції, що випускається, прогнозуванні ресурсів виробів, які експлуатуються, і у низці інших задач забезпечення якості виробів, причому значення величин, що контролюються, визначають, випробовуючи дослідні зразки з наступною обробкою експериментальних матеріалів методами математичної статистики.

Найпоширенішими задачами математичної статистики є вибір статистичної моделі розподілу досліджуваних ознак, що містить оцінку невідомих законів розподілу і їх параметрів, перевірку статистичних гіпотез тощо. Метою побудови статистичної моделі є представлення даних спостережень підбором апроксимуючого розподілу. Історично склалося так, що нормальний розподіл вважався майже всеосяжною статистичною моделлю через достатньо загальні умови його появи [197]. Тому більшість статистичних критеріїв, методів і оцінок розроблені саме для цього випадку.

Проте таке положення речей не завжди відповідає дійсності. Так, наприклад, в [184] вказується, що нормальний закон розподілу похибок насправді може бути отриманий лише при виконанні значної кількості умов: у виборці представлена одна партія виробів, немає домінуючих причин виникнення похибок, не змінюється в часі кількість випадкових факторів, які обумовлюють виникнення похибок, всі випадкові фактори є взаємозалежними тощо. Наприклад, при виробництві часто відбувається змішування партій деталей або відбір (відбракування) деталей або готових виробів із виробничих партій, що призводить до спотворення характеру розподілів [197, 236] і появу усічених і полімодальних законів розподілу.

В роботах [197, 236] представлені види таких розподілів і розв'язується задача визначення виду і параметрів результуючої кривої за заданими видами і параметрами складових законів розподілу. Однак при побудові статистичних моделей розподілу найважливішою представляється ОЗ, оскільки структура отриманих при вибіркових спостереженнях даних, як правило, невідома. Це

задача визначення кількості, частки і параметрів кожної із підвибірок (партій, що змішуються) в загальній виборці (змішаному розподілі).

У деяких літературних джерелах, де розглядається питання визначення параметрів складових розподілів у суміші [204], зустрічаються два протилежних судження. Так, якщо у [99] стверджується, що полімодальні розподіли поки що не вдавалось апроксимувати відомими законами, то у [204] вказано, що вмiлим усiченням i змiшуванням вiдомих розподiлiв можна для даної емпіричної функції розподілу добре підібрати відповідну їй аналітичну функцію, щоправда, без опису способу такого підбору.

У важливості й необхідності вміння обробляти статистичні матеріали, які задовольняють полімодальним законам розподілу, впевнені багато авторів [30, 99, 181, 184, 236], оскільки невміння працювати з такими статистичними матеріалами завдає значної шкоди виробництву через складність застосування науково обґрунтованих статистичних методів контролю і керування якістю продукції і перешкоджає впровадженню статистичних методів розрахунку виробів [242].

У роботі [33] розглядається питання заміни законів розподілу, які не задовольняють нормальному закону відносно невеликою кількістю нормальних складових для обчислення імовірності працездатності виробу. Остання виражається багатовимірним інтегралом по ділянці працездатності від спільної функції розподілу ймовірностей первинних факторів виробу. При цьому розбиття окремих законів розподілу імовірностей на складові пропонується проводити не шляхом прирівнювання моментів емпіричної і припустимої аналітичної функції розподілу імовірностей, а виходячи з умови мінімальної кількості складових, таким чином, щоб забезпечити задовільне узгодження суміші нормальних розподілів з результатами експерименту на основі критерію  $\chi^2$  або інших статистичних критеріїв.

Усі запропоновані підходи мають недоліки:

по-перше, розглядаються суміші лише тільки нормальних законів, в той час, як можна було б змішувати і будь-які інші унімодальні закони розподілу імовірностей;

по-друге, застосування ідеї важко реалізується через складність визначення оцінок моментів третього і вище порядків. Крім того, оцінки моментів третього і вище порядків дуже чутливі до крайніх елементів вибірки і піддаються суттєвим коливанням від вибірки до вибірки, тобто побудовані на їх основі статистичні моделі виявляються чутливими до індивідуальних особливостей вибірки.

Вказаних недоліків позбавлений метод, в основу якого покладене наближення емпіричної функції розподілу аналітичною функцією на основі критерію максимальної вірогідності [112].

Фундаментальні дослідження сумішей описані в роботах угорського вченого Медіші, в яких розглядається задача визначення за заданим графіком суміші двох параметричних функцій щільності імовірностей відомих аналітичних форм із ваговими коефіцієнтами і невідомої кількості компонент цієї суперпозиції, а також наближених значень параметрів і вагових коефіцієнтів або частини з них. Чисельна процедура розв'язання такої задачі визначається як розкладання суперпозиції. Основна ідея викладених сучасних методів розкладання полягає в тому, що розкладається не сама шукана, а деяка допоміжна суперпозиція того ж числа компонент, яка відрізняється від заданої тим, що відстань між модами її компонент не менше, ніж між модами вихідної суперпозиції, а графіки цих компонент в деякому сенсі вужчі заданих.

Однак, незважаючи на високу теоретичну цінність, при розв'язанні практичних задач всі описані в вище методи зазвичай незастосовувані, оскільки суперпозиції (суміші) щільності імовірностей, як правило, задаються не графіками, а деякими кінцевими вибірками реалізацій випадкової величини, що подаються у зручному для обробки вигляді, наприклад, у вигляді гістограми. Натомість, вибір статистичної моделі розподілу визначається видом гістограми, який, в свою чергу, суттєво залежить від способу її побудови, і, особливо, від вибраного кроку інтервалу значень.

Рекомендації з вибору кроку розбиття інтервалу значень досліджуваної випадкової величини, які є в літературі з теорії імовірностей і математичної

статистики, мають суто емпіричний характер. Зокрема Е. С. Вентцель у [37] наголошує, що кількість кроків не має бути занадто великою (тоді ряд розподілу стає невиразним, і частоти виявляють у ньому нерівномірні коливання); з іншої сторони вона не має бути занадто малою (при малій кількості кроків властивості розподілу описуються статистичним рядом занадто грубо). Практика показує, що в більшості випадків раціонально вибирати кількість кроків порядку 10...20. Чим багатше і однорідніше статистичний матеріал, тим більшу кількість кроків можна вибирати при складанні статистичного ряду. У роботах [49, 184] наведено рекомендації щодо вибору кількості інтервалів, але незважаючи на широке практичне використання вказаних рекомендацій, лишається відкритим питання обґрунтування вибору кроку розбиття інтервалу значень досліджуваної випадкової величини таким чином, щоб побудований статистичний ряд і гістограма відповідали дійсній структурі даних і забезпечували розкриття цієї структури, зокрема, наявності суміші розподілів.

Підсумовуючи аналіз сучасних методів синтезу допустимих значень параметрів МС, проблем математичного моделювання та супутніх проблем, таких як статистична обробка даних вимірювань, відмітимо, що кінцевим етапом розв'язання ОЗ синтезу допусків на вхідні і внутрішні параметри МС є задача оптимізації критеріїв міцності математичної моделі МС. Така задача є, як правило, багатокритеріальною, і, загалом, достатньо складною для реалізації оптимізаційною задачею з обмеженнями. Проаналізуємо сучасні досягнення вчених в методах багатокритеріальної оптимізації.

1.7.3. Багатокритеріальна оптимізація. Відомо [23, 104, 136], що задача багатокритеріальної (векторної) оптимізації полягає у пошуку вектора цільових змінних, які оптимізують векторну функцію. В багатьох випадках ОЗ синтезу можна звести до оптимізаційних задач багатокритеріальної оптимізації. При цьому найбільш актуальною залишається проблема невизначеності в постановці вихідної задачі. З цим безпосередньо

пов'язана проблема нормалізації, тобто приведення до єдиного мірила вимірювань, і ранжування (задання пріоритетів), тобто врахування пріоритету часткових локальних критеріїв. Для цього у роботі [26] застосовується об'єднаний узагальнений критерій оптимальності і концепція повнонапруженості. Як метод оптимізації використаний алгоритм послідовної лінеаризації в методі критеріїв оптимальності, коли рух в просторі проектування до точки, що задовольняє критерій оптимальності, здійснюється на основі послідовного чергування «пробних» і «робочих» кроків. Автори роботи [157] оптимізують конструкцію за критерієм мінімуму маси її матеріалу з обмеженнями за напруженнями. В роботі [12] розроблений метод робастної оптимізації технологічних машин при сумісному синтезі параметрів і допусків на них, однак теоретичні дослідження не проілюстровані практичним застосуванням і вирішенням супутніх проблем, пов'язаних з визначенням величини допусків.

У сучасних умовах найпоширенішим підходом до розв'язання оптимізаційних багатокритеріальних задач є метод приведення окремих критеріїв до об'єднаної глобальної цільової функції, що дістав назву «скаляризації» [152, 158, 168, 243]. Однак у [190, 227] такий підхід піддається критиці. Вказується, що зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної далеко не завжди є правомірним, оскільки сформульована математична задача не є адекватною вихідній задачі. Автори пропонують систематичний перегляд багатомірних областей: в якості пробних точок в просторі параметрів використовуються точки рівномірно розподілених послідовностей.

Перспективними видаються методи багатокритеріальної оптимізації, що базуються на теорії нечітких множин і інтервального аналізу [104, 121]. У роботі [104] показано, що використовуючи нечіткі множини і теорію можливостей, можна отримати більш глибокі і змістовні результати, ніж при використанні традиційних підходів.

В будь-якому разі постановці задачі векторної оптимізації передусє створення математичної моделі МС з низкою зазначених вище проблем, комплексно пов'язаних з пошуком і уточненням значень самих критеріїв, що

підлягають оптимізації, тому вибір методу розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації має бути індивідуальним і відповідати особливостям поставленої задачі.

### 1.8. Постановка задач досліджень

Здійснений огляд дозволяє зробити висновок про те, що на сьогодні застосування розрахунково-експериментальних методів зниження вібрацій і оцінювання конструкційної міцності МС суттєво ускладнене з наступних причин:

- недостатньо уваги приділено точності розв'язання ОЗ ідентифікації пружно-інерційних і дисипативних характеристик швидкісних роторів;
- відсутня загальна методологія синтезу конструктивно і технологічно обґрунтованих допусків на вхідні і внутрішні параметри машин, що забезпечують їх міцність. Не в повному обсязі розв'язані теоретичні та практичні аспекти синтезу конструкторських варіантів МС, які б мали оптимальну чутливість до виробничих і експлуатаційних відхилень їх вхідних і внутрішніх параметрів;
- недостатня міцнісна надійність МС часто обумовлена відсутністю або складністю одержання наочних і коректних математичних моделей, які відбивають вплив конструктивних і технологічних факторів на показники міцності виробів;
- значна частина задач динаміки і міцності може бути приведена до дискретної лінійної ОЗ (1.2). Не зважаючи на великий обсяг робіт із методів розв'язання задачі (1.2), при їх практичному застосуванні на конкретних МС виникають складнощі, а самі методи потребують вдосконалення.

Здійснений аналіз приводить до постановки таких задач досліджень:

1. Формалізувати ОЗ параметричної ідентифікації гнучких роторів і синтезу допусків на конструкторські параметри МС та (або) технологічні процеси їх виготовлення за умови забезпечення заданих вимог на їх міцнісні і вібраційні характеристики.

2. Розробити метод параметричної ідентифікації математичних моделей динаміки і міцності МС за результатами вимірювання їх вихідних параметрів, що враховує ступінь їх ідеалізації та умови експлуатації, шляхом доозначення недовизначених ОЗ, і застосувати його для ідентифікації АЧХ двигунів та визначення ФМХ матеріалів зі значним розкидом реальних значень.

3. Дослідити динамічні процеси у машинах зі швидкісними гнучкими роторами з зосередженими масами і розробити методи ідентифікації дисбалансів і пружно-інерційних характеристик роторів, що ґрунтуються на ОЗ інтерпретації даних вимірювань.

4. Розробити методи забезпечення стійкості ОЗ і підвищення точності ідентифікації дисбалансів та пружно-інерційних характеристик швидкісних гнучких роторів, а також міцнісних параметрів машин.

5. Розвинути теорію експериментального оцінювання динамічних та міцнісних параметрів МС, розробивши метод обробки статистичних даних результатів вимірювань для їх імовірнісних розподілів з полімодальним характером.

6. Ґрунтуючись на методах ОЗ інтерпретації, розробити розрахунково-експериментальний метод визначення ФМХ конструкційних матеріалів з недостатньо вивченими або невідомими властивостями в широкому діапазоні температур.

7. Розробити метод ідентифікації нелінійних силових характеристик коливальних систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами зведенням їх до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

8. Розробити принципи оперативної побудови математичних моделей складних МС, які містять незалежні підсистеми, з метою істотного зменшення кількості необхідних експериментів при використанні планування експерименту і застосування їх для скорочення тривалості моделювання.

9. Розробити метод параметричного синтезу конструкторських параметрів структурно-складних технічних систем і застосувати його для розрахунково-експериментального оцінювання міцності герметизованих конструкцій електронної техніки, а також забезпечення працездатності МС літакового відповідача.



## РОЗДІЛ 2

### МЕТОДИ ЗНИЖЕННЯ ВІБРАЦІЙ ШВИДКІСНИХ РОТОРІВ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ

#### 2.1. Методи параметричної ідентифікації гнучких роторів

2.1.1. Оборнені задачі параметричної ідентифікації механічних систем. Математичну модель МС можна подати як систему з  $n$  вхідними параметрами  $x_i, i = \overline{1, n}$  і  $m$  вихідними параметрами  $Y_i, i = \overline{1, m}$ . Наприклад, вхідними параметрами математичної моделі швидкісного гнучкого ротора є його пружно-інерційні і дисипативні характеристики, частота обертання; вихідними параметрами є величина прогинів, напружень, критичні частоти обертання, амплітуда вібрацій тощо.

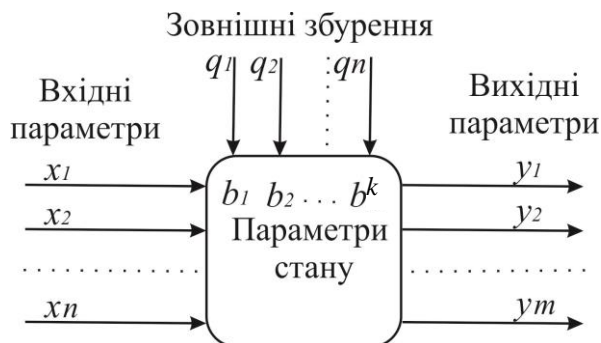


Рис. 2.1. Модель механічної системи

Формування вектора  $\mathbf{Y}$  визначається набором значень вектора  $\mathbf{X}$  за допомогою оператора  $f(\mathbf{X}, \mathbf{B})$

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{Y} = [Y_i]_{1 \times m}, \quad \mathbf{X} = [x_i]_{1 \times n},$$

що здійснює зв'язок між цими векторами. Структура  $f$  і вектор параметрів математичної моделі  $\mathbf{B} = [B_i]_{1 \times k}$  відповідає фізичній природі і функціональному призначенню МС.

Розглядаючи проблему підвищення ефективності детермінованих математичних моделей МС, необхідно відзначити, що дослідники часто перебільшують вплив структури моделі на її ефективність, тим самим применшуючи роль коефіцієнтів моделей. Проте ефективність використання детермінованих математичних моделей динаміки та міцності в практиці проектування МС може бути значно підвищена за рахунок уточнення значень пружних, масових та дисипативних характеристик, які у них входять, базуючись на експериментальних дослідженнях на реальному об'єкті або його фізичній моделі. Річ у тім, що найдосконаліша математична модель може бути скомпрометована, якщо в неї підставляти неточні дані. Таке уточнення особливо важливе, наприклад, при дослідженні динаміки гнучких роторів в умовах «неточних» даних про їх пружно-інерційні властивості; міцності конструкцій герметизованих композитних деталей МС, з причини широкого застосування нових перспективних матеріалів з недостатньо вивченими властивостями. Проте визначення на основі даних експерименту ФМХ матеріалів або функцій, що входять у визначальні співвідношення, є основною задачею експериментальної механіки [36].

Існує два можливі підходи до уточнення значень параметрів МС. Перший з них – статистичний, може бути застосований при визначенні значень параметрів, які підлягають безпосередньому вимірюванню на реальному об'єкті. Другий ґрунтується на ідентифікації тих параметрів, які не можуть бути виміряні або вимірюються з великими похибками. Розглянемо докладніше задачі параметричної ідентифікації.

Часто деякі характеристики (параметри) МС або коефіцієнти, які входять у розрахункову модель, не можуть бути виміряні, або вимірюються з великими похибками без врахування реальних умов експлуатації, а також ідеалізації реального об'єкта, або внаслідок значного розкиду значень вимагають уточнення. Для визначення таких параметрів пропонується вважати їх значення невідомими у досліджуваній розрахунковій моделі. Значення ж тих параметрів об'єкта, які можуть бути виміряні достатньо точно в реальних умовах функціонування об'єкта, підставляти в ту ж модель в якості вхідної інформації.

Тоді виникає можливість ідентифікувати значення шуканих характеристик і (або) коефіцієнтів. У зв'язку із наведеним, сформулюємо математичну задачу такої ідентифікації.

Нехай структура зв'язку між вихідними характеристиками (параметрами) МС і його первинними факторами задана системою функціональних рівнянь

$$y_j = f_j(b_1, b_2, \dots, b_i, x_1, x_2, \dots, x_i), \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, \eta, x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

де  $f_j(b_1, b_2, \dots, b_i, x_1, x_2, \dots, x_i)$  – множина операторів, яка визначається математичною моделлю досліджуваного об'єкту чи процесу. Необхідно за вимірними на реальному об'єкті значеннями вихідних характеристик  $y_1, y_2, \dots, y_m$  і заданою моделлю визначити значення в загальному випадку як коефіцієнтів цієї моделі  $b_1, b_2, \dots, b_i$ , так і невідомих первинних факторів  $x_1, x_2, \dots, x_i$ .

Окремий випадок постановки такої задачі передбачає, що значення коефіцієнтів моделей  $b_1, b_2, \dots, b_k$  є відомими.

Сформульована задача, на відміну від розглянутої вище задачі вимагає відшукування відображення точки в просторі вихідних характеристик МС в точку у просторі первинних факторів і коефіцієнтів моделі. В залежності від співвідношення кількості невідомих  $n$  і кількості рівнянь  $m$  в системі (2.1) будемо розрізняти наступні три типи задач: недовизначені ( $m < n$ ), нормальні ( $m = n$ ) і перевизначені ( $m > n$ ). З урахуванням того факту, що кожна математична модель є описом деякого реально існуючого об'єкта, постановка, розв'язання і аналіз таких задач видається надзвичайно важливим. Так, якщо точка в просторі вихідних характеристик визначається за результатами відповідних експериментів на реальному об'єкті, то розв'язок задачі дає змогу ідентифікувати невідомі первинні фактори і коефіцієнти моделі:

по-перше, з урахуванням всіх більш або менш суттєвих особливостей реального об'єкта (цим виключена необхідність виокремлення і аналізу кожної з них);

по-друге, з урахуванням прийнятого ступеня ідеалізації реального об'єкту, що суттєво підвищує ефективність використання моделей динаміки та міцності у практиці проектування і виробництва.

Крім цього, таким чином можна визначити значення параметрів МС, які неможливо безпосередньо виміряти, або розрахувати за кресленнями, а також коефіцієнтів моделі шляхом вираховування їх за результатами спостережень інших величин.

*Примітка.* В суто математичному плані дослідження і пошук розв'язків таких задач не викликає значних труднощів тільки в окремому випадку: коли  $n=t$  (вихідної інформації  $y_1, y_2, \dots, y_m$  достатньо для знаходження первинних чинників  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ), а коефіцієнти математичної моделі динаміки процесу  $b_1, b_2, \dots, b_m$  є відомими.

У зв'язку із практичною важливістю сформульованих вище задач, коротко зупинимось на практичній стороні їх вирішення.

*Метод пробних параметрів.* Зупинимось детальніше на недовизначених задачах, які мають місце у випадку  $m < n$ . Такі випадки часто зустрічаються в практиці проектування, виробництва і експлуатації МС. У математичному трактуванні розглядуваного випадку система рівнянь (2.1) має безліч розв'язків. Але з причини існування реального об'єкта, природно визначити саме властивий йому розв'язок, тобто знайти таку множину параметрів об'єкту  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , яка відповідає відомій вихідній інформації  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Постановка такої задачі передбачає її доозначення на основі експерименту на досліджуваному об'єкті. З цією метою в роботі пропонується узагальнений метод пробних параметрів, суть якого полягає у наступному: замінюючи в реальному об'єкті один або декілька елементів з невідомими значеннями первинних факторів на деякі пробні елементи, значення первинних факторів яких відомі, експериментальним шляхом визначаються відповідні їм значення вихідних характеристик МС. Вказана процедура дає можливість отримати стільки додаткових рівнянь, скільки потрібно, щоб система стала визначеною. В тих випадках, коли заміна вузла або елемента в конструкції повністю

неможлива, пропонується вносити часткові зміни первинних факторів, провокуючи таким чином зміну вихідних характеристик. Вказані послідовні заміни елементів з невідомими значеннями факторів на пробні необхідно здійснювати таким чином, щоб отримана при цьому система рівнянь:

по-перше, була нормальною або перевизначеною;

по-друге, щоб кожен із невідомих факторів попав хоча б в одне із рівнянь системи;

по-третє, пробні елементи необхідно вибирати таким чином, щоб отримана система не містила залежних рівнянь.

Побудова математичної моделі об'єкта дослідження насамперед передбачає чітке формулювання мети дослідження і виокремлення параметричного базису, що містить відповідну сукупність його вихідних характеристик і первинних факторів, що характеризують об'єкт у контексті поставленої мети. При цьому слід враховувати вказане у підрозділі 1.7 протиріччя, пов'язане із необхідністю забезпечення стійкості моделі. Питання відшукування оптимального розрахункового варіанта, який відповідає заданим значенням як точності опису об'єкта, так і міри стійкості, наприклад, для моделей у вигляді СЛАР, розглянуте далі у підрозділі 2.2.

2.1.2. Ідентифікація пружно-інерційних характеристик гнучких роторів із використанням інтегро-диференціальних залежностей згину. У підрозділі 1.1 були поставлені деякі задачі динаміки роторів, які швидко обертаються. Задачі забезпечення збалансованості таких роторів традиційно розв'язуються їх статичним і динамічним балансуванням. При цьому припускаючи, що ротор жорсткий, балансування здійснюють в двох крайніх площинах корекції, а гнучкі ротори балансують на балансувальних верстатах в трьох і більше площинах корекції.

Для зменшення віброактивності таких роторів необхідні знання їх пружно-інерційних характеристик. Однак спроба визначити за кресленням сучасного двигуна, який не має вивчених раніше прототипів, кількісні характеристики маси, пружності, демпфування тощо є надзвичайно складною,

точніше кажучи нерозв'язною задачею. Проблема в тому, що традиційне балансування часто є неефективним. Це викликало необхідність розробки методів постановки і розв'язання ОЗ ідентифікації пружно-інерційних і дисипативних характеристик машини за результатами відповідних експериментів, коли шукані параметри обчислюються з урахуванням всіх особливостей машини, які мають більш-менш суттєвий вплив.

Цінність ідентифікованих параметрів полягає у тому, що вони знайдені з урахуванням прийнятої ідеалізації реального об'єкту, тобто приведені («прив'язані») до вибраної математичної моделі динамічного процесу, що описує реальну систему.

Для підвищення ефективності балансування роторів з допомогою розв'язання ОЗ ідентифікації роторів за вимірними прогинами роторів, необхідно приділити особливу увагу створенню відповідних ефективних математичних моделей, які б не лише адекватно описували процес коливань ротора, а й дали змогу з достатньою точністю розраховувати шукані параметри.

Для ідентифікації дисбалансів (або ексцентриситетів), а також пружно-інерційних і дисипативних параметрів, вся необхідна інформація про ротор може бути отримана лише вимірюванням його прогинів на деякій кількості некритичних частот обертання. Ці вимірювання можуть бути здійснені відомими методами, наприклад, на вакуумних стендах або інших розгінних пристроях, а також безпосередньо при роботі машини під навантаженням.

Схема ротора багатоступінчатого компресора і система відліку, що обертаються разом з ним, показані на рис. 2.2.

Нехай будь-яким експериментальним методом вдалося отримати однопараметричну сім'ю просторових кривих динамічного прогину ротора з параметром, який відповідає його кутовій швидкості обертання. Тоді ці криві можуть бути розкладені на дві взаємно перпендикулярні площини  $XOY$  і  $YOZ$ . Лінією перетину цих площин є вісь  $OZ$ , яка співпадає з віссю ротора. Таким чином, функції динамічного прогину ротора представляються в параметричному вигляді  $x = x(z, \omega)$ ,  $y = y(z, \omega)$ , де  $\omega$  є відомим параметром – кутова швидкість обертання ротора [210].

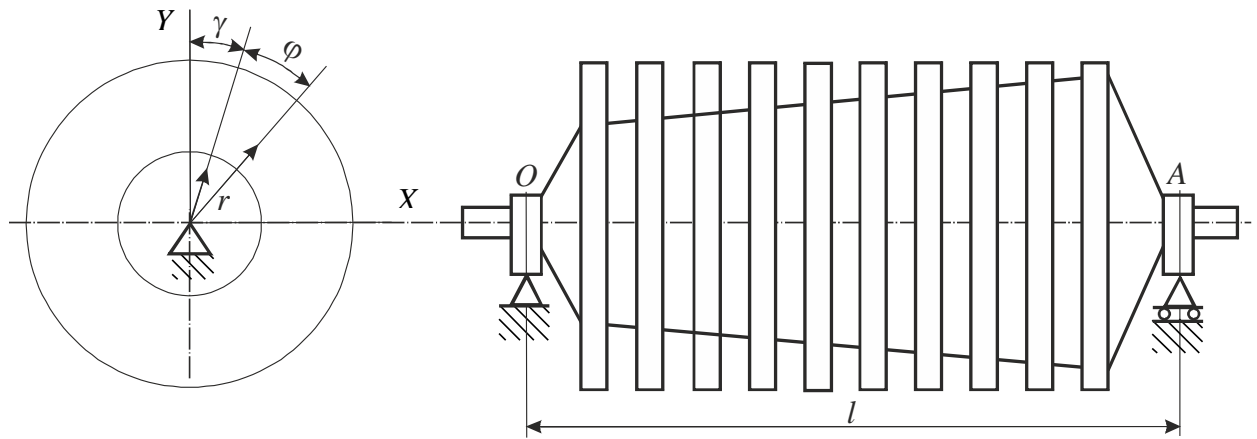


Рис. 2.2. Схема ротора десятиступінчатого компресора ГТД

Для параметричної ідентифікації ротора використаємо наступні інтегро-диференціальні залежності теорії згину валів:

- проекція прогину пружної осі ротора на площину  $YOZ$

$$y = y(z, \omega); \quad (2.2)$$

- кут повороту поперечного перетину ротора в точці із аплікатою  $z$

$$y' = \frac{dy}{dz}; \quad (2.3)$$

- проекція вектора кривизни пружної лінії ротора на площину  $YOZ$

$$k(z, \omega) = y'' \left[ 1 + (y')^2 \right]^{-3/2}; \quad (2.4)$$

- проекція згинального моменту ротора в перерізі з координатою  $Z$  на площину  $YOZ$

$$M_y = M_y(z, \omega) = kEI; \quad (2.5)$$

- проекція поперечної сили на площину  $YOZ$

$$Q_y = Q_y(z, \omega) = \frac{dM_y}{dz}; \quad (2.6)$$

- проекція інтенсивності інерційного навантаження на площину  $YOZ$

$$q_y = \frac{dQ_y}{dz} = m\omega^2(y + e_y). \quad (2.7)$$

Аналогічні співвідношення можна записувати для проекцій векторів на площину  $XOZ$ . В подальшому всі дослідження відбуваються для площини  $YOZ$ .

Слід відмітити, що оскільки напрям і модуль ексцентриситету не залежать від кутової швидкості обертання, то і його проекція  $e_y$  в залежності (2.7) не залежить від частоти обертання. У вказаних співвідношеннях (2.2)-(2.7) не враховується опір, що виникає при обертанні ротора, який є наслідком впливу найрізноманітніших факторів.

Якщо взяти до уваги, що  $f = f(z, \omega)$  є сумарним моментом всіх сил опору, що виникають за кутової швидкості  $\omega$ , то у вказаному випадку співвідношення (2.5) набуває вигляду

$$f(z, \omega) + M_y(z, \omega) = k(z, \omega) \cdot EI(z),$$

де під  $M_y(z, \omega)$  треба розуміти лише проекцію згинального моменту інерційних сил.

У такому разі із (2.7) маємо

$$\begin{aligned} \frac{d^2(k \cdot EI)}{dz^2} &= \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{d^2 M_y}{dz^2} = \frac{d^2 f}{dz^2} + m\omega^2(y + e_y) \\ \text{або } \frac{d^2 f}{dz^2} + m\omega^2(y + e_y) &= \frac{d^2 k}{dz^2} \cdot EI + 2 \cdot \frac{dk}{dz} \cdot (EI)' + k(EI)'' \end{aligned} \quad (2.8)$$

Якщо ввести позначення  $\alpha_i = \alpha_i(z) = \frac{1}{m} \cdot \frac{d^{(i)}(EI)}{dz^i}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,

диференціальне рівняння для знаходження динамічного параметру (2.8) набуває вигляду



$$-\frac{1}{m} \cdot \frac{d^2 f}{dz^2} + \alpha_0 \frac{d^2 k}{dz^2} + 2\alpha_1 \frac{dk}{dz} + \alpha_2 k - \omega^2 e_y = \omega^2 y$$

Функція  $-\frac{1}{m} \cdot \frac{d^2 f}{dz^2}$  може бути представлена розкладом у ряд за степенями

$\omega$  з деякими невідомими коефіцієнтами, що залежать від  $z$ , тобто

$$-\frac{1}{m} \cdot \frac{d^2 f}{dz^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(Z) \omega^k. \quad (2.9)$$

де  $\delta_k(Z)$  –  $\delta$ -функція Дірака.

В подальших викладках кількість членів ряду (2.9) обмежується кінцевим числом; при цьому передбачається, що сума відкинутих його членів вносить у розрахунок похибку, що не перевищує задану точність вимірювання прогинів. Тоді справедливим є

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(z) \omega^k + \alpha_0 \frac{d^2 k}{dz^2} + 2\alpha_1 \frac{dk}{dz} + \alpha_2 k - \omega^2 e_y = \omega^2 y, \quad (2.10)$$

де  $n$  – кінцеве число.

Метою подальших перетворень є пошук значень функцій  $e_y(z)$ ,  $\alpha_0(z)$ ,  $\alpha_1(z)$ ,  $\alpha_2(z)$  в деякій фіксованій точці  $a$ . Отже, маємо  $n+5$  невідомих величин.

Для ідентифікації за відомими функціями  $y(z, \omega_j)$ , отриманим експериментально при різних некритичних кутових швидкостях обертання ротора  $\omega_j$ , на яких проявляється прогин ротора, знаходять значення функцій

$\left. \frac{d^{(i)}(z, \omega_j)}{dz^j} \right|_{z=a}$  за відомими правилами диференціювання для  $i=0,1,2$  і кожного

$j=1,2,\dots, n+5$ . Записавши тепер рівняння (2.10) для кожного  $\omega_j$  в точці  $z=a$ ,

можна отримати систему  $n+5$  лінійних рівнянь з тією ж кількістю невідомих

$$\sum_{k=0}^n \delta_k(a) \omega_j^k + \alpha_0(a) \frac{d^2 k(z, \omega_j)}{dz^2} \Big|_{z=a} + 2\alpha_1(a) \frac{dk(z, \omega_j)}{dz} \Big|_{z=a} + \alpha_2(a) k(a, \omega_j) - e_y(a) \omega_j^2 = \omega_j^2 \cdot y(a, \omega_j), \quad (2.11)$$

$$j = 1, 2, \dots, n + 5.$$

Розв'язавши цю систему, визначаються невідомі величини в заданій точці  $a$ . Оскільки точка  $z = a$  є довільною, то, розв'язавши систему рівнянь для реакцій опор у випадку двохопрного ротора з коефіцієнтами, знайденими в будь-якій іншій точці осі  $OZ$ , можна отримати значення невідомих у цій точці. Таким чином можна вважати, що ідентифікованими є функції  $e_y(z)$ , а також  $\alpha_i(z)$ ,  $i=0,1,2$ .

Провівши аналогічні викладки для  $e_x(z)$ , отримують значення модулів векторів дисбалансів в кожній точці осі ротора за залежністю

$$D(z) = M(z) \cdot \sqrt{e_x^2(z) + e_y^2(z)}, \quad (2.12)$$

і кут, між вказаними векторами та віссю  $OY$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{e_x(z)}{e_y(z)}. \quad (2.13)$$

В багатьох практично важливих частинних випадках кількість частот обертання, на яких необхідно виміряти прогин, значно скорочується, а система (2.11) набуває більш простого вигляду.

Із достатньою точністю сили опору роторних систем при обертанні, які визначається в основному тертям, описуються лінійним залежностями (сила тертя пропорційна кутовій частоті). В такому разі момент сил опору набуває значення

$$f(Z, \omega) = \int_0^Z \lambda \omega dz = \lambda \omega z + f(0, \omega).$$

Проте з іншого боку  $\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{d^2 [\lambda \omega z + f(0, \omega)]}{dz^2} = 0$ , а тому система (2.11) набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha_0 \frac{d^2 K(z, \omega_j)}{dz^2} + 2\alpha_1 \frac{dK(z, \omega_j)}{dz} + \alpha_2 K(z, \omega_j) - e_y \omega_j^2 = \omega_j^2 y, \\ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \quad (2.14)$$

Таким чином, для ідентифікації невідомих ексцентриситетів і пружно-інерційних характеристик достатньо виміряти прогин ротора на чотирьох різних некритичних частотах обертання.

Слід відмітити, що таке зменшення кількості рівнянь в системі не завжди викликає втрату точності розв'язків, оскільки високий порядок системи (2.11) часто викликає обчислювальну похибку, що значно перевищує вихідну при взятому наближенні.

Якщо частоти обертання ротора, на яких вимірюють прогини, є такими, що на них не проявляється дія сил опору, то система рівнянь має такий вид, що і в попередньому випадку, і кількість необхідних частот дорівнює 4. Якщо ж жорсткість  $EI$  є лінійною по  $z$ , наприклад, коли ротор є однорідним конусом і  $EI = \varphi z + w$ , і враховуючи, що  $\frac{d(EI)}{dz} = \varphi$ ,  $\frac{d^2(EI)}{dz^2} = 0$ , кількість необхідних вимірювань знизиться до трьох, і система набуде вигляду

$$\begin{cases} \frac{\varphi z + w}{m} \cdot \frac{d^2 K(z, \omega_j)}{dz^2} + \frac{2\varphi}{m} \cdot \frac{dK(z, \omega_j)}{dz} - \omega_j^2 e_y(z) = \omega_j^2 y(z, \omega_j), \\ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Якщо ротор постійного перерізу і  $EI = w = const$ , то кількість частот знижується до двох і

$$\begin{cases} \frac{w}{m} \cdot \frac{d^2 K(z, \omega_j)}{dz^2} - \omega_j^2 e_y(z) = \omega_j^2 y(z, \omega_j), \\ j = 1, 2. \end{cases}$$

Якщо крім того, пружно-інерційні характеристики ротора відомі, то для знаходження невідомого ексцентриситету достатньо розв'язати лише одне рівняння, у яке вироджується система  $e_y = \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{w}{m} \cdot \frac{d^2 K}{dz^2} - \omega^2 y \right)$ .

Розв'язок системи (2.11) або її модифікації дозволяє визначити ще одну важливу для дослідження динаміки ротора характеристику – фазовий кут  $\varphi(Z, \omega)$ , тобто кут між вектором динамічного прогину у точці  $Z$  при частоті обертання  $\omega$  і вектором ексцентриситету (або дисбалансу). Виходячи з рис. 2.2, маємо  $\gamma + \varphi(Z, \omega) = \arctg \frac{x(Z, \omega)}{y(Z, \omega)}$ , тому  $\varphi(Z, \omega) = \arctg \frac{x(Z, \omega)}{y(Z, \omega)} - \arctg \frac{e_x(z)}{e_y(z)}$ .

Знання фазових кутів при різних частотах обертання дозволяє визначити і положення площин форм її власних коливань, з врахуванням обертання всіх деталей ротора, а отже і наявності зазорів у підшипниках і пов'язаних з цим явищ.

При обмеженій кількості точок вимірювання прогину обчислення похідних пов'язано з певними похибками. Підвищити точність шуканих похідних можна вимірюванням не тільки прогинів, але і кута повороту перерізів, тобто  $y'$  і навіть  $y''$  і, таким чином, встановити більш точні співвідношення між  $y$  і  $y'$ .

У деяких випадках можна взагалі уникнути помилок, пов'язаних з відшуканням похідних, застосовуючи спосіб узагальненого диференціювання (який ґрунтується на інтегруванні частинами). Основна ідея полягає у тому, щоб замінити диференціювання невідомої, в даному випадку заданою таблицею функції, диференціюванням відомої, заданої аналітично гладкої функції, яка має деякі граничні властивості.

Ці властивості полягають у тому, що ця гладка функція перетворюється в нуль на границях розглянутої ділянки, разом з певною кількістю її похідних.

Розглянемо диференціальне рівняння пружної лінії ротора, отримане звичайним чином із рівняння Лагранжа

$$\frac{d^2}{dZ^2} [k(z, \omega) \cdot EI(z)] = m(z) \cdot \omega^2 (y(z, \omega) + e_y(z)),$$

де  $k(z, \omega) = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$  – проекція вектора кривизни пружної лінії ротора на

площину  $YOZ$  ;

$EI(z)$  – жорсткість ротора при згині;

$m(z)$  – маса одиниці довжини вала та диску на ньому;

$\omega$  – кутова швидкість обертання ротора;

$y(z, \omega)$  – проекція кривої прогину з параметром, що відповідає кутовій швидкості обертання, в площині  $YOZ$  ;

$e_y(z)$  – проекція вектора ексцентриситету ротора в перерізі з координатою  $z$  на площину  $YOZ$  .

Для малих прогинів ротора можна замінити нелінійне диференціальне рівняння на лінійне, поклавши  $k(z, \omega) = y''(z, \omega)$ .

Шляхом розбиття валу на ділянки таким чином, щоб можна було вважати в межах кожної ділянки  $EI_i$ ,  $m_i$ ,  $e_i$  сталими величинами, для довільної ділянки  $[Z_i, Z_{i+1}]$  справедливим є рівняння

$$\frac{d^2 [EI_i y'']}{dz^2} = m_i \cdot \omega^2 (y + e_i). \quad (2.15)$$

Розглянемо гладку функцію  $f(z)$  таку, що вона та її перші три похідні перетворюються в нуль на кінцях ділянок, на які розбитий вал, тобто при  $z = Z_i$  і  $z = Z_{i+1}$  виконується

$$f = f' = f'' = f''' = 0. \quad (2.16)$$

Помноживши ліву і праву частину рівняння (2.15) на функцію  $f(z)$  інтегруванням відповідних виразів отримуємо

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} f \frac{d^2(EI_i y'')}{dz^2} dz = \int_{z_i}^{z_{i+1}} f \cdot m_i \cdot \omega^2 (y + e_i) dz. \quad (2.17)$$

Послідовне інтегрування частинами лівої частини (2.17) з урахуванням обмежень (2.16), дає можливість понизити порядок похідних вихідної функції

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_{i+1}} f \frac{d^2(EI_i y'')}{dz^2} dz &= f \frac{d(EI_i y'')}{dz} \Big|_{z_i}^{z_{i+1}} - \int_{z_i}^{z_{i+1}} f' \cdot \frac{d(EI_i y'')}{dz} dz = f' \cdot EI_i \cdot y'' \Big|_{z_i}^{z_{i+1}} + \\ &+ \int_{z_i}^{z_{i+1}} f'' \cdot EI_i y'' dz = f'' \cdot EI_i \cdot y' \Big|_{z_i}^{z_{i+1}} - \int_{z_i}^{z_{i+1}} f''' \cdot EI_i y' dz = -f''' \cdot EI_i \cdot y \Big|_{z_i}^{z_{i+1}} + \int_{z_i}^{z_{i+1}} f^{IV} \cdot EI_i y dz. \end{aligned}$$

Тоді рівняння (2.17) набуде вигляду  $\frac{EI_i}{m_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} f^{IV} \cdot y dz - \omega^2 e_i \int_{z_i}^{z_{i+1}} f dz = \omega^2 \int_{z_i}^{z_{i+1}} f \cdot y dz$ .

В отриманому рівнянні дві невідомі величини:  $e_i$  і  $\frac{EI_i}{m_i}$ . Для їх ідентифікації

можна або записати рівняння для двох різноманітних некритичних частот обертання, або для двох різноманітних функцій  $f_1$  і  $f_2$  з властивостями (2.16).

Клас таких функцій достатньо широкий. Прикладами можуть слугувати

$$f_1 = (z - Z_i)^4 \cdot (z - Z_{i+1})^4, f_2 = (z - Z_i)^4 \cdot \left( \exp\left(\frac{z - Z_{i+1}}{z_i - Z_{i+1}}\right) - 1 \right)^4, f_3 = \sin^4 \frac{\pi k (z - Z_i)}{(Z_{i+1} - Z_i)}.$$

При застосуванні методу узагальненого диференціювання для виключення з рівнянь похідних від прогину слід зважати на те, що поряд з позбавленням від похибок, які могли би виникнути в процесі чотирикратного диференціювання, ми втрачаємо у чутливості  $y$  в порівнянні з  $y^{IV}$  до складових дисбалансу за вищими формами згину.

2.1.3. Ідентифікація дисбалансів за статичними коефіцієнтами впливу. Параметрична ідентифікація гнучкого ротора являє собою розв’язання ОЗ теорії коливань, коли за рухом динамічної системи, що спостерігається і фіксується, необхідно відновити сили, які викликають цей рух, точніше кажучи за АЧХ необхідно ідентифікувати силові параметри валу, розподіл маси тощо.

З цієї причини виникає питання про ідентифікованість динамічної системи, тобто про принципову можливість однозначного визначення векторів невідомих величин, а далі – про надійність ідентифікації, тобто про можливі помилки у визначенні цих величин через те, що об’єктивна властивість ідентифікованості не завжди розкривається до кінця внаслідок недосконалості конкретних методів ідентифікації, що використовуються.

Розглянемо і дослідимо питання стійкості балансування у контексті коректності обраного методу ідентифікації або прийнятої динамічної моделі ротора, розуміючи під цим той факт, що малі зміни вхідних, отриманих експериментальним шляхом, параметрів викликають незначні зміни значень дисбалансів або корегувальних мас, що ідентифікуються. Через те, що в більшості викладених вище методів, а також і в методах інших авторів, необхідно розв’язувати системи лінійних рівнянь, розглянемо стійкість і точність ідентифікації ексцентриситетів при використанні статичних коефіцієнтів впливу, оскільки тут чіткіше проявляється фізична сутність явища.

В роботі [171] було показано, що рух гнучкого ротора відносно системи координат, яка обертається разом з ним, одна із осей якої співпадає з віссю ротора, описується рівнянням Фредгольма II роду [240]. Дійсно, розглянемо диференціальне рівняння пружної лінії ротора, що отримано звичайним шляхом із рівняння Лагранжа.

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EI(z) \cdot \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right) = m(z) \omega^2 [y(z) + e(z)].$$

Тут для ротора довільної конфігурації, наприклад такого, що складається з дисків, які сидять на вагомому валу, окрім представлення через функцію Дірака можна вважати, що  $m(z)$  - маса одиниці довжини, яка враховує як масу вала, так і диску. Так, якщо на ділянці  $\Delta z$  розташований диск масою  $M$  і вага самого вала у межах ділянки дорівнює  $M_1$ , то  $m(z) = (M + M_1)/\Delta z$ . Точно так можна подати і екваторіальні моменти інерції  $I(z)$ , що враховують екваторіальний момент інерції диска  $i$  та екваторіальний момент інерції перерізу  $j$  вала на довжині  $\Delta z$ , як  $I(z) = (i + j)/\Delta z$ . Аналогічно через ексцентриситет диску  $H$  та ексцентриситет  $h$  ділянки вала довжиною  $\Delta z$  представимо ексцентриситет  $e(z) = (H + h)/\Delta z$ . У вигнутому положенні вала на одиницю довжини буде діяти відцентрова сила  $q(z) = \omega^2 m(z)[y(z) + e(z)]$ , причому функція  $e(z)$  залежить від конструкції ротора, технологічного процесу, культури виробництва, відповідальності виробу.

Застосувавши  $\delta$ -функцію Дірака, маємо

$$\omega^2 m(z)[y(z) + e(z)] = \int_0^l \omega^2 m(s)[y(s) + e(s)]\delta(s - z)ds,$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EI(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right] = \int_0^l \omega^2 m(s)[y(s) + e(s)]\delta(s - z)ds.$$

За визначенням функції впливу  $\alpha(z, s)$ ,  $EI(z) \frac{d^2 \alpha(z, s)}{dz^2} = M(z)$ , де  $M(z)$  є згинальним моментом в перерізі  $z$  за умови, що одинична сила прикладена в точці з координатою  $s$ . Звідси поперечна сила  $Q(z) = \frac{dM(z)}{dz}$  у точці  $z=s$  має стрибок, рівний 1, а у решта точок вона постійна, тому  $\frac{dQ}{dz} = \frac{d^2 M(z)}{dz^2} = \delta(z - s)$  і

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EI(z) \frac{d^2 \alpha(z, s)}{dz^2} \right] = \delta(z - s). \text{ Оскільки } \delta(z - s) = \delta(s - z), \text{ тому}$$



$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EI(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right] = \int_0^l m(s) \omega^2 \cdot [y(s) + e(s)] \cdot \frac{d^2}{dz^2} \cdot \left[ EI(z) \frac{d^2 \alpha(z, s)}{dz^2} \right] ds.$$

Проінтегрувавши двічі по  $z$ , маємо

$$EI(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \int_0^l m(s) \omega^2 \cdot [y(s) + e(s)] \cdot EI(z) \frac{d^2 \alpha(z, s)}{dz^2} ds + c_1 z + c_2,$$

де  $c_1$  і  $c_2$  – сталі. Визначимо їх із умов, що при довільному навантаженні згинальні моменти на опорах дорівнюють 0, оскільки вони там не прикладені.

Оскільки  $EI(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2}$  є згинальним моментом, а  $EI(z) \frac{d^2 \alpha(z, s)}{dz^2}$  – згинальним моментом від одиничної сили, прикладеної у точці  $s$ , то при  $z=a_1$  і  $z=a_2$  обидва дорівнюють нулю, якщо  $a_1$  і  $a_2$  є координатами опор і  $a_1 \neq a_2$ . Звідси можна знайти, що  $c_1=c_2=0$ , і тому

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \int_0^l m(s) \omega^2 \cdot [y(s) + e(s)] \cdot \frac{d^2 \alpha(z, s)}{dz^2} ds.$$

Проінтегрувавши по  $z$ , маємо

$$y(z) = \int_0^l m(s) \omega^2 \cdot [y(s) + e(s)] \cdot \alpha(z, s) ds + c_3 z + c_4,$$

де  $c_3, c_4$  – сталі, які можна знайти із умови, що при довільному навантаженні прогин на опорах дорівнює нулю. Тоді  $y(a_1) = y(a_2) = 0$ ,  $\alpha(a_1, s) = \alpha(a_2, s) = 0$  при

довільному  $s$  маємо  $c_3=c_4=0$ , і тому позначивши  $\int_0^l m(s) \omega^2 \cdot e(s) \cdot \alpha(z, s) ds = f(z)$ ,

маємо рівняння Фредгольма II роду відносно  $y(z)$ .

$$y(z) = f(z) + \int_0^l m(s) \omega^2 \alpha(z, s) y(s) ds$$

Рівняння Фредгольма II роду може бути з довільною наперед заданою точністю апроксимоване СЛАР. З останнього випливає можливість апроксимації ротора з довільним розподілом параметрів, ротором, що

складається з невагомго вала, який несе  $n$  дисків з масами  $m_i$ , і екваторіальними моментами інерції  $J_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Внаслідок похибок виготовлення кожний з дисків має радіальні ексцентриситети  $e_i$  і кутові  $\varepsilon_i$ , тобто відхилення осі диска від осі, яка проходить крізь центри інерції. При обертанні вала отримуємо прогини  $y_i$  і кути повороту  $y'_i$  (рис. 2.3).

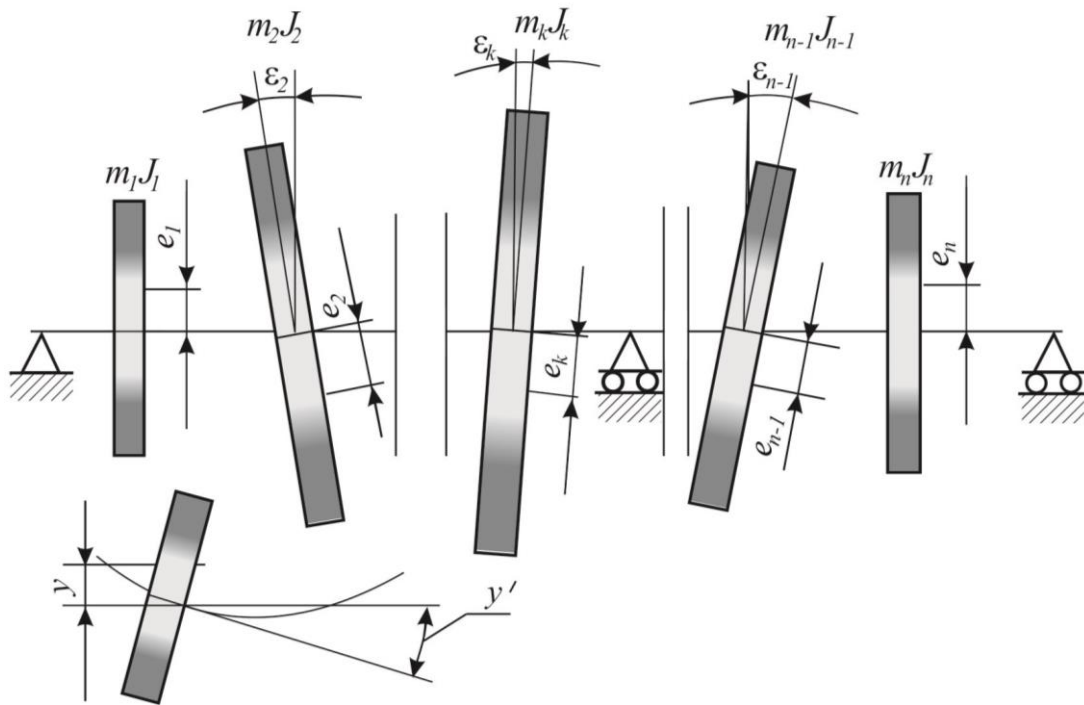


Рис. 2.3. Схема багатомасового ротора

Рівнянням Фредгольма II роду для наближеного розв'язання без врахування гіроскопічних моментів в свою чергу можна замінити матричним рівнянням виду

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\mathbf{Y} + \mathbf{e})\omega^2. \quad (2.18)$$

В цьому рівнянні координатами вектора  $\mathbf{Y} = [y_i]_{1 \times n}$  є прогини вала ротора в місцях посадки дисків, вектора  $\mathbf{e} = [e_i]_{1 \times n}$  – ексцентриситети цих дисків, а елементи матриці  $\mathbf{A} = [a_{ik}]_1^n$  є добутками статичних коефіцієнтів впливу на маси відповідних дисків. Нагадаємо, що значення статичних коефіцієнтів впливу  $\alpha_{ij}$  дорівнюють величині прогину в  $i$ -му перерізі від дії одиничної сили в  $j$ -му

перерізі,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Для безпосереднього визначення дисбалансів за ідентифікованими ексцентриситетами слід використати залежності (2.12) і (2.13).

Описана модель (2.18) є ідентифікованою, тобто принципово, наприклад за теоремою Крамера, існує її єдиний розв'язок. Малі похибки, що виникають при зміні експериментально визначених величини, які входять у рівняння в процесі його розв'язання, викликають похибки при обрахунку ексцентриситетів. Останні можуть бути як малі, так і великі за величиною. Але моделі (2.14) і (2.18) будуть мати практичне значення лише тоді, якщо ці похибки будуть малими, тобто коли моделі стійкі відносно вказаних факторів. Питання стійкості розв'язків є принциповим і йому присвячено наступний підрозділ.

## 2.2. Стійкість розв'язків погано обумовлених обернених задач

2.2.1. Зв'язок числа обумовленості лінійного оператора і похибки розв'язку дискретної лінійної оберненої задачі. Сучасні комп'ютерні системи для інженерних та наукових розрахунків, такі як, наприклад, MATLAB т ін., без сумніву реалізують в собі найкращі сучасні алгоритми обчислень [165]. Але цей факт в жодному разі не звільняє дослідника від врахування впливу похибок вхідних даних на результат розв'язання ОЗ. Навіть тоді, коли такі задачі розв'язуються точно, але мають в собі неточні вхідні дані, це може призвести до того, що отримані результати й істинні можуть сильно відрізнятися.

Як і при розв'язанні розглянутих у підрозділі 1.5 задач, при проектуванні і виробництві МС або технологічних процесів їх виготовлення необхідно забезпечити стійкість їх математичних моделей. Крім випадків, коли моделі МС безпосередньо описуються рівнянням (1.2), до розв'язання СЛАР також зводяться розрахунки багатьох МС з моделями, які описуються інтегральними рівняннями і диференційними рівняннями у частинних похідних. Зважаючи на широке застосування лінійних дискретних моделей, тут і надалі в роботі розглядатимуться лінійні моделі у вигляді СЛАР типу (1.2).

Нехай МС описується лінійною моделлю виду

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \dots + x_m\mathbf{A}_m, \quad (2.19)$$

де  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$  – вектор невідомих (об'єкт);

$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$  – вектор даних спостережень;

$\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, n}$  – вектор-стовпці матриці  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Матриця  $\mathbf{A}$  може розглядатись як математичний запис лінійного оператора  $\mathbf{A}$ , що здійснює відображення абстрактного скінченновимірного дійсного простору  $\mathbb{R}^m$  в інший скінченновимірний простір  $\mathbb{R}^n$ . Також передбачається, що в обох просторах задані ортогональні системи координат.

Всі відомі методи розв'язання СЛАР можна умовно розбити на два класи: прямі та ітераційні.

Прямими називаються методи, які приводять до розв'язку через виконання кінцевої кількості арифметичних операцій. Якщо операції реалізуються точно, то і розв'язок буде точним. Ітераційними є методи, в яких точний розв'язок може бути отриманий лише в результаті нескінченного повторення однакових дій.

До прямих методів належать: метод різницевої схем; метод лінеаризації; метод Гельфанда-Левітана-Крейна; метод граничного управління; метод сингулярного розкладання. Основна перевага прямих методів полягає в тому, що при їх реалізації вдається уникнути багаторазового розв'язання прямих задач. Однак прямі методи або виявляються нестійкими, або вимагають занадто великих обчислювальних витрат (при великих розмірах матриці  $\mathbf{A}$  у разі дискретизації задачі). Тому задачу (2.19) часто зводять до задачі мінімізації функціоналу Тихонова, що породжує широкий набір ітераційних методів.

Якщо вибрана модель коректна, то застосовуються відомі обчислювальні алгоритми, які дають змогу визначити невідомі первинні фактори досліджуваного об'єкта. Зокрема, нормальним псевдорозв'язком СЛАР (2.19) є

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^+ \mathbf{Y}, \quad (2.20)$$

де  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$  – псевдообернена матриця Мура-Пенроуза,  $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Зауважимо, що якщо  $m = n$  і  $\mathbf{A}$  – квадратна невироджена матриця, то псевдообернена матриця Мура-Пенроуза  $\mathbf{A}^+$  співпадає з оберненою  $\mathbf{A}^{-1}$  і розв’язок (2.20) перетворюється на нормальний (інверсний) розв’язок

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m. \quad (2.21)$$

Однак практика показує, що незважаючи на принципову можливість знаходження розв’язку рівняння (2.19) і його єдиність, задача стає набагато складнішою в тих випадках, коли число обумовленості матриці  $\mathbf{A}$  є великим, і розв’язок – нестійким.

Без втрати загальності, розглянемо випадок, коли  $m = n$ , тобто матриця  $\mathbf{A}$  – квадратна. Оцінку відносної похибки шуканої величини можна отримати наступним чином. Нехай замість системи (2.19) насправді необхідно розв’язати систему

$$(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}, \quad (2.22)$$

тобто елементи матриці, шуканого вектора і правої частини мають деякі невідомі абсолютні похибки  $\Delta \mathbf{A}$ ,  $\Delta \mathbf{X}$  і  $\Delta \mathbf{Y}$  відповідно, що залежать від точності контрольно-вимірювальної апаратури та інших факторів. При цьому, очевидно, похибки вимірних величин малі у порівнянні із істинними значеннями цих величин  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$ .

Віднімаючи від рівняння (2.22) рівняння (2.19) і нехтуючи членами другого порядку малості, отримаємо

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Y} - \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y}.$$

В довільній нормі справедливою є нерівність

$$\|\Delta \mathbf{X}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta \mathbf{Y}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\|^2 \cdot \|\Delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|$$

І, враховуючи, що відповідно до (2.19)  $\|\mathbf{X}\| > \|\mathbf{Y}\|/\|\Delta\mathbf{A}\|$  маємо

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|} + \|\mathbf{A}^{-1}\|^2 \cdot \|\mathbf{A}\|^2 \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}.$$

Відомо [21], що число обумовленості матриці  $\mathbf{A}$  визначається як  $cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$ .

Тому завжди виконується нерівність

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq cond(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|} + [cond(\mathbf{A})]^2 \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}. \quad (2.23)$$

Аналіз (2.23) свідчить, що на величину відносної похибки шуканої величини впливає число обумовленості матриці, яке визначається лише її властивостями, а також відносні похибки правих частин і елементів матриці системи. У випадку, коли елементи матриці задані точно, нерівність (2.23) набуває вигляду

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq cond(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|}. \quad (2.24)$$

Тут представлений кількісний взаємозв'язок точності визначення вхідних параметрів, обраної математичної моделі і точності вимірювальної апаратури.

Зі співвідношення (2.24) видно, що відносна похибка вектора первинних факторів може досягати максимальної величини

$$\left( \frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \right)_{\max} = cond(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|}. \quad (2.25)$$

Ця залежність дає змогу розв'язувати деякі достатньо важливі практичні задачі. Так, співвідношення (2.24) зумовлює міркування інженера, що здійснює дослідження, про можливість вибору за двома заданими факторами із (2.25)

третього. Наприклад, для наявної математичної моделі і заданої точності визначення первинних факторів можливо підібрати необхідну для успішного вимірювання апаратуру, або за наявною апаратурою і математичною моделлю – оцінити точність ідентифікації. Ці ж міркування дозволяють за заданою точністю методу і наявною вимірювальною апаратурою оцінювати ефективність вибраної моделі.

З іншого боку, відомо [21], що число обумовленості матриці в евклідовій формі виражається через відношення максимального і мінімального модуля її власних чисел, тобто

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = (\max |\lambda_i|) / (\min |\lambda_i|). \quad (2.26)$$

Як видно з (2.26), з ростом розмірності матриці ймовірний ріст і числа обумовленості, і, відповідно, похибки розв'язку.

Прийнято вважати, що якщо число обумовленості є малим, то лінійний оператор  $\mathbf{A}$  добре обумовлений. Якщо ж число обумовленості є великим, то лінійний оператор  $\mathbf{A}$  погано обумовлений. Отже, чим менше  $\text{cond}(\mathbf{A})$ , тим меншими будуть похибки розв'язку відносно похибок в умові. Враховуючи, що  $\text{cond}(\mathbf{A}) \geq 1$ , то найкращим числом обумовленості є 1. Щоправда, такий випадок зустрічається лише для ортогональних та напівортогональних матриць, які при відображенні не змінюють довжину векторів. Дійсно,  $\|\mathbf{A}\mathbf{X}\|^2 = (\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|^2$  і для таких матриць  $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^+\| = 1$ , тому справедлива рівність  $\|\Delta\mathbf{X}\| = \|\Delta\mathbf{Y}\|$ .

Слід зазначити, що безпосередньо з нерівності (2.24) неможливо точно визначити максимально можливу відстань між наближеним і точним розв'язками (абсолютну похибку розв'язку), оскільки точні значення  $\mathbf{X}$  і  $\mathbf{Y}$  апіорі невідомі. Отже, практична цінність цього співвідношення досить мала. Більш змістовні результати можна отримати при обчисленні оцінок абсолютної

похибки розв'язку. При цьому зручно ввести коефіцієнт найбільшого підсилення абсолютної похибки

$$q = \Delta \mathbf{X} / \Delta \mathbf{Y}. \quad (2.27)$$

З цих позицій природно вважати, що якщо  $q > 1$ , то система рівнянь сильно чутлива до похибок (погано обумовлена). Тому в роботі надалі буде йти мова про погану обумовленість, виходячи з двох позицій, в залежності від того, про які похибки йдеться – абсолютні чи відносні.

В роботах [11, 231] розглянуті причини нестійкості розв'язків лінійних дискретних ОЗ і одержано низку важливих результатів, де підкреслено, що число обумовленості  $cond(\mathbf{A})$  не є достатнім індикатором збільшення абсолютної похибки розв'язку, а отже, і його нестійкості.

Найбільше інформації про обумовленість матриці  $\mathbf{A}$  дає аналіз її сингулярних чисел  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$ . Одержані результати, запозичені у [11], настільки важливі при практичному розв'язанні лінійних ОЗ, що потребують приведення тут.

Довільні матриці можна поділити відносно спектру сингулярних чисел  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  на три типи:

- а)  $\sigma_i > 1$ ,  $\sigma_i = 1$  - матриці добре обумовлені;
- б)  $0 < \sigma_{\min} < 1 < \sigma_{\max}$  – матриці погано обумовлені (хоча  $\Delta \mathbf{X} \geq \Delta \mathbf{Y}$  виконується не завжди);
- в)  $0 < \sigma_i < 1$  - матриці завідомо погано обумовлені (завжди  $\Delta \mathbf{X} \geq \Delta \mathbf{Y}$ ).

Напрямок вектора  $\Delta \mathbf{Y}$  є непередбачуваним і, в загальному випадку, цей вектор розкладається як

$$\Delta \mathbf{Y} = \Delta \mathbf{Y}_r + \Delta \mathbf{Y}_0,$$

де  $\Delta \mathbf{Y}_r \in \mathbf{R}(\mathbf{A})$  – проекція вектора  $\Delta \mathbf{Y}$  на ранговий простір  $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ ,  $\Delta \mathbf{Y}_0 \in \mathbf{N}(\mathbf{A}^T)$  – проекція вектора  $\Delta \mathbf{Y}$  на нуль-простір  $\mathbf{N}(\mathbf{A}^T)$ .



Радіусом довірчої області (максимальне відхилення збуреного розв'язку  $\Delta\mathbf{X}$  від істинного  $\mathbf{X}$  є величина

$$r = \|\Delta\mathbf{X}\|_{\max} \leq \frac{1}{\sigma_{\min}} \|\Delta\mathbf{Y}_r\|,$$

де  $\sigma_{\min} > 0$  – найменше сингулярне число у сингулярному розкладанні матриці  $\mathbf{A}$ ;  $\|\Delta\mathbf{Y}_r\|$  – довжина проекції  $\Delta\mathbf{Y}$  на ранговий простір  $\mathbf{R}(\mathbf{A})$  матриці  $\mathbf{A}$  (при  $m = n$  маємо  $\|\Delta\mathbf{Y}_r\| = \|\Delta\mathbf{Y}\|$ ).

В цьому випадку індикатором «поганої обумовленості» є  $0 < \sigma_{\min} < 1$ , причому число обумовленості другого типу пов'язане із сингулярними числами виразом

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min},$$

де  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  – відповідно найбільше і найменше сингулярне число матриці  $\mathbf{A}$ .

Величину  $\Delta\mathbf{Y}$  можна оцінити достатньо точно з умов проведення експерименту, а  $\|\Delta\mathbf{Y}_0\| = \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{Y}\|$  є значенням оптимальної нев'язки у (2.20), де  $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^+\mathbf{Y}$  – нормальний псевдорозв'язок за (2.20). Оскільки  $\Delta\mathbf{Y}_r \perp \Delta\mathbf{Y}_0$ , то  $\|\Delta\mathbf{Y}_r\| = \sqrt{\|\Delta\mathbf{Y}\|^2 - \|\Delta\mathbf{Y}_0\|^2}$ .

Отже, радіус довірчої області можна визначити як

$$r = \|\Delta\mathbf{x}\|_{\max} = \frac{1}{\sigma_{\min}} \sqrt{\|\Delta\mathbf{Y}\|^2 - \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{Y}\|^2}. \quad (2.28)$$

Оскільки норма  $\|\Delta\mathbf{Y}\|$  може бути оцінена із матеріалів експериментів достатньо точно, за формулою (2.28) можна визначити абсолютну похибку розв'язку.

З (2.24) видно, що величина похибки результату може набувати різних значень в широкому діапазоні. Природно постає питання визначення умов, за яких похибка найменша (найбільша). Необхідно відзначити, що величина  $\|\Delta\mathbf{X}\|$  залежить не тільки від величини  $\|\Delta\mathbf{Y}\|$ , але і від напрямку вектора  $\Delta\mathbf{Y}$ . Для кращої наочності звернемося до конкретного прикладу.

*Приклад.* Розглянемо рівняння (2.18), яке описує прогини невагомго ротора у місцях посадки  $n$  дисків. Воно легко приводиться до вигляду (2.19) за допомогою перетворення  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\omega^2(1 - \mathbf{A}\omega^2)^{-1}$ ,  $\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{e}$ . Для зручності та одноманітності у викладках надалі будемо розглядати лише рівняння (2.19). Нехай у результаті вимірювань статичних коефіцієнтів впливу і мас дисків було одержано погано обумовлену матрицю і розв'язок СЛАР для різних векторів  $\mathbf{Y}_i$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \det(\mathbf{A}) = 2, \text{cond}(\mathbf{A}) = 87. \quad (2.29)$$

Нехай  $\mathbf{Y} = [7; 3]^T$  – точне значення правої частини СЛАР, тоді точним розв'язком системи є  $\mathbf{X} = [0; 1]^T$ . Якщо коефіцієнти містять похибки вимірювань, наприклад  $\mathbf{Y}_1 = [7,20; 3,08]^T$  і довжина вектора похибок вимірів  $\|\Delta\mathbf{Y}_1\| = 0,22$ , то збуреним розв'язком буде  $\mathbf{X} = [0,02; 1,00]^T$ . Це непоганий результат, адже незважаючи на велике  $\text{cond}(\mathbf{A})$ ,  $\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} = 0,02 < \frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|} = 0,03$ .

Нехай тепер при більш ретельних вимірах одержані коефіцієнти  $\mathbf{Y}_2 = [6,97; 3,05]^T$ , тобто довжина вектора похибок вимірювань зменшилась до  $\|\Delta\mathbf{Y}_2\| = 0,06$ . Тоді  $\mathbf{X}_2 = [-0,22; 1,31]^T$ . Цей результат не можна вважати задовільним, оскільки похибка розв'язку досягла свого найбільшого значення  $\|\Delta\mathbf{X}_2\| = 0,39 = \frac{1}{\sigma_{\min}} \|\Delta\mathbf{Y}_2\|$ , а відносна похибка  $\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} = 0,39 \gg \frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|} = 0,01$ .

В цьому прикладі виконується нерівність  $\|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_2\| \leq \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_1\|$ , хоча  $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_2\| \geq \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\|$ , тобто менші похибки у вихідних даних викликають більші збурення у розв'язку, ніж більші похибки. Цей парадоксальний ефект пов'язаний із тим, що напрям  $\Delta\mathbf{Y}_1$  – найбільш сприятливий і співпадає з напрямом першого власного вектора матриці  $\mathbf{A}$ , а напрям  $\Delta\mathbf{Y}_2$  – найбільш несприятливий і співпадає з напрямом другого власного вектора (рис. 2.4).

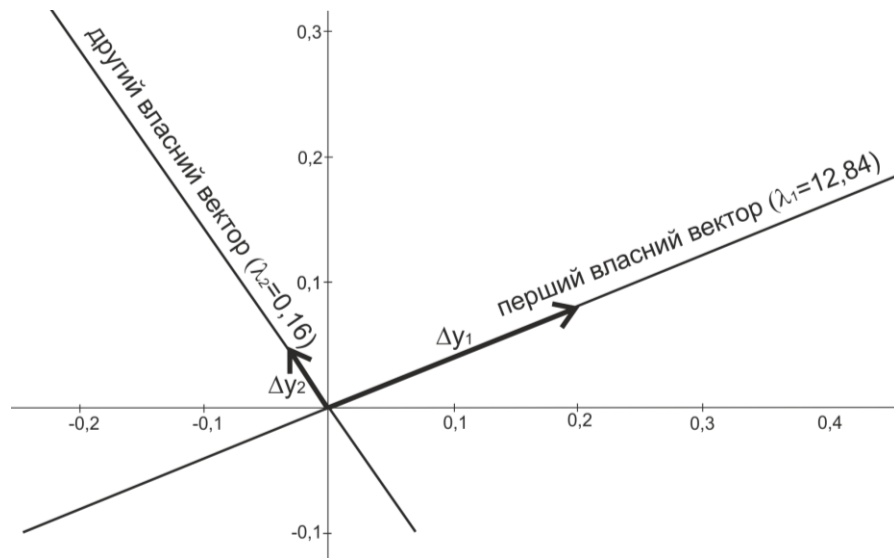


Рис. 2.4. Вектори похибок  $\Delta Y_i$ ,  $i=1,2$  і напрями власних векторів матриці  $A$

Змінюючи орієнтацію вектора  $\Delta Y_2$  довжиною  $\|\Delta Y_2\|=0,06$ , і підраховуючи  $X$ , отримуємо область допустимих оцінок (ОДО) у вигляді сильно видовженого еліпса (рис. 2.5), довжини півосей якого пропорційні значенням сингулярних чисел матриці  $A$  ( $\sigma_1=13,19$ ,  $\sigma_2=0,15$ ). ОДО симетрично відносно точного розв'язку  $X=[0, 1]^T$ . При сильній анізотропії ОДО ті області, які знаходяться далеко від точного розв'язку  $X$ , забезпечують, проте, достатньо прийнятні відхилення від даних спостережень.

Такі ж результати можна отримати при пошуку об'єднаної множини розв'язків (множини слабких розв'язків) інтервальної системи лінійних рівнянь, складеної на основі (2.29) з нижньою і верхньою гранню відповідно  $\underline{Y}=[6,97; 2,95]^T$ ,  $\bar{Y}=[7,03; 3,05]^T$  (рис. 2.6).

На сьогодні відомий, без перебільшення, величезний набір методів (алгоритмів регуляризації) розв'язання некоректних задач, зокрема СЛАР (2.19) (див., наприклад, [153, 175, 234, 294, 306]). Найбільш відомим і таким, що найчастіше використовується у інженерних розрахунках, є метод регуляризації А. Н. Тихонова. Він дає змогу знайти наближене значення нормального псевдорозв'язку СЛАР (2.21).

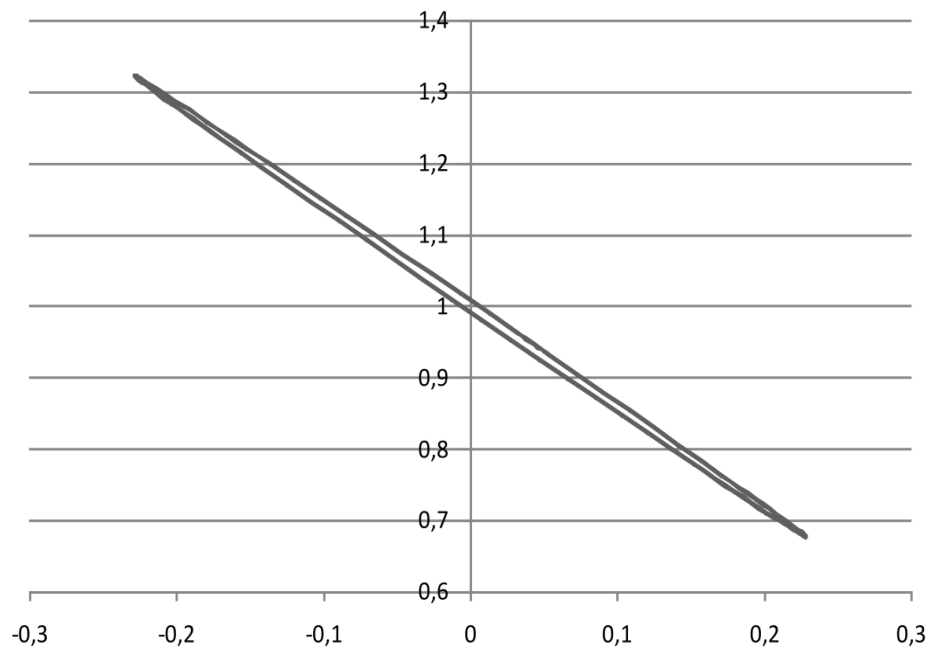


Рис. 2.5. Схематичне зображення ОДО для СЛАР із матрицею (2.29), точним значенням правої частини  $\mathbf{Y}$  і похибкою  $\|\Delta\mathbf{Y}_2\| = 0,06$

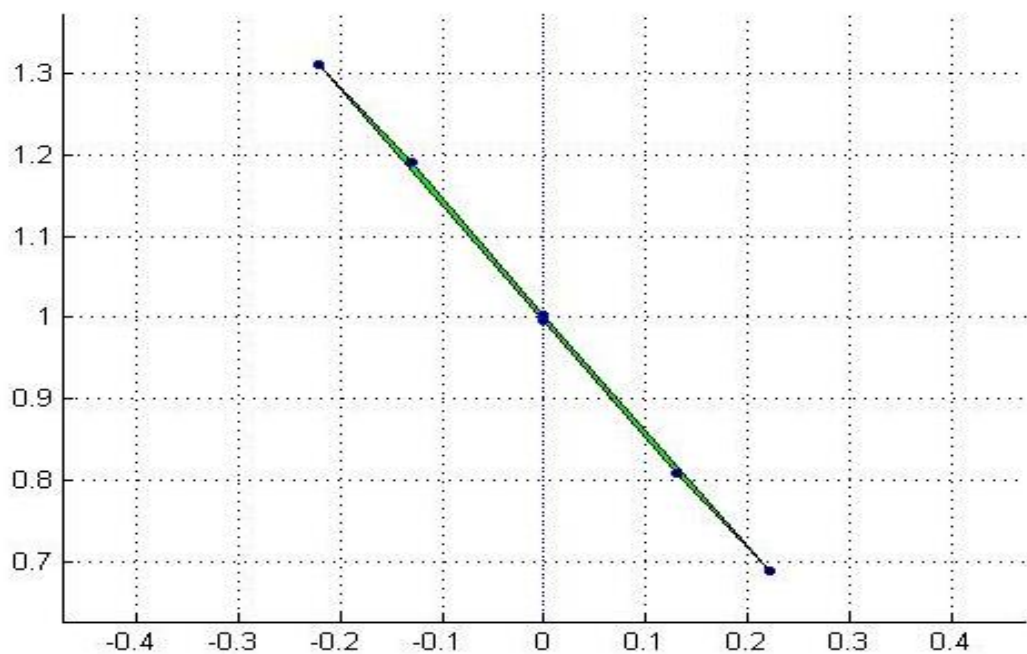


Рис. 2.6. Схематичне зображення ОДО для інтервальної СЛАР із матрицею (2.29)

В якості наближеного розв'язку береться розв'язок регуляризованої нормальної системи

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda_\delta\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{A}^T\mathbf{Y}, \quad (2.30)$$

де  $\lambda_\delta > 0$  – деякий спеціально вибраний параметр регуляризації;

$\mathbf{E}$  – одинична матриця порядку  $m$ .

Тут  $\lambda_\delta = \lambda(\delta, \mathbf{Y})$ , де оцінка точності  $\delta > 0$  передбачається відомою і такою, що  $\|\Delta \mathbf{Y}\| \leq \delta$ . Задача із некоректної стає умовно-коректною за Тихоновим.

Відомо, що параметр регуляризації необхідно підібрати деяким оптимальним чином. На рис. 2.7 і 2.8 представлені результати чисельного моделювання розв'язків (2.30), для чого компоненти вектора  $\mathbf{Y}$  «зашумлювали» Гаусовським шумом з нульовим математичним сподіванням, що еквівалентно  $\mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}$ . При цьому при  $\lambda_\delta \rightarrow 0$  розв'язок системи (2.30) прямує до нормального псевдорозв'язку (2.20), тобто задача залишається нестійкою, а при зростанні  $\lambda_\delta$  задача стає стійкою, але розв'язок – далеким від істинного.

Отже, загальний принцип регуляризації полягає в тому, щоб замість нестійкої СЛАР (2.19) розв'язати (2.30) і отримати наперед зміщений розв'язок такий, що є точнішим за нормальний псевдорозв'язок. Отже, за стійкість приходится «платити» деяким зміщенням розв'язку.

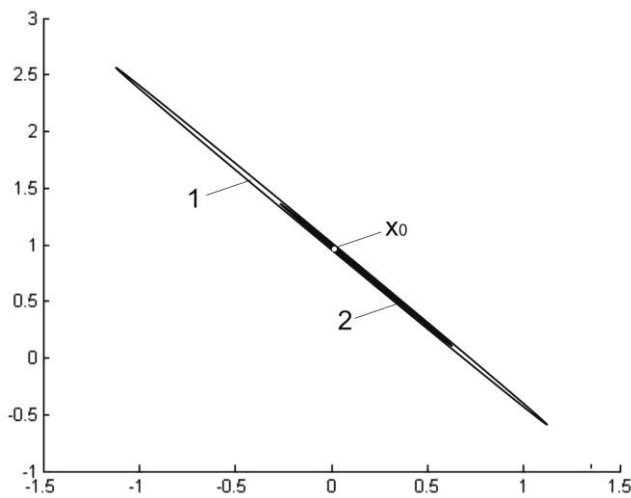


Рис. 2.7. Розв'язки СЛАР:

1 – ОДО, утворена нормальними псевдорозв'язками;

2 – область, утворена регуляризованими розв'язками (2.13) при  $\lambda_\delta = 0,1$

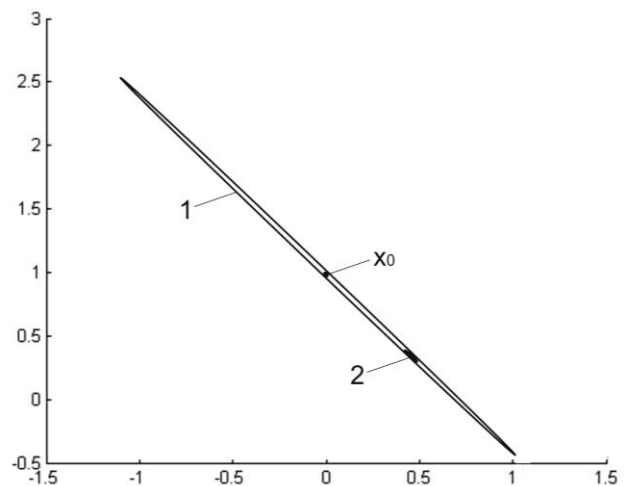


Рис. 2.8. Розв'язки СЛАР:

1 – ОДО, утворена нормальними псевдорозв'язками;

2 – область, утворена регуляризованими розв'язками (2.13) при  $\lambda_\delta = 1$

На рис. 2.9 представлена залежність відносної похибки регуляризованих розв'язків (2.30) від значення параметра регуляризації  $\lambda_\delta$ .

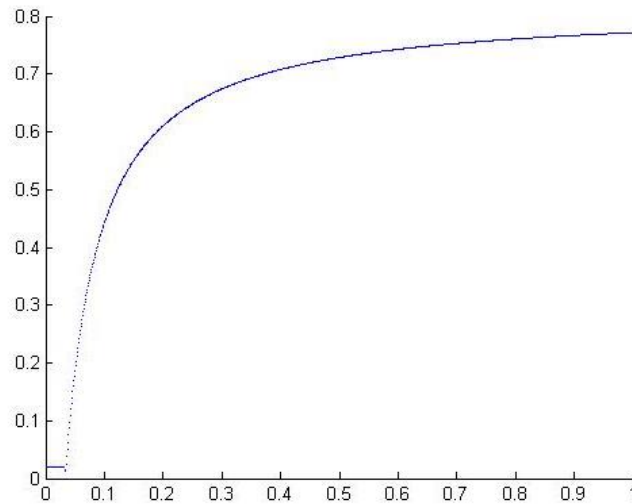


Рис. 2.9. Залежність відносної похибки регуляризованого розв'язку (2.30) від  $\lambda_\delta$

З літератури [22, 118] відомо, що без залучення додаткової інформації про шуканий розв'язок або про точні дані ОЗ метод регуляризації не може забезпечити точність наближеного розв'язку краще за  $O(\delta^{2/3})$  на класі всіх задач типу (2.30). Простіше кажучи,  $\|\Delta\mathbf{X}\| \geq \text{const} \cdot \|\Delta\mathbf{Y}\|^{2/3}$  при довільних  $\lambda_\delta$ .

Параметр регуляризації  $\lambda_\delta$  підбирається так, щоб нев'язка розв'язку в просторі зображень  $\mathbb{R}^n$  узгоджувалась з похибками експериментальних даних. На сьогодні існують два основних погляди на вибір параметра регуляризації. Перший базується на підборі норми нев'язки  $\|\mathbf{AX} - \mathbf{Y}\|$ , що дорівнює апріорній оцінці похибок задання вхідних даних (в загальному матриці  $\mathbf{A}$  і вектора  $\mathbf{Y}$ , тобто  $\|\Delta\mathbf{A}\| + \|\Delta\mathbf{Y}\|$ ). Маючи ці дані, можна вибрати норму нев'язки  $i$ , відповідно, параметр  $\lambda_\delta$  і розв'язок  $\mathbf{X}(\lambda_\delta)$ .

Другим варіантом вибору  $\lambda_\delta$ , що не ставить умови знання ніяких апріорних міркувань щодо похибки моделі, є так званий квазіоптимальний

метод, згідно якого  $\lambda_\delta$  є глобальним мінімумом нев'язки системи рівнянь  $\Delta(\lambda_\delta) = \|\mathbf{AX}(\lambda_\delta) - \mathbf{Y}\|$ .

Слід зауважити, що насправді, ситуація із оцінкою точності розв'язків СЛАР гірша, ніж представляється у співвідношенні (2.25). Наприклад, у роботах [192, 193] оцінка похибок за числом обумовленості піддається критиці як недостатньо надійна. Зокрема вказується, що основним недоліком оцінки похибки за числом обумовленості є те, що оцінюється лише осереднена норма вектора розв'язків  $\mathbf{X}$  досліджуваної СЛАР, а похибка конкретного розв'язку  $x_j$  залишається невідомою. Наприклад, для евклідової норми маємо  $\|\Delta\mathbf{X}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ , і оцінці підлягає відносна похибка  $\|\Delta\mathbf{X}\|/\|\mathbf{X}\|$ . При цьому може зустрітися випадок, коли при задовільній нормі похибки розв'язку  $(\|\Delta\mathbf{X}\|/\|\mathbf{X}\|)_{\max}$  окремо взятий розв'язок  $x_j$  може мати неприйнятно великі похибки  $\Delta x_j/x_j$ , які значно перевищують похибки норми вектора розв'язків  $\mathbf{X}$ . Тому оцінка норми похибки розв'язку за числом обумовленості не є достатньою [68, 72]. Покажемо це докладніше.

**Теорема.** Якщо  $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$  – деяка оцінка вектора  $\mathbf{X}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , то максимальна відносна похибка оцінки елементу  $(\Delta x_j/x_j)_{\max}$ ,  $j = \overline{1, n}$  може перевищувати похибку оцінки для вектору  $(\|\Delta\mathbf{X}\|/\|\mathbf{X}\|)_{\max}$ , тобто завжди знайдуться такі вектори  $\mathbf{X}$  і  $\Delta\mathbf{X}$ , для яких справедлива нерівність

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \frac{|\Delta x_j|}{|x_j|}, \quad j = \overline{1, n}, x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.31)$$

Доведення.

Перепишемо нерівність (2.31) у вигляді

$$\frac{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \leq \frac{|\Delta x_j|}{|x_j|}, \quad j = \overline{1, n}, x \in \mathbb{R}^n,$$

і після піднесення останньої нерівності до квадрату отримаємо

$$\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq \frac{\Delta x_j^2}{x_j^2}. \quad (2.32)$$

Додамо між собою  $n$  нерівностей типу (2.32) для всіх  $j = \overline{1, n}$

$$n \left( \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right) \leq \frac{\Delta x_1^2}{x_1^2} + \frac{\Delta x_2^2}{x_2^2} + \dots + \frac{\Delta x_n^2}{x_n^2}. \quad (2.33)$$

Легко побачити, що нерівність (2.33) перетворюється у рівність при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Нехай  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \Delta x$ . Тоді справедливою є нерівність

$$\frac{n\Delta x^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq \Delta x^2 \left( \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} \right).$$

Після нескладних перетворень, отримуємо нерівність

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}. \quad (2.34)$$

Оскільки в лівій частині нерівності (2.34) знаходиться середнє гармонічне, а в правій – середнє арифметичне, то згідно з відомою нерівністю про середні арифметичне, геометричне і гармонічне, нерівність (2.34) виконується завжди для невід'ємних дійсних елементів вектора  $x_j \geq 0$ .

Отже, для надійного оцінювання похибок окремих елементів вектора  $\mathbf{X}$  оцінка (2.25) є недостатньою, і необхідно застосовувати інші методи оцінювання. Одним із таких методів є наступний.

Нехай маємо вектор невідомих  $\mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}$ , де  $\Delta \mathbf{Y} = [\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n]^T$ . Для обчислення  $x_i$  використаємо формулу Крамера



$$x_i = D_j / D,$$

де  $D$  – визначник матриці  $\mathbf{A}$ ;

$D_j$  – визначник матриці  $\mathbf{A}$ , у якої  $j$ -й стовпець замінюється на вектор невідомих  $\mathbf{Y}$ .

Розкладемо визначник  $D_j$  за елементами  $j$ -го стовпця. Отримаємо

$$x_j = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} y_i M_{ij} \right) / D,$$

де  $M_{ij}$  – відповідні мінори матриці  $\mathbf{A}$ .

$$\text{Маємо } x_j = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} y_i M_{ij} \right) / D + \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta y_i M_{ij} \right) / D = x_j + \Delta x_j,$$

де  $x_j$  – значення  $x_j$ , що відповідає  $\Delta y_i = 0$  і обчислюється при номінальних значеннях  $y_i$ ;

$\Delta x_j$  – приріст  $x_j$ , що відбувся внаслідок варіацій  $y_i$ .

Звідси слідує, що абсолютну похибку  $j$ -го розв'язку можна знайти як

$$\Delta x_j = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta y_i M_{ij} \right) / D, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.35)$$

З цієї формули видно, що максимальною похибка розв'язку  $x_j$  буде тоді, коли знаки  $\Delta y_i$  і  $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$  будуть співпадати. Якщо елементи вектора  $\Delta \mathbf{Y}$  розподілені нормально з нульовим математичним сподіванням  $y_i \sim N(0, \sigma^2)$ , то найбільша похибка розв'язку дорівнює

$$(\Delta x_j)_{\max} = \left( \sum_{i=1}^n |\Delta y_i M_{ij}| \right) / D. \quad (2.36)$$

У випадку, коли елементи матриці  $\mathbf{A}$  теж містять похибки, похибки розв'язку ще збільшаться. Але надалі для простоти обмежимося припущенням, що елементи матриці  $\mathbf{A}$  задані без похибок.

Формула (2.36) дає можливість оцінити максимальну можливу похибку з більшою надійністю, ніж це прийнято оцінювати за числом обумовленості для векторів похибок. Для чисельної оцінки використаємо формулу (2.28). Припускаючи, що у разі оцінки (2.28) максимальна похибка окремого розв'язку  $x_j$  оцінюється так, як і всього вектора  $\mathbf{X}$ , розділимо (2.36) на (2.28) і знайдемо коефіцієнт  $k$ , який показує, в скільки разів підвищилась надійність оцінки

$$k = \frac{\sigma_{\min}}{D \|\Delta \mathbf{Y}\|} \left( \sum_{i=1}^n |\Delta y_i M_{ij}| \right).$$

Інколи зручніше описувати неточність коефіцієнтів СЛАР не абсолютними похибками, а методами теорії імовірностей і математичної статистики. Тоді наближено можна вважати, що  $\Delta y_i \sim N(0, \sigma_{yi}^2)$  – випадкові величини з нульовим математичним сподіванням і дисперсією  $\sigma_{yi}^2$ . Припускаючи, що всі  $\Delta y_i$  некорельовані між собою, з врахуванням формули (2.35) можна визначити випадкову похибку  $i$ -го розв'язку  $\Delta x_j \sim N(0, \sigma_{xj}^2)$  як випадкову величину з нульовим математичним сподіванням і дисперсією

$$\sigma_{xj}^2 = \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \sigma_{yi}^2 M_{ij} \right) / D.$$

Приклад програми у вигляді скрипта мовою MATLAB, що реалізує алгоритм досягнення необхідної точності розв'язку дискретної лінійної ОЗ, представлений у Додатку А.1.

2.2.2. Покращення обумовленості матриць масштабуванням коефіцієнтів. Під час розв'язання погано обумовлених дискретних лінійних ОЗ інженеру-досліднику зручно, не вдаючись до особливостей задачі, мати дієві засоби покращення точності і надійності отриманих розв'язків за рахунок зменшення числа обумовленості відповідних матриць. Один із шляхів розв'язання цієї проблеми представлений нижче.

В реальних ОЗ, що виникають на практиці, значення коефіцієнтів  $a_{ij}$ ,  $i=1,2,\dots,m$ ,  $j=1,2,\dots,n$  матриці  $\mathbf{A}$  часто можуть значно відрізнятись. Різниця може складати декілька порядків і більше. В цьому разі внаслідок значної різниці у нормах рядків і стовпців матриця  $\mathbf{A}$  перестає бути збалансованою, що призводить до погіршення її обумовленості. Така обумовленість не пов'язана з близькістю матриці до виродженої, і її можна покращити нормуванням рядків і стовпців матриці. Одним зі шляхів вирішення цієї проблеми є масштабування шуканих величин таким оптимальним шляхом, щоб коефіцієнти  $a_{ij}$  у рядках і стовпцях мали один порядок. Наприклад, матрицю  $\mathbf{A}$  можна подати у вигляді матриці з експоненціальними коефіцієнтами, а відповідну СЛАР у вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot 10^{p_1} & a_{12} \cdot 10^{p_2} & \dots & a_{1n} \cdot 10^{p_n} \\ a_{21} \cdot 10^{p_1} & a_{22} \cdot 10^{p_2} & \dots & a_{2n} \cdot 10^{p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \cdot 10^{p_1} & a_{n2} \cdot 10^{p_2} & \dots & a_{nn} \cdot 10^{p_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix},$$

де  $a_{ij}$  – мантиси відповідних коефіцієнтів,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – порядок числа,  $p \in \mathbf{Z}$ .

Якщо  $p_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  значно відрізняються один від одного, матриця буде мати погану обумовленість. Перехід до нових змінних  $\mathbf{X} = [x_1 \cdot 10^{p_1}, x_2 \cdot 10^{p_2}, \dots, x_n \cdot 10^{p_n}]^T$  перетворює матрицю  $\mathbf{A}$  на нормовану, при цьому її обумовленість значно покращується.

Крім того, можна показати, що залежність числа обумовленості від еквівалентних перетворень рівнянь СЛАР є удаваною, тобто дійсна обумовленість матриць  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{A}'$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ і } \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & \dots & k_1 a_{1n} \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} & \dots & k_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n a_{n1} & k_n a_{n2} & \dots & k_n a_{nn} \end{bmatrix}, \quad k_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}$$

однакова, хоча числа обумовленості цих матриць і різні

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \neq \text{cond}(\mathbf{A}') = \|\mathbf{A}'\| \cdot \|(\mathbf{A}')^{-1}\|.$$

Нехтування цим фактом призводить до занадто грубих оцінок похибок розв'язку, особливо якщо це стосується повторень проведення дорогих експериментів для накопичення додаткової інформації щодо об'єкту, як пропонується у роботі [72].

Проте доречним є вибір такого вектора коефіцієнтів  $\mathbf{K} = [k_i]_{1 \times n}$ , при якому матриця еквівалентної СЛАР  $\mathbf{A}'$  з рядками  $\mathbf{A}'(j,:) = \mathbf{A}(j,:)k_j, j = \overline{1, n}$ , мала б найменше з можливих число обумовленості  $\text{cond}(\mathbf{A}')$ . Це забезпечило б найкращу оцінку і таку, що найбільш близька до дійсної похибки розв'язку. В цьому разі замість (2.19) розв'язанню підлягає система  $\mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{Y} \times \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ .

Отже, пропонується знайти такий оптимальний вектор  $\mathbf{K}$ , при якому досягається  $\min_{\mathbf{K}} \text{cond}(\mathbf{A}')$ . Це можна зробити, наприклад, одержавши аналітичну залежність числа обумовленості СЛАР від  $\mathbf{K}$  і знайшовши мінімум функції  $\text{cond}(\mathbf{A}')$ , продиференціювавши її та прирівнявши до 0. Однак при  $n > 2$  такий шлях на практиці дуже проблематичний.

Іншим, набагато зручнішим для комп'ютерної реалізації способом є приведення цієї задачі до задачі векторної оптимізації. Позначимо скалярну функцію  $f(\mathbf{K}) = \text{cond}(\mathbf{A}')$ . Ставиться задача пошуку такого вектора  $\mathbf{K}$ , який оптимізує векторну функцію  $\min_{\mathbf{K}} \{f_1(\mathbf{K}), f_2(\mathbf{K}), \dots, f_k(\mathbf{K})\}, k \geq 2$ , елементи якої відповідають цільовим функціям  $f(\mathbf{K}) = \text{cond}(\mathbf{A}')$ .

Цю задачу можна розв'язати, наприклад, в комп'ютерному середовищі MATLAB, використовуючи функцію *fminunc*. Функція здійснює пошук мінімуму скалярної функції декількох змінних, стартуючи з деякої початкової точки. В загальному випадку виконує нелінійну оптимізацію без обмежень, використовуючи метод градієнтів і квазіньютонівський метод [288].

2.2.3. Статистична постановка обернених задач. Загалом, при побудові наближених розв'язків і при оцінці їх похибок, в залежності від характеру вихідної інформації, можливий як детермінований підхід, так і ймовірнісний. Враховуючи те, що експериментальні дані завжди випадкові, найбільш природною видається постановка ОЗ в рамках теорії статистичної оцінки невідомих параметрів. На відміну від самих числових характеристик, оцінки є випадковими, причому їх значення залежать від обсягу експериментальних даних, а закони розподілу імовірностей – від законів розподілу імовірностей самих випадкових чисел або значень вимірювальних величин.

Саме стохастичність формування даних є причиною нестійкості розв'язків. Суть нестійкості, яка є фундаментальною проблемою розв'язання ОЗ, полягає в тому, що в межах природних відхилень величин (похибок вимірювань, флуктуацій шуму і тощо) з даними спостереження приблизно в однаковій мірі узгоджується множина можливих оцінок вихідного об'єкта, включаючи і ті, які від нього суттєво відрізняються [231].

З позицій математичної і прикладної статистики, розв'язання ОЗ полягає у пошуку такої оцінки об'єкта, яка розглядається як сукупність невідомих параметрів, на основі експериментальних даних, а також апріорних відомостей відносно об'єкта і моделі формування відображення [109, 232, 238]. Оскільки реалізація відображення  $Y$  у (2.19) випадкова, оцінка об'єкта  $X(Y)$  теж є випадковою, і загалом, багатомірною величиною [127].

Здійснений вище аналіз показує, що оскільки знайти «точний» розв'язок ОЗ для систем, які описуються погано обумовленими СЛАР, неможливо в принципі, мова може йти лише про наближений розв'язок. Для підвищення точності такого розв'язку необхідно звужувати ОДО.

Всі відомі, проаналізовані у розділі 1 методи розв'язання погано обумовлених СЛАР по суті направлені на підвищення стійкості розв'язків дією на матрицю  $A$  з метою зниження її числа обумовленості. Враховуючи ж статистичний характер вимірювальних вихідних характеристик, можна застосувати новий підхід до підвищення точності розв'язків погано обумовлених СЛАР, суть якого у наступному.

Оцінки (2.25) і (2.28) дають лише максимально можливу похибку, яка не дає змоги судити про те, на скільки далеко чи близько конкретний розв'язок від істинного. Отриманий розрахунком результат залежить, зокрема, від тієї конкретної і невідомої похибки, яка має місце у момент вимірювань. В інший момент часу похибка вимірювання одного і того ж параметра в колишніх умовах, що здійснюється тим самим приладом, може виявитись іншою, і іншим буде результат обчислень. Але значення похибок вимірювальних величин обмежені зверху класом точності приладу, тобто можуть розглядатись як випадкові величини з математичним сподіванням, що дорівнює їх істинним значенням, і середнім квадратичним відхиленням, що дорівнює третій частині точності вимірювального приладу. Тому первинні фактори, отримані в результаті розв'язання системи (2.19) за багатократно повторюваними в однакових умовах вимірюванням елементів вектора  $\mathbf{Y}$  і матриці  $\mathbf{A}$ , можуть набувати довільних значень всередині обмеженого інтервалу, величина якого визначається оцінками (2.25) і (2.28), тобто розглядатись як випадкові величини, які підпорядковуються певним законам розподілу. З ОДО очевидно, що якщо для кожного із шуканих первинних факторів, які розглядаються як випадкові величини, знайти математичні сподівання, то вони і будуть найближчими до істинних результатів.

Оскільки у випадку  $m = n$  задача нестійка, пропонується збільшувати інформацію про об'єкт за рахунок збільшення кількості рівнянь  $n \gg m$ , отримуючи при цьому перевизначену СЛАР. На практиці це означає збільшення кількості вимірювань.

Тут слід зауважити, що незважаючи на надлишковість експериментальних даних, задача залишається нестійкою доти, поки нахил кожної із прямих, описаних рядками матриці  $\mathbf{A}$  у  $\mathbb{R}^n$ , буде мало відрізнятися від більшості інших прямих. В цьому випадку додавання нової прямої майже не збільшує інформацію про розв'язок. Стійкість задачі помітно покращиться, якщо вдасться знайти співвідношення, «перпендикулярне» більшості існуючих.

Розглянемо перевизначену СЛАР. В строгому сенсі, отримана система рівнянь є несумісною, оскільки, вибравши з неї різні сукупності по  $m$  рівнянь кожна, ми отримаємо різні результати при розв'язанні підсистем.

Отже, необхідно знайти розв'язок у вигляді єдиного об'єкту  $\hat{\mathbf{X}}$ , при підстановці якого замість  $\mathbf{X}$  у праву частину (2.19) досягається найточніше представлення всієї сукупності експериментальних даних. Для цього використаємо найпоширеніший спосіб одержання оцінок оригіналу – метод максимальної вірогідності (ММВ). Хоча оцінка ММВ є нестійкою, її ОДО є вужчою, ніж ОДО нормального розв'язку, а отже похибки розв'язку менші. Більш того, оцінку ММВ можна наближати до істинного значення, збільшуючи кількість реалізацій.

Для (2.19) ММВ вимагає, щоб нев'язка  $\|\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\|^2$  була мінімальною. Отже, для випадку нормального розподілу похибок максимально вірогідною є оцінка за МНК. МНК належить до умовно-регулярних стохастичних методів розв'язку ОЗ, оскільки даний метод звужує множину можливих розв'язків до класу коректності, а саме до компакту [166].

Як відомо [231], для нормального закону розподілу похибок, оцінка МНК (ОНК) є спроможною, незміщеною і ефективною оцінкою. Спроможність забезпечується тим фактом, що імовірність події прямує до одиниці  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\| < \varepsilon) = 1$ . Незміщеність (асимптотична) випливає з факту  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\hat{\mathbf{X}})_n = \mathbf{X}$ . Більш того, МНК можна застосовувати навіть тоді, коли похибки вимірювань не підпорядковуються нормальному закону. Щоправда, в таких випадках одержуються квазівірогідні оцінки, які можуть стати вірогідними при застосуванні так званих «вагових характеристик». Для перевизначеної СЛАУ (2.19) ОНК є деяким оптимальним розв'язком і знаходиться за формулою (2.20).

На рис. 2.10 приведені результати чисельного експерименту – моделювання результаті вимірювань при  $n=1000$  і 5% розкидом значень компонент  $\mathbf{Y}$ . Рисунок наочно демонструє нестійкість ОНК, яка знаходиться дещо в стороні від істинного значення  $\mathbf{X}$ , тобто є наближеним розв'язком. Відзначимо, що з ростом  $n$   $\hat{\mathbf{X}}$  наближається до  $\mathbf{X} = [0; 1]^T$ , що підтверджує регулярність розв'язків, одержаних як ОНК при великих  $n$  (рис. 2.10, 2.11).

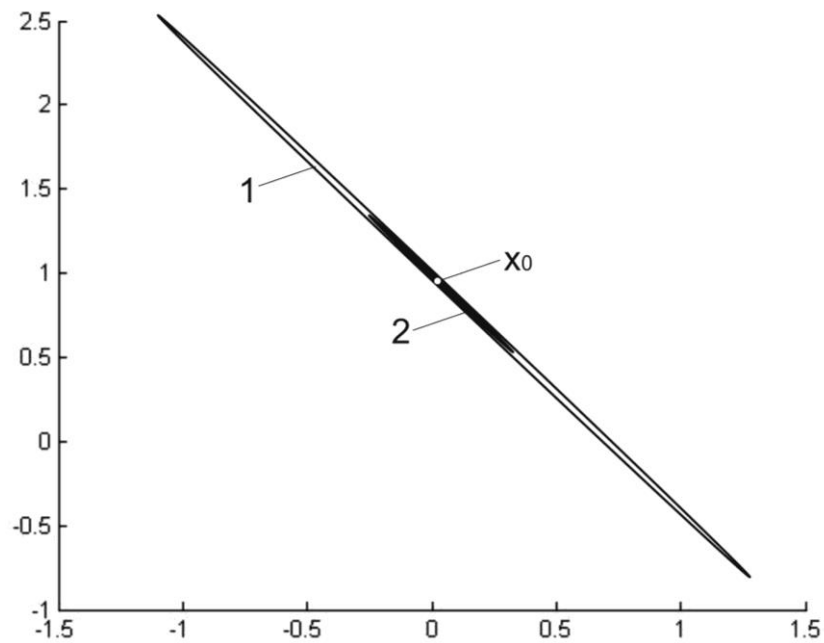


Рис. 2.10. Розв'язки СЛАР з матрицею (2.29):

1 – область допустимих значень, утворена нормальними псевдорозв'язками;

2 – область допустимих значень, утворена за МНК

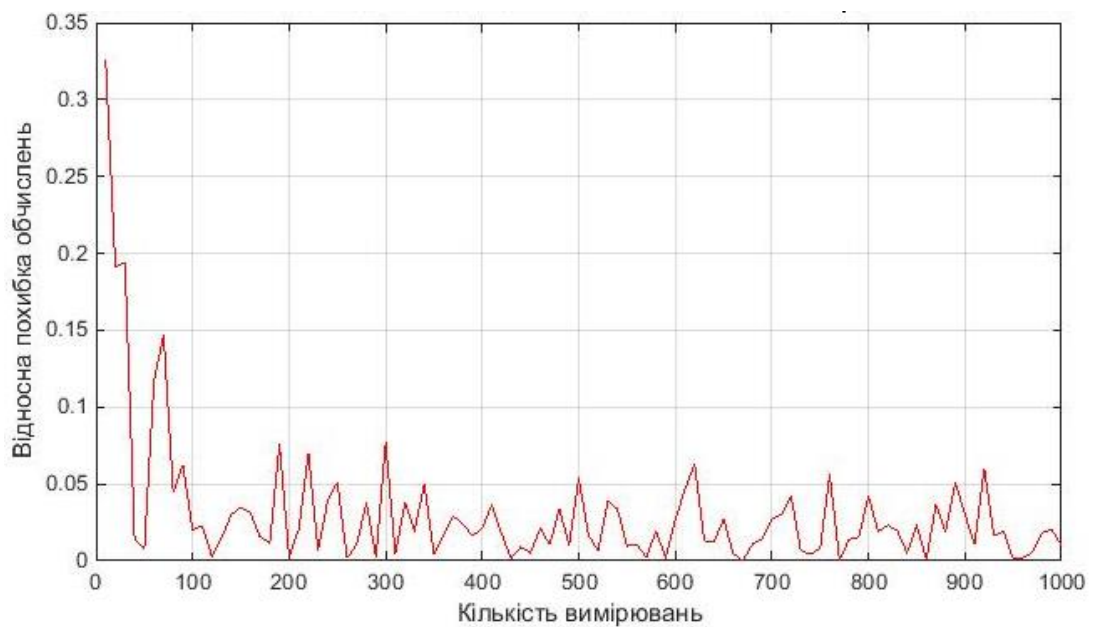


Рис. 2.11. Залежність відносної похибки обчислень  $X$  від кількості вимірювань  $Y$



Класичний МНК передбачає розв'язок рівняння (2.19) за повною вибіркою експериментальних даних  $n$ . На практиці, часто дослідник має змогу провести деяку кількість вимірювань  $l$  так, що  $l = k \times m$ ,  $k = \overline{1, N}$ , тобто провести  $k$  вимірювань для кожного із  $m$  параметрів  $y_i$ . В цьому разі для розв'язання СЛАР (2.19) замість того, щоб знаходити ОНК за формулою (2.20), пропонується прийняти  $m = n$  і використати інверсний розв'язок (2.21), при цьому замість кожного із  $m$  параметрів вектора  $\mathbf{Y}$  необхідно підставляти осереднені значення

$$\bar{y}_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{ij}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Покажемо, що одержана оцінка співпадає з ОНК. Після проведення  $k$  вимірювань для кожного з параметрів  $y_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  згрупуємо рівняння системи

$$(2.19) \text{ так, що } \mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T,$$

$$\mathbf{Y} = [y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1k}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2k}, \dots, y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mk}]^T,$$

$$\mathbf{A}_i = [a_{1i}, a_{1i}, \dots, a_{1i}, a_{2i}, a_{2i}, \dots, a_{2i}, \dots, a_{mi}, a_{mi}, \dots, a_{mi}]^T.$$

$$\begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} & \dots & a_{1m1} \\ a_{112} & a_{122} & \dots & a_{1m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11k} & a_{12k} & \dots & a_{1mk} \\ a_{211} & a_{221} & \dots & a_{2m1} \\ a_{212} & a_{222} & \dots & a_{2m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21k} & a_{22k} & \dots & a_{2mk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m11} & a_{m21} & \dots & a_{mm1} \\ a_{m12} & a_{m22} & \dots & a_{mm2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1k} & a_{m2k} & \dots & a_{mmk} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \dots \\ y_{1k} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \dots \\ y_{2k} \\ \dots \\ y_{m1} \\ y_{m2} \\ \dots \\ y_{mk} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

де  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^l$ ,  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^l$ ,  $i = \overline{1, m}$  – вектор-стовпці матриці  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times m}$ .

Розв’язок типу (2.20) для системи (2.37) реалізує класичний МНК за повною вибіркою даних. Додамо між собою по  $k$  рівнянь з однаковою лівою частиною, і поділимо систему на  $k$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{1i} \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{2i} \\ \dots \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{mi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \dots \\ \bar{y}_m \end{bmatrix}.$$

Така реалізація МНК є більш інтуїтивно зрозумілою для дослідника. Здійснені вище викладки підтверджують результати роботи [231] які показують, що ОНК є узагальненням інверсної оцінки на випадок, коли кількість рівнянь не співпадає з кількістю невідомих. Отже, надалі без втрати загальності будуть розглядатись лише квадратні матриці розміром  $n \times n$ . Необхідно зауважити, що в такій постановці запропонований метод згладжування експериментальних даних фактично є статистичним методом регуляризації. Крім того, як буде показано в подальшому, такий спосіб дасть змогу перейти до методу забезпечення заданої точності розв’язку ОЗ. Таким чином, вказаний метод підвищення стійкості розв’язків лінійної дискретної ОЗ за рахунок збільшення кількості вимірювань можна віднести до умовно-регулярних методів розв’язку ОЗ.

Доцільним видається суміщати відомі регуляризаційні методи і запропонований статистичний метод регуляризації, що базується на ОНК. При цьому вдасться значно наблизити розв’язок регуляризованої СЛАР до істинного розв’язку. Більш того, можна визначити необхідну кількість вимірювань для забезпечення заданої точності і стійкості розв’язку, задавшись довірчою областю.

2.2.4. Наближені оцінки точності розв'язку. З виразу (2.24) очевидно, що підвищити точність розв'язку можна двома шляхами – зменшуючи  $cond(\mathbf{A})$  або зменшуючи відносну похибку вектора  $\mathbf{Y}$

$$\varepsilon = \|\Delta\mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\|. \quad (2.38)$$

Методи покращення обумовленості матриці (зменшення  $cond(\mathbf{A})$ ) достатньо широко описані в літературі. Деякі запропоновані у п. 2.2.2, тому зупинимось детальніше на шляхах зменшення величини похибки  $\varepsilon$  у рівнянні (2.22). Розглянемо вектор виміряних з похибкою величин, що є сумою  $\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}$ . Очевидно, що його ймовірнісні властивості визначаються щільністю розподілу вектора похибок  $\Delta\mathbf{Y}$ . Внесемо деякі обмеження, а саме будемо вважати щільність розподілу  $i$ -го елементу  $y_i$  вектора  $\mathbf{Y}$  нормальною  $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Тоді  $\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  є багатомірною нормальною величиною, де  $\boldsymbol{\mu} = M(\mathbf{Y})$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  – вектор математичних сподівань (середніх значень)  $\mathbf{Y}$ ;  $\boldsymbol{\Sigma} = cov(\mathbf{Y})$  – коваріаційна матриця розміром  $n \times n$ .

Як вже було сказано вище, зменшити величину (2.38) можна, зменшуючи абсолютну похибку  $\|\Delta\mathbf{Y}\|$ , для чого пропонується проводити  $k$  вимірювань випадкової величини  $\mathbf{Y}$ , і замість  $\mathbf{Y}$  в рівняння (2.19) підставляти оцінку математичного сподівання (вибіркове математичне сподівання)

$M(\mathbf{Y}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{Y}_i$ . При цьому відносна похибка наближено дорівнює

$$\|\Delta\mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| \approx \|M(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\|. \quad (2.39)$$

Більш того, можна встановити необхідну кількість вимірювань  $k$  величини  $\mathbf{Y}$ , які треба провести для досягнення заданої точності  $\|\Delta\mathbf{X}\|/\|\mathbf{X}\|$ .

Відомо, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$ . В реальних задачах при обмеженому  $n$  оцінка математичного сподівання  $M(\mathbf{Y})$  дає змогу визначити математичне

сподівання з деякою похибкою. Отже, визначення відносної похибки (2.22) можна замінити визначенням відносної похибки оцінки математичного сподівання. Оцінимо цю похибку, для цього виразимо математичне сподівання величини  $\mathbf{Y}$ , обчислене після  $l$  вимірювань, рекурентною формулою

$$\mathbf{M}(\mathbf{Y})_l = l^{-1} \left[ (l-1) \mathbf{M}(\mathbf{Y})_{l-1} + \mathbf{Y}_l \right], \quad (2.40)$$

де  $\mathbf{M}(\mathbf{Y})_l$  – оцінка математичного сподівання;

$l$  – обсяг вибірки;

$\mathbf{M}(\mathbf{Y})_{l-1}$  – оцінка математичного сподівання на попередньому кроці при величині вибірки  $l-1$ .

Визначимо абсолютне значення відносної похибки оцінювання математичного сподівання як

$$\frac{\|\Delta \mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|} = \left\| \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Y})_l - \mathbf{M}(\mathbf{Y})_{l-1}}{\mathbf{Y}} \right\|. \quad (2.41)$$

Підставивши у (2.41) значення  $\mathbf{M}(\mathbf{Y})_l$  із (2.40), після перетворень отримаємо

$$\frac{\|\Delta \mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|} = \left\| \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Y})_{l-1} - \mathbf{Y}_l}{l \mathbf{Y}} \right\|. \quad \text{Оскільки максимальне можливе значення похибки}$$

$$\text{складає } \left\| \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Y})_{l-1}}{l \mathbf{Y}} \right\|, \quad \text{маємо } \frac{\|\Delta \mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|} \leq \frac{1}{l} \cdot \left\| \frac{\mathbf{M}(\mathbf{Y})_{l-1}}{\mathbf{Y}} \right\|. \quad \text{Враховуючи, що}$$

$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{Y})_{l-1} = \mathbf{Y}$ , для великих значень  $l$  можна прийняти  $\|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| \leq l^{-1}$ . Звідси,

для забезпечення заданої точності  $\|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\|$  вимірювань, кількість необхідних

вимірювань має скласти  $l \geq \|\mathbf{Y}\|/\|\Delta \mathbf{Y}\|$ . Для забезпечення заданої точності

$\|\Delta \mathbf{X}\|/\|\mathbf{X}\|$  розв'язку погано обумовленої СЛАР кількість вимірювань вектора  $\mathbf{Y}$

має скласти

$$k \geq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{X}\|}{\|\Delta\mathbf{X}\|}. \quad (2.42)$$

Нерівність (2.42) зручна тим, що загалом, не вимагає апріорної інформації про  $\mathbf{X}$ . Для знаходження необхідної кількості вимірювань потрібно лише знати число обумовленості матриці  $\text{cond}(\mathbf{A})$  і бажане значення відносної похибки результату. Недоліком такого способу є висока кількість необхідних вимірювань, тобто така оцінка є завищеною. Наприклад, для 5% точності результату і числі обумовленості 1000, кількість необхідних вимірювань зростає до 20000. В більшості випадків проведення такої кількості натурних експериментів є практично нездійсненною задачею. Однак (2.42) може бути з успіхом застосована для наближеного оцінювання точності розв'язку при відносно невеликих  $\text{cond}(\mathbf{A})$ .

Якщо кількість необхідних вимірювань  $k$ , обчислена за (2.25), є достатньо великою і не може бути реалізована на практиці, пропонується інший наближений статистичний алгоритм одержання необхідної кількості вимірювань для забезпечення заданої точності розв'язку СЛАР. Спосіб ґрунтується на статистичній оцінці кількості вимірювань  $k$ , необхідних для отримання  $M(\mathbf{Y})$  із заданою похибкою і з заданою довірчою імовірністю.

Розглянемо вектор виміряних величин  $\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}$ . Очевидно, що імовірнісні властивості  $\mathbf{Y}$  визначаються щільністю розподілу вектора похибок  $\Delta\mathbf{Y}$ . При цьому  $\mathbf{Y}$  є багатомірною нормальною величиною зі щільністю розподілу

$$f(\mathbf{Y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})\right], \quad \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n,$$

де  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}(\mathbf{Y})$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  – вектор математичних сподівань (середніх значень) вектора  $\mathbf{Y}$ ;

$\Sigma = \text{cov}(\mathbf{Y})$  – квадратна невід’ємно визначена симетрична коваріаційна матриця розміром  $n \times n$ , на діагоналі якої розташовуються дисперсії компонент вектора, а зовнішньодіагональні елементи є коваріаціями між компонентами  $Y_i$ ;  $|\Sigma| = \det(\Sigma)$  – визначник матриці  $\Sigma$ , а  $\Sigma^{-1}$  – обернена до неї матриця.

Нагадаємо, що при вибірці  $k$  ( $k$  – кількість вимірювань вектора  $\mathbf{Y}$ ) вираз для вибіркової коваріаційної матриці  $\Sigma$  має вигляд

$$\Sigma = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}})^T, \text{ де } \bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{Y}_i.$$

Відомо, що основним методом оцінювання параметрів багатомірних випадкових величин є метод вибіркового аналізу. Згідно з цим методом із генеральної сукупності досліджуваного випадкового вектора добувається вибірка, яка аналізується, і результати аналізу поширюються на всю генеральну сукупність. Зауважимо, що аналогом довірчого інтервалу для одномірної випадкової величини для багатомірної випадкової величини є довірча область.

Оцінимо довірчу область для  $\mathbf{Y}$ . Нехай знайдено вектор точкових оцінок математичного сподівання (вектор вибірових середніх)  $\bar{\mathbf{Y}}$   $n$ -мірного випадкового вектора  $\mathbf{Y}$  і матриця оцінок коваріацій  $\Sigma$ . Для  $n > 1$  при побудові довірчої області використовують статистику  $T^2$  (статистику Хотеллінга)

$$T^2 = k(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}), \quad (2.43)$$

де  $k$  – обсяг вибірки.

При заданій довірчій ймовірності  $P$ , відомих значеннях  $k$  і  $n$  статистика  $T^2$  пов’язана із статистикою Фішера  $F$  залежністю  $T^2 = [n(k-1)/(k-n)]F$ . Враховуючи це співвідношення, довірча область математичного сподівання  $n$ -мірного випадкового вектора  $\mathbf{Y}$  з довірчою ймовірністю  $P$  описується наступним рівнянням поверхні

$$(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}) = \left[ n(k-1) / (k(k-n)) \right] F_{1-P}, \quad (2.44)$$

де  $F_{1-P}$  – значення  $F$ , що відповідає рівню значущості  $\alpha = 1 - P$  при числах ступенів вільності  $f_1 = n$  і  $f_2 = k - n$ .

Довірча область визначає  $n$ -мірний еліпсоїд з центром  $\bar{\mathbf{Y}}$ , оскільки  $(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})$  являє собою додатну визначену квадратичну форму.

Рівняння (2.44) придатне для визначення допустимої абсолютної похибки  $\Delta_y = \bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}$  або відносної похибки  $\delta_y = \|\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}\| / \|\boldsymbol{\mu}\|$  вимірювань вектора  $\mathbf{Y}$  за умов відомої кількості вимірювань  $k$ .

Припускаючи, що з ростом обсягу вибірки (кількості вимірювань)  $k$  математичне сподівання вектора похибок  $\lim_{k \rightarrow \infty} M(\Delta \mathbf{Y}) \rightarrow 0$ , середні значення вимірних величин наближаються до істинних і  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{Y}$ . Тоді рівняння (2.44) трансформується до вигляду

$$(\bar{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}) = \left[ n(k-1) / (k(k-n)) \right] F_{1-P}. \quad (2.45)$$

Враховуючи, що відносна похибка  $\delta_y = \|\Delta \mathbf{Y}\| / \|\mathbf{Y}\|$  вимірювання вектора  $\mathbf{Y}$  і похибка  $\delta_{x \max} = \|\Delta \mathbf{X}\| / \|\mathbf{X}\|$  обчислення вектора  $\mathbf{X}$  пов'язані залежністю (2.25), маємо  $\delta_{x \max} = \text{cond}(\mathbf{A}) \delta_y$ .

Співвідношення (2.45) можна переписати у вигляді:

$$(\Delta \mathbf{Y})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \Delta \mathbf{Y} = \left[ n(k-1) / (k(k-n)) \right] F_{1-P}. \quad (2.46)$$

Наведена залежність (2.46) дає можливість наближено знайти необхідну кількість вимірювань  $k$  для досягнення заданої точності розв'язку  $\Delta \mathbf{X}$ . Для цього пропонується наближений ітераційний алгоритм. Алгоритм застосовується для заданих довірчій ймовірності  $P$  та допустимої абсолютної

похибки розв'язку  $\|\Delta\mathbf{X}_{\text{don}}\|$ . Перед початком алгоритму здійснюють  $k$  вимірювань вектора  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ . Роботу алгоритму можна подати у вигляді трьох кроків.

*Крок 1 (обчислення похибки).* Розраховують вибіркове середнє  $\bar{\mathbf{Y}}^{(t)}$ , обернену коваріаційну матрицю  $(\Sigma^{-1})^{(t)}$ , значення  $F$ -статистики Фішера  $(F_{1-p})^{(t)}$ , і, використовуючи (2.44), обчислюють  $\boldsymbol{\mu}^{(t)}$  і похибку вимірювань  $\Delta\mathbf{Y}^{(t)} = \bar{\mathbf{Y}}^{(t)} - \boldsymbol{\mu}^{(t)}$ , і з допомогою (2.25) знаходять значення максимальної похибки розв'язку  $\|\Delta\mathbf{X}\|^{(t)}$ .

*Крок 2 (порівняння).* Максимальну похибку розв'язку  $\|\Delta\mathbf{X}\|^{(t)}$  порівнюють з допустимою похибкою  $\|\Delta\mathbf{X}_{\text{don}}\|$ . Якщо  $\|\Delta\mathbf{X}\|^{(t)} \leq \|\Delta\mathbf{X}_{\text{don}}\|$ , то отримана задовільна точність, інакше, якщо  $\|\Delta\mathbf{X}\|^{(t)} > \|\Delta\mathbf{X}_{\text{don}}\|$ , то переходять до кроку 3.

*Крок 3 (виправлення і уточнення).* Обчислюють «виправлений» вектор похибок  $\Delta\mathbf{Y}^{(t+1)} = \Delta\mathbf{Y}^{(t)}/2$  і далі за формулою (2.46) – значення  $k^{(t+1)}$ . Оскільки значення  $k^{(t+1)}$  було розраховане за результатами першого кроку  $t$ , воно вимагає уточнення, тому методом Монте-Карло генерують  $k^{(t+1)}$  векторів експериментальних даних з похибками вимірювань, що дорівнюють похибкам проведених  $k$  експериментів.

Ітераційний процес припиняється тоді, коли досягається умова  $\|\Delta\mathbf{X}\|^{(t)} \leq \|\Delta\mathbf{X}_{\text{don}}\|$ .

Збіжність алгоритму досягається гарантованим існуванням єдиного розв'язку рівняння (2.46). Алгоритм можна реалізувати на сучасних комп'ютерних системах, які використовують відомі методи оптимізації та їх бібліотеки, таких як, наприклад, пакет прикладних програм MATLAB, з використанням однойменної мови програмування.

Проте, здавалося б, збільшуючи кількість вимірювань  $k$ , можна отримати результат з будь-яким ступенем точності. Однак точність істотно збільшується лише доти, доки випадкова похибка не стане порівнянною зі систематичною,



що добре продемонстровано на рис. 2.8. Подальше збільшення числа вимірювань не є доцільним, тому кінцева точність результату залежатиме лише від систематичної похибки. З літератури відомо, що усереднення некорельованих вимірювань дає змогу зменшити похибку результату в  $\approx \sqrt{k}$  разів [166], що, як показала практика, є грубою оцінкою, яка більша за одержану на основі алгоритму на 40-50%.

На практиці безмежно підвищувати таким способом точність вимірювання не вдається, оскільки рано чи пізно визначальним стає не розсіювання середнього арифметичного, а брак інформації (що виражається, наприклад, у незнанні точного значення поправок і т. п.). Накопичувати експериментальні дані і зменшувати за рахунок цього стандартне відхилення середнього арифметичного має сенс лише доти, доки за умовою ним не можна знехтувати у порівнянні з аналогом середнього квадратичного відхилення, яке враховує дефіцит інформації. Точність багаторазового вимірювання, отже, обмежується дефіцитом інформації, що і викликає систематичну похибку.

Якщо систематична похибка, яка викликана неточністю вимірювальних приладів і результатами моделювання, суттєво менша за випадкову похибку вимірювань, то нею можна знехтувати, інакше її слід додати до випадкової похибки і врахувати при оцінці точності розв'язку ОЗ.

Систематичну похибку теж можна оцінити. Зокрема змодельовавши за допомогою методу Монте-Карло деяку достатньо велику кількість розв'язків прямої задачі із відомими вхідними величинами, порівнявши результати статистичного моделювання із вимірювальними, можна достатньо точно оцінити систематичну похибку вимірювання величини  $Y$ .

Розв'язок ОЗ можна уточнювати за допомогою методу Монте-Карло, промодельовавши деяку достатньо велику кількість вимірювань із випадковою похибкою, що дорівнює похибці вимірювальних приладів, і систематичною похибкою, знайденою моделюванням прямої задачі.

Необхідно відзначити, що система рівнянь типу (2.19) може бути подана як СЛАР з нечіткими або інтервальними коефіцієнтами. Наприклад, у роботі [3] показані деякі переваги нечітких алгоритмів для СЛАР у порівнянні з випадком, коли коефіцієнти і праві частини задані випадковими величинами [10]. Проте, враховуючи, що для розглянутих в подальших розділах реальних ОЗ відсутні обґрунтовані дані про переваги застосування нечіткої та інтервальної арифметики, надалі буде застосовуватись лише традиційна арифметика.

Чіткість і зрозумілість інтервальної арифметики компенсується негативними явищами, які не дають можливість ефективно розв'язувати ОЗ. Справа в тому, що область допустимих значень одержаних розв'язків у вигляді інтервалів для дискретних лінійних задач є занадто широкою через «нестійкість задачі», тобто сама проблема нестійкості лишається невирішеною. Історично, інтервальний аналіз виник як задача врахування похибок обчислень комп'ютерів, де не враховуються імовірнісні закони розподілу шуканих чисел. Натомість, в даній роботі приділено увагу підвищенню ефективності розв'язання ОЗ за рахунок звуження ОДО, яке неможливе без залучення додаткової апріорної та апостеріорної інформації про об'єкт. Такою інформацією є одержана дослідником статистична інформація, що прихована у випадкових даних вимірювань об'єкта. Цей факт доводить важливість статистичного підходу до розв'язання ОЗ.

2.2.5. Метод формування стійких розв'язків шляхом фільтрації оцінок найменших квадратів. Без сумніву, головною задачею на шляху розв'язання дискретної лінійної ОЗ є подолання нестійкості її розв'язків, викликаної поганою обумовленістю матриці  $A$  в моделі (2.19). Задача буде некоректною і її розв'язок нестійким з тієї причини, що малі похибки вихідної інформації динамічної системи  $Y$  будуть набагато збільшені при ідентифікації  $X$  [11, 192].

Звернемося до застосування МНК. Оскільки  $\mu_j$  у (2.44) – оцінка математичного сподівання, яка є завжди випадковою, найбільш природною видається постановка ОЗ в рамках теорії статистичної оцінки невідомих параметрів.

В попередніх підрозділах обґрунтовано, що для забезпечення стійкості розв’язків необхідно застосовувати багатократні вимірювання, що за своєю сутністю рівнозначно застосуванню МНК. Незважаючи на те, що ОНК – незміщена оцінка, вона є нестійкою, і для СЛАР з великими числами обумовленості МНК є малоефективним. Причиною нестійкості є величезна дисперсія ОНК. Але при слабко вираженій нестійкості, дисперсія ОНК є невеликою, і ОНК належить ОДО, рівняння якої [231] має вигляд

$$(\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{X}})^T \mathbf{I}(\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{X}}) = t_{1-\alpha}^{(n)},$$

де  $\mathbf{X}$  – істинний розв’язок;

$\widehat{\mathbf{X}}$  – ОНК,

$\mathbf{I}$  – матриця Фішера, що залежить від  $\mathbf{A}$  і коваріаційної матриці виміряного вектора  $\Sigma$ ;

$t_{1-\alpha}^{(n)}$  – квантиль порядку  $1 - \alpha$  розподілу  $\chi_n^2$ .

В цьому разі ОНК – дійсно ефективна оцінка. Застосування регуляризаційних прийомів, що свідомо вносять зміщення оцінки, приводить тут до ситуації, коли похибка внаслідок зміщення для стійкої оцінки перевищує похибку, одержану для нестійкої ОНК. Для таких ОЗ найефективнішим розв’язком є ОНК.

Інша ситуація виникає, коли задача дуже погано обумовлена і розв’язки нестійкі. Як зазначає автор у [231], при розв’язанні такої ОЗ функція вірогідності (і оцінка за МНК як її різновид) має застосовуватися лише як попередній інструмент. Замість цього слід опиратися на деяку некомунікативну статистику. Ця статистика повинна враховувати систематичні відхилення порівнюваних випадкових послідовностей.

Для цього пропонується застосувати до ОНК лінійну фільтрацію. Суть фільтрації, як одного із методів регуляризації, полягає у тому, щоб свідомо піти на деяку зміщеність отриманої оцінки, при цьому істотно зменшивши її розсіювання. Отже, необхідно знайти таку оцінку, зміщеність якої ще є прийнятною, а дисперсія – значно меншою, ніж у ОНК.

З метою фільтрації ОНК в ОЗ забезпечення працездатності МС надалі доцільно застосувати стиснення інформації і одержання усіченої оцінки (*truncated estimate*). Для цього варто використати відомий зі статистики і багатовимірний метод стиснення даних – метод головних компонент (Principal Component Analysis – PCA).

Нехай замість лінійної моделі ОЗ динамічного процесу (2.19) розв'язується наступна

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}, \quad (2.47)$$

де  $\mathbf{Y}$  – істинне значення;

$\Delta\mathbf{Y}$  – вектор значень «шуму», компоненти якого розподілені нормально  $\Delta y_i \sim N(0, \sigma_i)$ .

Тоді  $\Delta\mathbf{Y}$  є багатомірною нормальною величиною з нульовим середнім  $\langle \Delta\mathbf{Y} \rangle = 0$  і коваріаційною матрицею  $\Sigma = \text{cov}(\Delta\mathbf{Y})$ .

Як відомо, одну з найважливіших ролей в аналізі формування нестійкості розв'язків лінійних ОЗ відіграє матриця Фішера  $\mathbf{I}$ , оскільки дорівнює оберненій коваріаційній матриці ОНК  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{I}^{-1}$ . Матриця Фішера для оцінки моделі (2.47) за МНК може бути знайдена за формулою  $\mathbf{I} = \mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{A}$ , де коваріаційна матриця «шуму» знаходиться як  $\Sigma = (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})^T (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})$ , або за формулою

$$\mathbf{I} = \left( (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) \right)^{-1},$$

де  $\hat{\mathbf{X}}$  – ОНК.

Отримаємо спектральне представлення інформаційної матриці Фішера у вигляді

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T, \quad \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n > 0,$$

де  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  – власні значення матриці Фішера;

$\mathbf{V}$  – ортогональна матриця, стовпці якої  $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n)$  задають напрями головних осей еліпсоїдальної області допустимих оцінок некоректно поставленої задачі (2.47) [232].

В той же час ОНК розкладається за системою власних векторів матриці Фішера як

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{p}}, \quad (2.48)$$

де  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n$  – головні компоненти ОНК.

Це компоненти  $\hat{\mathbf{X}}$  в системі координат, яка повернута відносно початкової таким чином, щоб координатні осі стали паралельними головним осям еліпсоїда розсіювання ОНК.

Як відомо [68, 247], слід коваріаційної матриці ОНК дорівнює оберненій величині до суми її власних значень, тобто,  $\text{tr}(\mathbf{\Omega}) = \sum_{i=1}^n \langle (\hat{x}_i - x_i)^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1}$ .

Звідси видно, що сумарне відхилення ОНК від істинного об'єкта визначається спектром матриці  $\mathbf{I}$ . Найбільший внесок у сумарне відхилення вносять найменші власні значення, тобто «хвіст» матриці Фішера. Отже, сутність фільтрації (і усічення як її частинний випадок) полягає у компромісному виборі такої кількості головних компонент  $v \leq n$ , яка б забезпечила достатню точність оцінки при прийнятній дисперсії. Збільшуючи  $v$ , ми досягаємо більш точного в середньому представлення  $\mathbf{X}$  через  $\hat{\mathbf{X}}_v$ , але при цьому враховується все більше доданків  $\lambda_k^{-1}$  із «хвоста» спектра матриці Фішера, і це дуже швидко погіршує якість усіченої оцінки.

Усічена оцінка має вигляд  $\mathbf{X}_{tr} = \mathbf{V}_{v_{\min}} \hat{\mathbf{p}}$ .

Враховуючи, що із (2.48) випливає  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{X}}$ , маємо усічену оцінку в вигляді

$$\mathbf{X}_{tr} = \mathbf{V}_{v_{\min}} \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{X}}. \quad (2.49)$$

Усічення ОНК є рівнозначним дії на ОНК лінійного фільтра  $\mathbf{W} = \text{diag}(w)$ , де  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_v, w_{v+1}, \dots, w_n\}$  – набір вагових коефіцієнтів  $w_1 = w_2 \dots = w_v = 1$ ,  $w_{v+1} = \dots = w_n = 0$ . З врахуванням діагональної матриці фільтра  $\mathbf{W}$  усічена оцінка (2.49) набуває вигляду

$$\mathbf{X}_{tr} = \mathbf{V} \mathbf{W} \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{X}}. \quad (2.50)$$

У роботах [231, 307] зазначається, що низка обернених розв'язків, а саме оптимальна оцінка Колмогорова і Віннера, регуляризований розв'язок Філіпса і Тихонова, усічена оцінка тощо належать до класу лінійних фільтрованих оцінок. При цьому похибка оцінки мінімізується набором вагових коефіцієнтів

$$w_i = \lambda_i p_{0i}^2 / (1 + \lambda_i p_{0i}^2), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.51)$$

Такий фільтр є оптимальним, а відповідна оцінка – оптимальною. Оскільки  $p_{0i}$  – головні компоненти істинного об'єкту  $\mathbf{X}_0$  залишаються невідомими, замість них можна підставляти головні компоненти  $p_i$  для ОНК  $\hat{\mathbf{X}}$ . Для нормального закону розподілу похибок такий підхід є обґрунтованим.

Більш точною є квазіоптимальна оцінка [232], де на відміну від оптимальної фільтрації, в якій шукають структуру фільтра, оцінку шукають накладанням обмежень на вагові коефіцієнти фільтра.

Підводячи підсумки, необхідно відзначити, що застосування будь-якого із регуляризованих прийомів на практиці вимагає попередніх досліджень задачі, на основі яких підбирається той чи інший алгоритм фільтрації.

2.2.6. Деякі аспекти питання точності розв'язків. Застосовуючи на практиці розроблені в цьому розділі методи розв'язання ОЗ, доцільно визначати не фіксовані значення параметрів, а деякі інтервали значень (допуски), схематично представлені на рис. 2.12. Для цього є принаймні дві важливих причини:

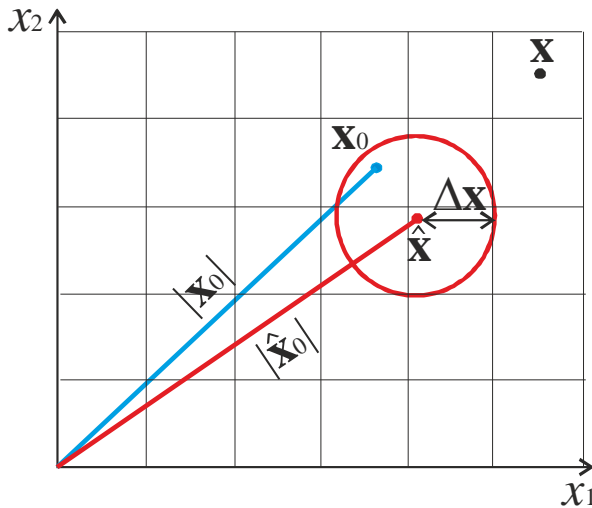


Рис. 2.12. Схематичне зображення розв'язків ОЗ:

$X_0$  – точний розв'язок;

$X$  – звичайний (інверсний) нестійкий розв'язок;

$\hat{X}$  – стійкий регуляризований розв'язок

величина похибки шуканих величин, тобто внутрішніх параметрів МС.

Нестійкий розв'язок викликає похибку внаслідок розсіювання шуканої величини, стійкий розв'язок викликає похибку внаслідок зміщення від «точного» значення. На практиці, «відносно» стійкі розв'язки насправді вибираються із компромісного варіанту і тому їх похибка завжди зумовлена двома складовими: розсіюванням і зміщенням оцінки. Для практичного використання такий розв'язок лінійної дискретної ОЗ зручно представляти у вигляді допусків шуканої величини  $\hat{X} - \Delta X \leq \hat{X} \leq \hat{X} + \Delta X$ . При цьому максимальна абсолютна похибка  $\Delta X$  є оцінкою «зверху», тобто завжди

по-перше, всі вхідні дані, що підставляються у модель, не мають точних значень. Їх значення можуть належати лише деякому інтервалу. Це стосується і вихідних даних;

по-друге, поняття «точного» розв'язку ОЗ не має смислу, оскільки він залишається невідомим, а будь-який отриманий на практиці розв'язок  $\hat{X}$  є наближеним, і з погляду статистики  $\hat{X}$  є статистичною оцінкою.

Як неодноразово зазначалося, основною проблемою, яка є наслідком нестійкості розв'язку ОЗ, які описують динамічні процеси складних МС, є

виконується  $\|\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{X}}\| \leq \Delta\mathbf{X}$ . Це стосується і відносної похибки розв'язку  $\delta\mathbf{X} = \|\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{X}}\| / \|\widehat{\mathbf{X}}\|$ .

Оскільки точні значення вимірюваної величини  $\mathbf{Y}$  і шуканого вектору  $\mathbf{X}$  лишаються невідомими, реальну точність розв'язків визначити неможливо.

З огляду важливості одержання в практичних задачах найбільш точної оцінки похибок розв'язків, в роботі запропоновано поряд з ОЗ розв'язувати відповідну їй пряму задачу.

Пряма задача – значно легша за обернену, тому, спираючись на сучасний рівень інформаційних технологій і систем автоматичного проектування, проведення чисельного експерименту з прямої задачі для перевірки адекватності отриманих розв'язків ОЗ видається просто необхідним.

На сьогодні відомі декілька методів оцінювання похибки розв'язків. Це мінімізація нев'язки Тихонова [234], а також статистичний підхід [231]. Відповідно до останнього похибку вектора  $\mathbf{X}$ , що підпорядковуються розподілу  $\chi^2$ , можна оцінити, вибираючи квантиль для довірчої ймовірності.

Оскільки в даній роботі для розв'язання ОЗ запропоновано використовувати інформацію, отриману із розв'язання відповідної прямої задачі, пропонується інший, більш детальний підхід до оцінювання похибки розв'язків. Сутність таких методів у наступному.

1. Методом Монте-Карло моделюється багаторазове розв'язання ОЗ, і для отриманих експериментально відносних похибок  $\delta\widehat{\mathbf{X}}$  визначають параметри розподілу  $\chi^2$ , а за ними – відповідні довірчі інтервали для оцінювання  $\widehat{\mathbf{X}}$ . В результаті для заданої довірчої ймовірності одержують інтервали допустимих значень шуканого параметра  $\mathbf{X}$ , і навпаки, для заданих допустимих значень параметра можна отримати ймовірність їх неперевищення.

2. Пропонується більш детальний аналіз похибок на рівні окремих елементів шуканого розв'язку. З огляду на припущення, що елементи вектора



$\hat{\mathbf{X}} = [\hat{x}_i]_1^n$  мають нормальний розподіл, моделюючи багатократне розв'язання прямої задачі і розв'язання ОЗ, є можливість оцінити не лише абсолютні похибки вектора  $\Delta\hat{\mathbf{X}}$ , а й абсолютні похибки  $\Delta\hat{x}_i$  нормально розподілених елементів  $\hat{x}_i$ .

Для цього проводиться багатократне ( $k$  разів) вимірювання вектору  $\mathbf{Y}$ , після чого бажано перевірити нормальність розподілу значень його елементів  $Y_i \sim N(\mu, \sigma) \forall i = \overline{1, n}$ . Якщо гіпотеза про нормальність підтверджується, проводиться оцінювання нормального розподілу експериментальних даних  $Y_i$ , розраховуються точкові та інтервальні характеристики розподілів випадкових величин  $Y_i$  і характеристики  $\mu$  і  $\Sigma$  багатомірної нормальної випадкової величини  $\mathbf{Y} \sim N(\mu, \Sigma)$ . Далі розв'язується ОЗ, в якості наближеного розв'язку на даному етапі береться максимально вірогідна оцінка  $\hat{\mathbf{X}}$ , якою є ОНК. Потім, задавшись в якості «точного розв'язку» величиною  $\hat{\mathbf{X}}$ , моделюється пряма задача, при цьому шуканим є «точний» вектор  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}$ . Моделюванням на комп'ютері проводять повторне багатократне розв'язання ОЗ для відомого вектору виміряних даних  $\mathbf{Y} \sim N(\mu, \Sigma)$ , де  $\mu = \langle \mathbf{Y}' \rangle$ . В результаті усереднення розв'язків отримують деякий вектор  $\mathbf{X}$ .

Далі необхідно провести оцінювання похибок для знайденого вектора  $\hat{\mathbf{X}}$  у вигляді  $\|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\| / \|\hat{\mathbf{X}}\|$ , або окремих елементів вектора у вигляді  $\Delta\hat{x}_i = \hat{x}_i - x$ . Якщо похибки задовольняють дослідника, то розв'язком ОЗ є інтервальні оцінки  $[\hat{x}_i - 3\sigma; \hat{x}_i + 3\sigma]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , або інші, вираховані для інтервалів з іншою довірчою імовірністю. В іншому разі розв'язання ОЗ потребує застосування додаткових методів регуляризації, наприклад фільтрації ОНК. При цьому похибку фільтрованої оцінки, наприклад усіченої оцінки  $\mathbf{X}_r$  неважко отримати як  $\|\mathbf{X}_r - \hat{\mathbf{X}}\| / \|\hat{\mathbf{X}}\|$ .

### 2.3. Дослідження стійкості і точності методів ідентифікації ексцентриситетів за статичними і динамічними коефіцієнтами впливу

Оцінку похибок розв'язку ОЗ проведемо нижче. Врахуємо похибки вхідних даних. Нехай замість системи (2.18) в дійсності розв'язується система

$$\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} = (\omega^2 + \Delta\omega^2)(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{Y} + \mathbf{e} + \Delta\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{e}), \quad (2.52)$$

Припустимо, що всі члени вихідного рівняння мають деякі невідомі похибки, що залежать від точності контрольно-вимірювальної апаратури і, звичайно ж, ці похибки малі у порівнянні з вимірювальними величинами.

Виділимо головний член похибки, віднімаючи від рівняння (2.52) рівняння (2.18) і нехтуючи членами другого і вище порядку малості.

$$\Delta\mathbf{Y} = \omega^2\Delta\mathbf{A}(\mathbf{Y} + \mathbf{e})\Delta\omega^2\mathbf{A}(\mathbf{Y} + \mathbf{e}) + \omega^2\mathbf{A}\Delta\mathbf{Y} + \omega^2\mathbf{A}\Delta\mathbf{e},$$

З рівняння (2.18) маємо  $\mathbf{Y} + \mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}/\omega^2$ . Підставляючи цей вираз у попереднє рівняння, знаходимо

$$\Delta\mathbf{e} = -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}/\omega^2 - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}\Delta\omega^2/\omega^4 - \Delta\mathbf{Y} + \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{Y}/\omega^2.$$

Звідси в довільній нормі

$$\|\Delta\mathbf{e}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \cdot \|\Delta\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\|^2 \cdot \|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|/\omega^2 + \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot |\Delta\omega^2| \cdot \|\Delta\mathbf{Y}\|/\omega^4. \quad (2.53)$$

З (2.18) легко отримати

$$\mathbf{Y}/\omega^2 - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}\mathbf{e}.$$

Тому  $\|\mathbf{Y}\| \leq \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{e}\|$ . Звідси

$$\|\mathbf{e}\| \geq \|\mathbf{Y}\| / \|(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|. \quad (2.54)$$

Поділивши (2.53) на (2.54), отримаємо

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \left\| (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1} \right\| \|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| + \\ &+ \|\mathbf{A}^{-1}\|^2 \|\mathbf{A}\|^2 \left\| (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1} \right\| \|\Delta \mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|/\omega^2 + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \left\| (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1} \right\| \|\Delta \omega^2\|/\omega^2. \end{aligned}$$

Відомо, що для довільної квадратної матриці  $\mathbf{A}$  добутком норми прямої матриці на обернену є її число обумовленості  $cond(\mathbf{A})$ , тобто

$$cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \geq 1. \text{ Тому } \left\| (\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})^{-1} \right\| \geq 1, \text{ і}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| &\leq cond(\mathbf{A}) cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| + \\ &+ cond(\mathbf{A})^2 \left[ cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) / \|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \right] \|\Delta \mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|/\omega^2 + \\ &+ cond(\mathbf{A}) \left[ cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) / \|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\| \right] \|\Delta \omega^2\|/\omega^2 / \omega^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

З нерівності (2.55) видно, що задача (2.18) ідентифікації ексцентриситетів за статичними коефіцієнтами впливу теоретично є стійкою у вказаному вище контексті. Однак не можна вважати, що прогини і похибки їх вимірювань можуть бути меншими за будь-які наперед задані величин, хоча б через те, що у такому випадку їх немає чим виміряти, а відповідно, й оцінити. Тому при дослідженні питань стійкості необхідно враховувати точність апаратури для вимірювань прогинів, швидкостей, коефіцієнтів впливу тощо.

В окремих випадках одержуються наступні верхні оцінки відносної похибки ексцентриситетів:

$$\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| \leq cond(\mathbf{A}) \cdot cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \cdot \|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| \quad (2.56)$$

при  $\Delta \mathbf{A} = 0$  і  $\Delta \omega^2 = 0$ ,

$$\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| \leq \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{cond(\mathbf{A}) cond(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})}{\|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\|} \cdot \frac{|\Delta \omega^2|}{\omega^2} \quad (2.57)$$

при  $\Delta \mathbf{Y} = 0$  і  $\Delta \mathbf{A} = 0$ ,

$$\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\| \leq \frac{1}{\omega^2} \cdot [\text{cond}(\mathbf{A})]^2 \cdot \frac{\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})}{\|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}\|} \cdot \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}. \quad (2.58)$$

при  $\Delta \mathbf{Y} = 0$  і  $\Delta \omega^2 = 0$ .

Співвідношення (2.56) виражає умову стійкості розрахункової моделі за прогином, (2.57) – за частотою обертання, а (2.58) – за властивостями матриці  $\mathbf{A}$ .

В попередньому підрозділі показано, що число обумовленості матриці свідчить, у скільки разів відносна похибка результату може максимально перевищувати відносну похибку вихідної інформації. Для аналізу стійкості рівняння (2.18) доцільним є дослідження фізичного змісту чисел обумовленості матриць  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}$ . Відомо, що число обумовленості матриці в евклідовій нормі може виражатися через відношення максимального і мінімального модулів її власних чисел, тобто

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \left( \max_i |\lambda_i| \right) / \left( \min_i |\lambda_i| \right), \quad \text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) = \left( \max_i |\lambda_i| \right) / \left( \min_i |\lambda_i| \right).$$

Для матриці  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_1 \alpha_{11} & m_2 \alpha_{12} & \dots & m_n \alpha_{1n} \\ m_1 \alpha_{21} & m_2 \alpha_{22} & \dots & m_n \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \alpha_{n1} & m_2 \alpha_{n2} & \dots & m_n \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

її власні числа знаходяться з умови рівності нулю визначника, в якому відсутня кутова швидкість

$$\det|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}| = 0, \quad (2.59)$$

де  $\mathbf{E}$  – одинична матриця.

Квадрати власних частот обертання описаної вище системи є коренями рівняння

$$\det|\omega_i^2 \mathbf{A} - \mathbf{E}| = 0. \quad (2.60)$$

З порівняння рівнянь (2.59) і (2.60) випливає, що  $\lambda_i = 1/\omega_i^2$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тоді очевидно, що  $\lambda_{\max} = 1/\omega_1^2$ ,  $\lambda_{\min} = 1/\omega_n^2$ . Тому для числа обумовленості справедливим є

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \geq \omega_n^2 / \omega_1^2. \quad (2.61)$$

Отже, число обумовленості матриці  $\mathbf{A}$  оцінюється знизу відношенням квадратів максимальної і мінімальної власних частот обертання зазначеної дискретної моделі ротора.

Природно, що чим більша розмірність  $n$ , тим точнішою є розглядувана  $n$ -масова модель. Те, що це не завжди так, випливає із наступних міркувань: із (2.61) видно, що тоді зростає і  $\text{cond}(\mathbf{A})$ , а отже, і похибка розв'язку. Таким чином, з одного боку, апроксимуючи коливання реального ротора великою кількістю зосереджених мас, ми наближаємо розрахункову схему до реальної конструкції і, відповідно, підвищуємо точність знаходження необхідних параметрів (жорсткостей або коефіцієнтів впливу, мас тощо). З іншого боку, з ростом  $n$  збільшується число обумовленості матриці, і зростають похибки розрахунків. Вказане протиріччя є наслідком недосконалості методу ідентифікації. Одержані результати слід брати до уваги під час обґрунтування допустимості описаної ідентифікації дисбалансів гнучких роторів і при врахуванні похибки даного способу балансування. Таким чином необхідно підбирати «розумну» з вказаного погляду кількість дисків, що апроксимують реальний ротор. Це підкреслює той факт, що найбільш прийнятними і стійкими варіантами є відносно нескладні розрахункові моделі, які відрізняються тим, що в них використовуються отримані в результаті експериментів «точні», еквівалентні даній розрахунковій схемі, значення параметрів: жорсткостей, мас, прогинів тощо.

Розкриємо тепер фізичний зміст числа обумовленості матриці  $\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}$ . Розглянемо рівняння  $\det|\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ . Останнє рівняння можна перетворити до вигляду

$$0 = \det|\mathbf{A} + (\lambda - 1/\omega^2)\mathbf{E}| = \det|\mathbf{A} - (1/\omega^2 - \lambda)\mathbf{E}|. \quad (2.62)$$

Вище було з'ясовано, що корені рівняння (2.62) мають вигляд  $1/\omega^2 - \lambda_i = 1/\omega_i^2 \forall i = \overline{1, n}$ . Звідси,  $\lambda_i = 1/\omega^2 - 1/\omega_i^2$  і

$$\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \left( \max_i |\omega^{-2} - \omega_i^{-2}| \right) / \left( \min_i |\omega^{-2} - \omega_i^{-2}| \right) \quad (2.63)$$

Як видно з (2.63), максимальне і мінімальне значення власних чисел  $\lambda_i$  залежить від вибраної дискретної моделі, тобто кількості мас  $n$ , і від частоти обертання, на якій відбувається вимірювання, тобто проводиться балансування.

Уточнимо нерівність (2.63), припускаючи, що  $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ , під час вимірювання на частотах, менших за першу критичну, тобто  $0 < \omega^2 < \omega_1^2$  (що є бажаним), маємо  $|1/\omega^2 - 1/\omega_i^2| = 1/\omega^2 - 1/\omega_i^2$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Тоді перетворимо (2.63) наступним чином

$$\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \frac{\omega^{-2} - \omega_n^{-2}}{\omega^{-2} - \omega_1^{-2}} = \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2}.$$

При вимірюваннях на частотах, що задовольняють нерівність  $\omega_k^2 \leq \omega^2 \leq \omega_{k+1}^2$ , модулі власних значень  $\lambda_i$  мають вигляд  $|\lambda_1| = 1/\omega_1^2 - 1/\omega^2, \dots, |\lambda_k| = 1/\omega_k^2 - 1/\omega^2, |\lambda_{k+1}| = 1/\omega^2 - 1/\omega_{k+1}^2, |\lambda_n| = 1/\omega^2 - 1/\omega_n^2$ .

Звідси очевидно, що  $\max_i |\lambda_i|$  може мати місце або про  $i = 1$ , або при  $i = n$ , а  $\min_i |\lambda_i|$  на розглянутому інтервалі кутових швидкостей має місце або при

$i = k$ , або при  $i = k + 1$ , причому  $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$  при  $1/\omega_k^2 - 1/\omega^2 \leq 1/\omega^2 - 1/\omega_{k+1}^2$ , тобто при  $\omega^2 < 2\omega_k^2\omega_{k+1}^2/(\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2) = \delta_k$ , в іншому випадку  $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ .

Таким чином

$$\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \left| \omega^{-2} - \omega_i^{-2} \right| / \left| \omega^{-2} - \omega_k^{-2} \right| \text{ при } \omega_k^2 < \omega^2 < \delta_k, i = 1, \text{ або } i = n,$$

$$\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \left| \omega^{-2} - \omega_i^{-2} \right| / \left| \omega^{-2} - \omega_{k+1}^{-2} \right| \text{ при } \delta_k < \omega^2 < \omega_{k+1}^2, i = 1, \text{ або } i = n.$$

Тобто

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cond}(\mathbf{A})\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \frac{|\omega_i^2 - \omega^2|}{|\omega_k^2 - \omega^2|} \cdot \frac{\omega_k^2}{\omega_i^2} \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} = \gamma \text{ при } \omega_k^2 < \omega^2 < \delta_k, i = 1 \text{ або } i = n, \\ \text{cond}(\mathbf{A})\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A}) \geq \frac{|\omega_i^2 - \omega^2|}{|\omega_{k+1}^2 - \omega^2|} \cdot \frac{\omega_{k+1}^2}{\omega_i^2} \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_1^2} = \gamma \text{ при } \delta_k < \omega^2 < \omega_{k+1}^2, i = 1 \text{ або } i = n. \end{array} \right.$$

Графік залежності добутку чисел обумовленості  $\gamma = \text{cond}(\mathbf{A})\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})$  від квадрата  $\omega^2$  представлений на рис. 2.13.

Із наведених залежностей випливає:

- ділянки частот обертання поблизу критичних частот є найменш стійкими при балансуванні;
- найбільш стійкою вибрана модель буде при кутових швидкостях, що визначаються виразом

$$\omega = \omega_k \cdot \omega_{k+1} \sqrt{2/(\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2)}.$$

Покажемо, що метод ідентифікації, а отже і метод балансування є тим більш стійким, чим більше гнучкість ротора. Розглянемо швидкість зростання  $\gamma$ , наприклад, у докритичній ділянці кутових швидкостей обертання ротора

$$\frac{d\gamma}{d\omega^2} = \frac{\omega_n^2 - \omega_1^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2} = \frac{\omega_n^2/\omega_1^2 - 1}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2} \cdot \omega_1^2 > 0.$$

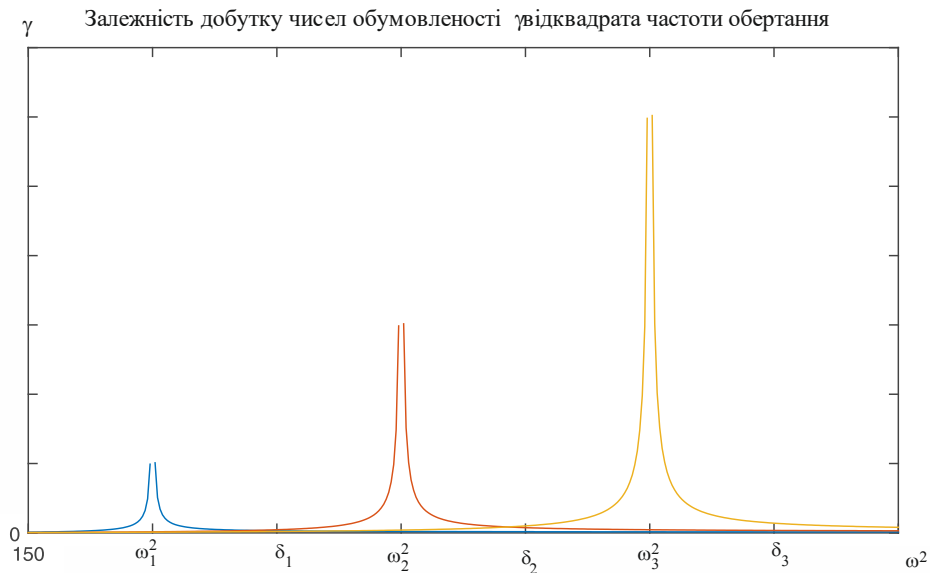


Рис. 2.13. Залежність величини добутку чисел обумовленості від квадрата частоти обертання при балансуванні

Таким чином, чим більшою є гнучкість ротора, тим меншим є співвідношення  $\omega_n^2/\omega_1^2$  і тим меншою є швидкість зростання похибки. І навпаки – чим жорсткіший ротор, тим більше співвідношення  $\omega_n^2/\omega_1^2$ , а отже, тим швидше зростає похибка розрахунку зі зростанням частоти обертання при балансуванні і наближенням її до критичної. Вказаний результат продемонстрований на рис. 2.14.

Отримані залежності (2.56-2.58) дають можливість розв'язати деякі чисто практичні задачі. Проаналізуємо залежність (2.56). Якщо для заданого ротора:

- заданий клас точності балансування ротора;
- похибка  $\|\Delta \mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\|$  є відомою;
- обрана розрахункова модель;
- обчислено значення  $\text{cond}(\mathbf{A})\text{cond}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})$ ,

то можна оцінити:

- а) відносну похибку  $\|\Delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\|$  апаратури, яка необхідна для вимірювання прогинів;
- б) точність ідентифікації та балансування.



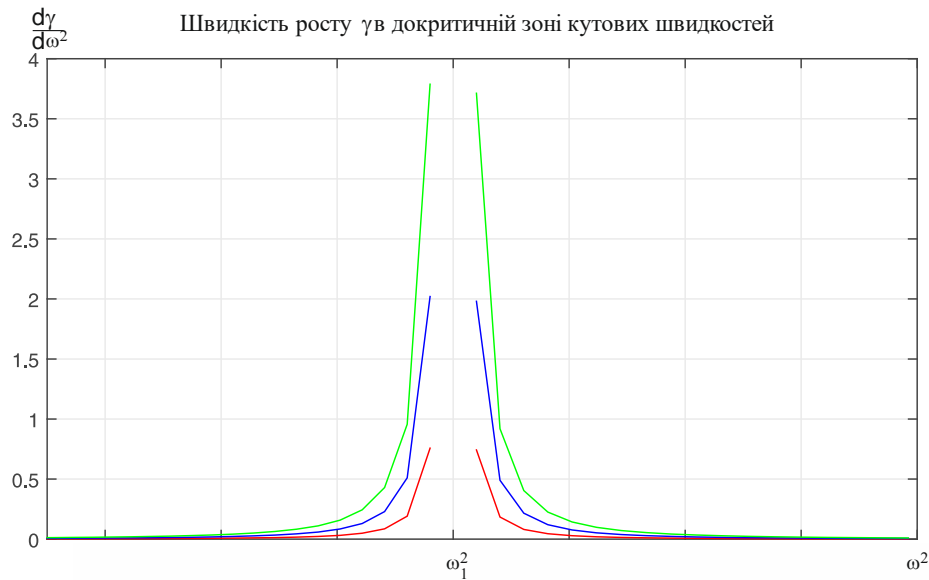


Рис. 2.14. Залежність швидкості зростання похибки  $\gamma$  від  $\omega_n^2/\omega_1^2$  для роторів з різною гнучкістю

У разі, якщо відома інформація вказана у наведених вище п. а) та п. б), то можна знайти таку розрахункову модель, яка б забезпечила виконання необхідної точності балансування.

Подібні результати можна отримати проаналізувавши формули (2.57) і (2.58), тільки вони будуть стосуватись відповідно вимірювання частоти обертання і обладнання для вимірювання статичних коефіцієнтів впливу [274].

*Вплив гіроскопії на стійкість і точність методів ідентифікації гнучких роторів.* Формально рівняння, яке описує рух гнучкого ротора з урахуванням гіроскопічних сил в матричній формі може бути записане в такому ж вигляді, як і без врахування гіроскопії, тобто у вигляді (2.18). Різниця в тому, що для останнього випадку вектор-стовпець  $\mathbf{Y}$  містить не лише прогин, але і кут повороту  $\mathbf{y}'$ , тобто

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)^T.$$

Що стосується вектор-стовпця ексцентриситетів  $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]^T$ , о він буде містити і радіальні  $e$ , і кутові  $\varepsilon$  ексцентриситети. В цьому разі матриця  $\mathbf{A}$  має вигляд

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}m_1 & a_{12}m_2 & a_{1n}m_n & -I_1\beta_{11} & -I_2\beta_{12} & -I_n\beta_{1n} \\ a_{21}m_1 & a_{22}m_2 & a_{2n}m_n & -I_1\beta_{21} & -I_2\beta_{22} & -I_n\beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}m_1 & a_{n2}m_2 & a_{nn}m_n & -I_1\beta_{n1} & -I_2\beta_{n2} & -I_n\beta_{nn} \\ \gamma_{11}m_1 & \gamma_{12}m_2 & \gamma_{1n}m_n & -I_1\delta_{11} & -I_2\delta_{12} & -I_n\delta_{1n} \\ \gamma_{21}m_1 & \gamma_{22}m_2 & \gamma_{2n}m_n & -I_1\delta_{21} & -I_2\delta_{22} & -I_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1}m_1 & \gamma_{n2}m_2 & \gamma_{nn}m_n & -I_1\delta_{n1} & -I_2\delta_{n2} & -I_n\delta_{nn} \end{bmatrix},$$

де  $I_i$  – осьовий момент інерції для  $i$ -го диска;

$\beta_{ij}$  – прогин під диском  $i$  від одиничного моменту, прикладеного у місці посадки диску  $j$ ;

$\delta_{ij}$  – кут повороту перерізу у місці посадки диску  $i$  від одиничного моменту, прикладеного у місці посадки диску  $j$ .

Розв'язок рівняння (2.18) для розглядуваного випадку, як і раніше, має вигляд  $\mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{E}/\omega^2 - \mathbf{A})\mathbf{Y}$ , однак, розв'язуючи рівняння  $\det|\omega^2\mathbf{A} - \mathbf{E}| = 0$ , можна отримати у 2 рази більше коренів, ніж без урахування гіроскопічного моменту. Таким чином, врахування гіроскопії збільшує число обумовленості матриці, а отже, і похибку ідентифікації ексцентриситетів. Цю обставину необхідно мати на увазі при виборі динамічної моделі.

Цього ж висновку можна було дійти менш строгим, але очевидним шляхом, вважаючи зосереджену масу у вигляді диску, що має гіроскопічний момент, такою, що еквівалентна двом точковим масам, пов'язаними разом з напрямленими у протилежні сторони відцентровими силами.

*Дослідження методу балансування за динамічними коефіцієнтами впливу.* У випадку використання динамічних коефіцієнтів впливу для прогинів

за умови, що кількість ексцентриситетів, які визначаються, або корегувальних мас дорівнює кількості площин вимірювань, основне рівняння ОЗ динаміки ротора має вигляд

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{e} \quad (2.64)$$

де  $\mathbf{B}$  – матриця, члени якої складені з динамічних коефіцієнтів впливу, помножених на відповідні маси, тобто  $b_{ik} = \alpha_{ik} \omega^2 m_k$ .

З порівняння (2.64) і (2.18) будемо вважати, що  $b_{ik} = (1/e_k) [\alpha_{ik} \omega^2 (y_k + e_k)] = \alpha_{ik} \omega^2 + \alpha_{ik} \omega^2 (y_k/e_k)$ .

У матричній формі останнє рівняння має вигляд  $\mathbf{B} = \omega^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{A}\mathbf{\Phi}$ , де

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} y_1/e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2/e_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & y_n/e_n \end{bmatrix},$$

тобто  $\mathbf{B} = \omega^2 (\mathbf{E} + \mathbf{\Phi})\mathbf{A}$ .

У випадку урахування похибок, на природу яких формально не будемо поки що звертати увагу, рівняння (2.64) трансформується до вигляду  $\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} = (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})(\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e})$ . Після перетворень, аналогічних як і для рівняння (2.52), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{e}\|} &\leq \text{cond}(\mathbf{A}) \text{cond}(\mathbf{E} + \mathbf{\Phi}) \frac{\|\Delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} + \text{cond}(\mathbf{A}) [\text{cond}(\mathbf{E} + \mathbf{\Phi})]^2 \frac{\|\Delta(\mathbf{E} + \mathbf{\Phi})\|}{\|\mathbf{E} + \mathbf{\Phi}\|} + \\ &+ \text{cond}(\mathbf{A}) \text{cond}(\mathbf{E} + \mathbf{\Phi}) \frac{|\Delta\omega^2|}{|\omega^2|} + [\text{cond}(\mathbf{A})]^2 \text{cond}(\mathbf{E} + \mathbf{\Phi}) \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Порівняння нерівностей (2.65) і (2.55) показує аналогічність подальших дій і висновків при дослідженні стійкості балансування за динамічними коефіцієнтами впливу та за статичними коефіцієнтами впливу, а також їх еквівалентність у сенсі точності, тому на них нижче зупинятись не будемо.



На перший погляд із отриманого можна зробити хибний висновок: якщо із отриманих виразів для  $\mathbf{P}$  знайти  $\mathbf{e}$ , то відносна похибка обчислень ексцентриситетів буде меншою, ніж знайдена вище (2.65). Але дослідження, аналогічні попереднім, показали що це не так і до того ж вони однакові.

З метою уникнення збільшення похибок можна знаходити не ексцентриситети  $e_i$ , а коректувальну масу із умови рівності її статичного моменту статичному моменту неврівноваженої маси, тобто

$$m_i(y_i + e_i) = m_{zp,i} r_{zp,i}. \quad (2.68)$$

Такі результати часто використовують під час балансування. Однак і цей спосіб має свої недоліки, оскільки при зміні  $\omega$  змінюється прогин  $y$ , тобто змінюється неврівноважена сила, а, отже, і коректувальна маса і таким чином звужується діапазон частот, для яких правильним є балансування за рівністю (2.68).

При обчисленні вектору  $\mathbf{e}$ , який не залежить від частоти, можна проводити балансування на одній частоті. В конкретних практичних випадках треба мати на увазі ці обставини і вибирати відповідні методи балансування і відповідні методи ідентифікації для отримання найбільш достовірних результатів.

Наведений вище теоретичний аналіз дозволяє стверджувати, що:

- точність та надійність ідентифікації, а саме відносна похибка розрахунків ексцентриситетів, залежить від кількості мас моделі, що апроксимує реальний ротор, і частоти обертання при балансуванні;
- кількість мас розрахункової моделі ротора і однакову з нею кількість коректувальних мас необхідно вибирати з урахуванням потрібної обчислювальної точності методу і проводити вимірювання на тій частоті обертання ротора, при якій обчислювальні похибки є мінімальними;
- похибка ідентифікації ексцентриситетів відсутня у роторів, які працюють до і навіть близько до першої критичної частоти обертання при використанні однієї додаткової площини корекції, окрім двох крайніх;
- зі збільшенням гнучкості ротора суттєво зростає ефективність ідентифікації ексцентриситетів з використанням статичних коефіцієнтів впливу;

- існує кількісна залежність між точністю вимірювання прогинів і частот обертання та розрахунковою схемою, що дає змогу для вибраної моделі ротора підбирати необхідну за точністю апаратуру, або навпаки – для наявної апаратури вибрати ефективну в сенсі стійкості модель.

Проте, вирішення протиріччя між точністю апроксимації і похибками обчислень при розв'язанні дискретних лінійних ОЗ динаміки складних МС за рахунок «загрублення» системи далеко не завжди є прийнятним, тому бажано мати потрібну точність розв'язку навіть при погано обумовленій вихідній матриці.

Підвищення ефективності ідентифікації за рахунок різноманітних модифікацій розрахунку ексцентриситетів можна досягти інтерпретацією відомих в математиці методів розв'язання дискретних лінійних ОЗ: ортогоналізації матриць, нормування рядків і стовпців, застосування ітераційних процесів тощо.

Деякі з цих шляхів були апробовані під час розв'язання СЛАР при розрахунку коректувальних мас, у процесі балансування багатоопорних валопроводів турбоагрегатів і описані в роботах Микуниса С.І. [171], Гольдина А.С. [53], Рунова Б.Т. [211] та інших [261]. Бражко М. Г. випробував метод статичних коефіцієнтів впливу на математичній моделі, лабораторній установці і натурних роторах ГТД при різних числах обумовленості [28].

Автори вказують, що при числі обумовленості, що не перевищує 200-300, реальні похибки у визначенні ексцентриситетів і корегувальних мас є незначними і прийнятними для практичного використання.

Втім, досі не вдається сформулювати загальний алгоритм, який дає змогу знаходити уточнені розв'язки при погано обумовленій вихідній системі, і в кожному конкретному випадку можуть привести до мети викладені вище або перераховані заходи.

Одним із можливих шляхів уникнення розв'язання систем рівнянь, є наступний. Перетворенням статичних коефіцієнтів впливу у згинальні жорсткості  $EI$  для кожного перерізу, в якому вимірювали прогин  $y$ , можна перейти від ідентифікації за статичними коефіцієнтами впливу до ідентифікації

за згинальними жорсткостями, де замість розв'язання систем рівнянь ексцентриситети знаходяться із розв'язання одного рівняння, записаного для кожного перерізу.

Порівняння обох методів ідентифікації і можливість переходу від одного до іншого за рахунок взаємних перетворень  $EI$  і  $u$  дає змогу зробити наступні висновки. Якщо кількості точок вимірювання прогину мала, тобто реальний ротор апроксимується «грубою» системою, і число обумовленості відносно мале, а однак, похибки диференціювання великі, перевагу слід віддати ідентифікації за коефіцієнтами впливу. Якщо кількості точок вимірювань прогину велика, тобто ротор апроксимується більш точною системою і число обумовленості є значним, а похибки диференціювання малими, краще використовувати ідентифікацію ексцентриситетів за згинальними жорсткостями  $EI$ .

При використанні динамічних коефіцієнтів впливу по прогину також можливий перехід до  $EI$  і методу ідентифікації, який не вимагає розв'язання систем рівнянь.

#### 2.4. Висновки до розділу

Подальший розвиток отримала теорія захисту машин від вібрацій за рахунок підвищення точності розв'язання лінійних дискретних ОЗ ідентифікації дисбалансів і пружно-інерційних характеристик швидкісних гнучких роторів.

1. Розроблено метод ідентифікації параметрів математичних моделей МС, що враховує їх ступінь ідеалізації і умови експлуатації, який, на відміну від існуючих, полягає у залученні пробних параметрів (режимів) машин з «точними» значеннями. Це дозволяє за рахунок до означення ОЗ і врахування реальних значень параметрів і доозначення ОЗ підвищити ефективність моделювання і точність ідентифікованих параметрів.

2. Обґрунтовано, що для ідентифікації невідомих ексцентриситетів і пружно-інерційних характеристик ротора для моделі з розподіленими

параметрами достатньо виміряти його прогини на чотирьох різних некритичних частотах обертання.

2. Обґрунтовано підвищення точності розв'язання ОЗ за рахунок залучення додаткової статистичної інформації при збільшенні кількості вимірювань величин параметрів машин. Нові теоретичні положення відрізняються можливістю розрахунку оптимальних значень параметрів машин при довільному розподілі ймовірностей значень виміряних параметрів.

3. Встановлена достатня оцінка величини похибки розв'язків лінійних дискретних ОЗ, яка, на відміну від існуючих оцінок за числом обумовленості, враховує значення мінорів матриці і дисперсію правої частини системи рівнянь, що дає змогу підвищити вірогідність оцінки шуканих параметрів машин.

4. Розроблено метод оптимізації коефіцієнтів матриці лінійних дискретних ОЗ за критерієм мінімуму числа обумовленості. Це дає можливість зменшити похибку розрахунку ексцентриситетів і пружно-інерційних характеристик високошвидкісних роторів при балансуванні з урахуванням гнучкості.

5. Досліджено динамічні процеси у машинах з швидкісними гнучкими роторами з залученням методу ідентифікації дисбалансів за динамічними прогинами і коефіцієнтами впливу моделі ротора з зосередженими масами, що дало змогу одержати низку важливих наукових і практичних результатів:

- досліджено стійкість і точність методу ідентифікації швидкісних роторів турбомашин за статичними коефіцієнтами впливу, в результаті чого виявлені ділянки частот обертання ротора, при яких метод ідентифікації найменш або найбільш стійкий;

- обґрунтовано, що метод ідентифікації, а з ним і метод балансування тим більше стійкий, чим більше гнучкість ротора;

- встановлено, що урахуванням гіроскопії при ідентифікації ексцентриситетів роторів збільшує обумовленість матриці в дискретної лінійної ОЗ, підвищує нестійкість її розв'язків і знижує точність ідентифікованих величин;

- продемонстровано відсутність переваг у застосуванні динамічних коефіцієнтів впливу порівняно зі статичними.



### РОЗДІЛ 3. ШЛЯХИ ЗНИЖЕННЯ ВІБРАЦІЙ ШВИДКІСНИХ РОТОРІВ

У розділі поставлені і розв'язані задачі ідентифікації дисбалансів (ексцентриситетів), жорсткостей і мас швидкісних роторів з метою їх подальшого балансування і зниження вібрацій до виконання ТУ. Розв'язана задача діагностування амплітудно-частотної характеристики авіаційного двигуна з метою пояснення причин резонансів у зоні експлуатаційних частот.

#### 3.1. Дослідження динаміки і балансування ротора багатоступінчатого компресора авіаційного двигуна

3.1.1. Ідентифікація ексцентриситетів ротора. Наслідком тривалої експлуатації двигунів АИ-20 є низка дефектів. Їх вдалось виявити під час стендових випробувань. До них, в першу чергу слід віднести:

- погнутість заднього вала;
- поломки штифтового з'єднання ротора компресора (головним чином, у зчленуванні заднього вала з десятим ступенем ротора);
- низка дефектів на корпусі камери згоряння.

Передбачалося, що виникнення вказаних дефектів пов'язане з проходженням через критичні частоти обертання ротора компресора в системі двигуна. Це припущення також підсилювалося недопустимо високим рівнем вібрацій окремих екземплярів двигунів АИ-20 в режимі малого газу, де коливання мають резонансний характер.

Аналітичні розрахунки критичної швидкості обертання ротора компресора вказаного двигуна, проведені за різними методиками, показують суттєву різницю між ними. Так, перша критична швидкість обертання ротора компресора:

а) визначена методом Стодоли [123] з урахуванням перерізувальних сил, але без урахування податливості місць з'єднань ступенів один з одним через відсутність надійних даних дорівнює 22150 об/хв;

б) визначена інтегральним методом без врахування перерізувальних сил, виявилась такою, що дорівнює 25400 об/хв;

в) уточнена, знайдена з урахуванням місцевих податливостей, дорівнює 19400 об/хв, причому урахування місцевих податливостей проведене за експериментально знайденою податливістю ротора компресора в середньому перерізі;

г) з урахуванням податливості опор складає 15800 об/хв.;

д) з урахуванням гіроскопічного ефекту – 16600 об/хв.

е) експериментально отримане значення реальної критичної швидкості становить 11200 об/хв.

Дані про розрахункові значення критичного числа обертів містяться у [65, 122].

Таким чином, найменша похибка для розглянутих методів складає 29%. Така суттєва різниця в розрахункових і дійсних значеннях, а також важливість та визначальність ротора двигунів АИ-20 під час їх експлуатації поставила проблему необхідності розробки методів постановки і розв'язання ОЗ ідентифікації пружно-інерційних та дисипативних характеристик машини за результатами відповідних експериментів.

З метою уточнення величини критичної частоти обертання ротора, а також визначення характеристик жорсткості і стабільності жорсткостей роторів компресора двигуна АИ-20 була здійснена робота зі статичних випробувань декількох роторів цієї конструкції.

Для визначення статичних коефіцієнтів впливу (податливості) ротора були здійснені його статичні випробування на спеціальному обладнанні, представленому на рис. 3.1. Коефіцієнти впливу  $\alpha_{ij}$ , які дорівнюють величині прогину у  $i$ -му перерізі від дії одиничної сили у  $j$ -му перерізі,  $i, j=1,2,\dots,10$ , визначали за методикою, викладеною в роботах [123, 206, 207].

Розрахована за різними методами, зокрема за статичними коефіцієнтами впливу і методом початкових параметрів критична частота обертання серійного ротора компресора двигуна АИ-20 на жорстких опорах лежить у межах від  $n_{кр}=11200$  до  $n_{кр}=12200$  об/хв., тобто може змінюватись на 9-10% в залежності від значень натягів за посадковими поясами дисків і штифтам, а також від жорсткості ділянок між ступенями ротора.

Розрахована шляхом частотного аналізу спрощеної 3D-моделі (рис. 3.2) у програмі SolidWorks перша критична частота обертання дорівнює  $n_{кр}=10380$  об/хв.

Нижнє значення критичної частоти обертання  $n_{кр}=11200$  об/хв. отримано для ротора №603255 з мінімальними натягами по посадковим поясам дисків і штифтів, верхня – для ротора №8808, який відпрацював свій ресурс. Коефіцієнти впливу  $\alpha_{ik}$  досліджених роторів, де  $i$  – номер ступеня,  $k$  – ступінь прикладення навантаження, наведені у додатку А.2. Найподатливішими ділянками ротора виявились ділянки 10-го ступеня і заднього вала ротора.

Штифтові з'єднання ступенів ротора компресора стабільно забезпечують лінійну характеристику жорсткості системи при статичних випробуваннях роторів.

Треба відзначити, що для визначення форми пружної лінії ротора компресора на експлуатаційних частотах обертання при різноманітній жорсткості з'єднань дисків і максимально допустимих значеннях дисбалансів на них, а також для експериментального визначення критичної частоти обертання ротора з урахуванням податливості опор і мас, приєднаних до корпусу компресора двигуна, доцільно було провести динамічні дослідження ротора на вібровимірному балансувальному стенді.

*Ідентифікація ексцентриситетів для п'ятимасової моделі.*  
Ідентифікацію ексцентриситетів з достатньою точністю можна провести без спрощення математичної моделі до одномасової, застосовуючи запропоновані в розділі 2 спеціальні прийоми для підвищення стійкості розв'язків лінійних дискретних ОЗ.

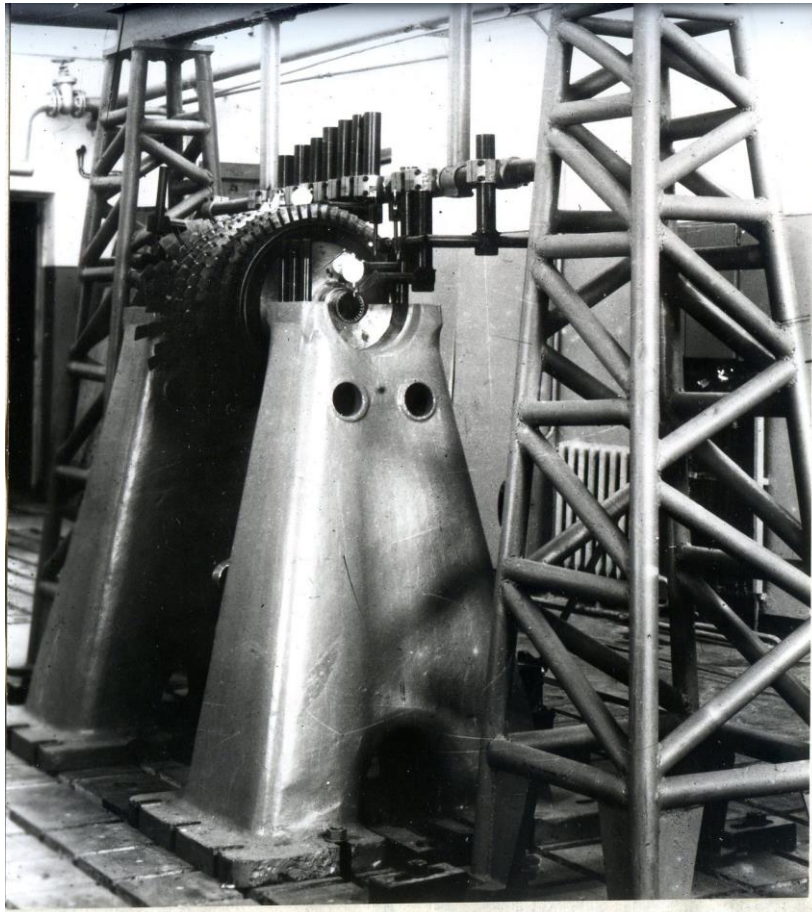


Рис. 3.1. Загальний вигляд установки для визначення статичних коефіцієнтів впливу

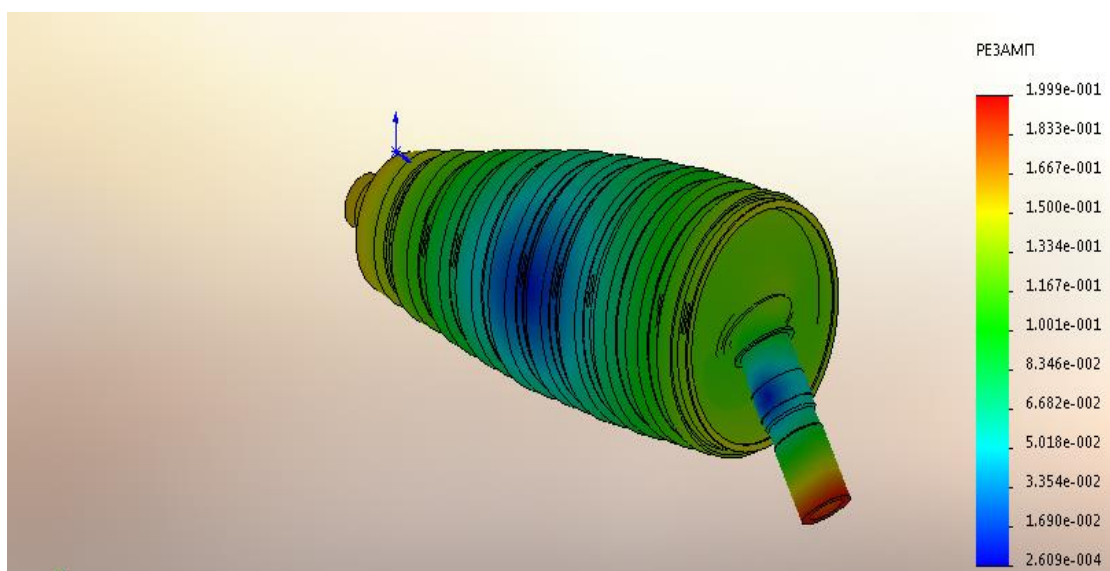


Рис.3.2. 3D-модель, досліджена під час частотного аналізу в програмі SolidWorks

Застосовуючи статистичні підходи до забезпечення стійкості розв'язків, за математичне сподівання вимірних величин приймається їх істинне значення з огляду на припущення, що похибка вимірювання містить лише випадкову складову і не містить систематичної складової, а за середнє квадратичне відхилення (СКВ) – величина  $\Delta/3$ , де  $\Delta$  – точність вимірювального приладу. В такому разі шукані характеристики є також випадковими величинами, розподіленими за деякими законами.

Алгоритм пошуку невідомих за МНК може бути різноманітним, наприклад:

- вимірюють праві частини певну кількість разів і при кожному вимірюванні визначають невідомі;
- після обробки отриманих даних статистичними методами визначають математичне сподівання останніх;
- вимірюють праві частини у різноманітних умовах, а далі, так само, як і раніше, визначають невідомі;
- вимірюють різноманітні параметри об'єкту, які можуть бути виражені через одні і ті ж характеристики, далі визначають ці невідомі характеристики, що приймаються за різні реалізації випадкових величин, і обчислюють їх математичні сподівання.

Всі ці алгоритми за ефективністю є рівнозначними і перевагу слід надавати тому з них, який, по-перше, легше здійснити, а по-друге, для якого відомий закон розподілу величин, які розглядаються як випадкові, що дає змогу з деякою надійністю дати оцінку їх розкиду.

Розглянемо застосування оцінок за МНК і усіченої оцінки за МНК для розв'язання ОЗ визначення невідомих ексцентриситетів ротора за допомогою статичних коефіцієнтів впливу і динамічних прогинів і розв'язанням матричного рівняння (2.18)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\omega^2(\mathbf{Y} + \mathbf{e}),$$

де  $\mathbf{Y} = [y_i]_{1 \times n}$  – вектор прогинів ротора у  $n$  його перерізах, виміряних на частоті обертання  $\omega$ ;

$\mathbf{e} = [e_i]_{1 \times n}$  – вектор ексцентриситетів ротора у цих же перерізах;

$\mathbf{A} = [a_{ik}]_{n \times n}$ ,  $i, k = \overline{1, n}$  – матриця добутків коефіцієнтів впливу  $\alpha_{ik}$  і мас  $m_k$ , розташованих у досліджуваних перерізах.

Для пошуку ексцентриситетів була використана п'ятимасова математична модель ротора компресора, представлена на рис. 3.3.

У розділі 2 були показані залежності відносних похибок ідентифікації ексцентриситетів від відносних похибок вимірювання прогинів, матриці статичних коефіцієнтів впливу і частоти обертання ротора, виражені через число обумовленості матриці.

Виходячи з цих залежностей була досліджена п'ятимасова модель впливу з матрицею добутків  $\alpha_{ik} \times m_k$ ,  $i, k = \overline{1, 5}$  виду

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8,3 & 7,4 & 7,7 & 6,0 & 4,9 \\ 6,7 & 9,1 & 11,0 & 9,1 & 9,2 \\ 4,8 & 7,8 & 12,0 & 10,7 & 12,0 \\ 3,8 & 7,0 & 10,6 & 12,2 & 15,8 \\ 2,4 & 4,7 & 9,4 & 11,8 & 19,0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}, \frac{M}{H} \cdot кг.$$

Критичні частоти обертання ротора на жорстких опорах дорівнюють 14049, 29025, 60429, 118250, 419300 об/хв. Число обумовленості матриці  $cond(\mathbf{A}) \approx 900$ . Далі був проведений наступний чисельний експеримент.

*Алгоритм чисельного експерименту.*

1. На основі заданих точних значень ексцентриситетів перерізів  $\mathbf{e} = [77,4; 89,9; 105,0; 79,0; 59,5]^T \cdot 10^{-6}$  м. були визначені точні значення прогинів  $\mathbf{Y}$  ротора розв'язанням прямої задачі, в якому матриця  $\mathbf{A}$  передбачалась заданою без похибок. Ці значення  $\mathbf{Y} = [76,35; 100,23; 107,52; 109,53; 98,16]^T \cdot 10^{-6}$  м були прийняті за математичне сподівання прогинів у заданих перерізах.

2. Приймавши СКВ таким, що дорівнює  $\sigma = \Delta/3$ , де  $\Delta = 10^{-5}$  м – точність вимірювань, використовуючи комп'ютерний генератор випадкових чисел, були отримані різні реалізації прогинів як випадкових величин, розподілених за нормальним законом розподілу з вказаними вище параметрами. У наведеному експерименті було передбачено генерування 50 реалізацій прогинів у кожному із розглянутих перерізів.

3. Для кожної реалізації  $Y$  були знайдені реалізації  $e$ , а за ними – їх математичні сподівання, що співпадають з ОНК  $\hat{e}$ .

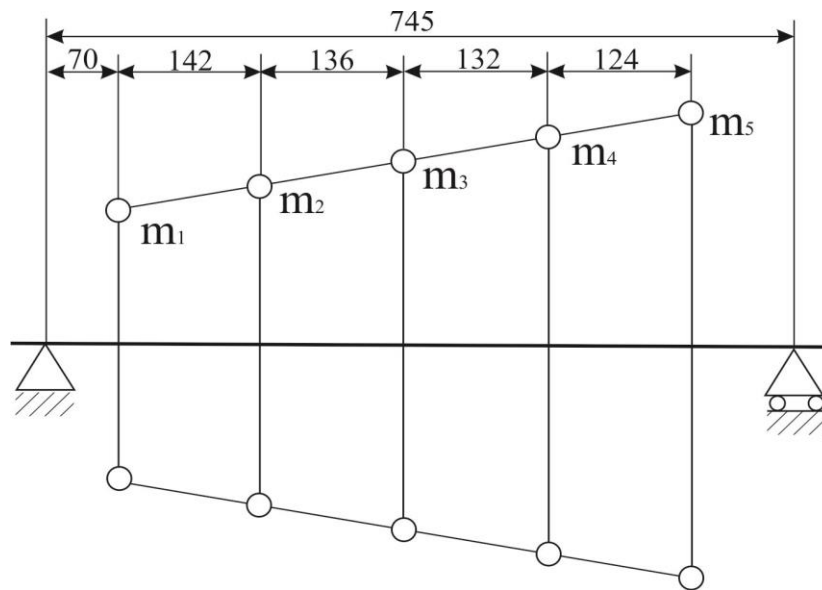


Рис. 3.3. П'ятимасова математична модель ротора компресора

Як показали розрахунки, через погану обумовленість задачі:

- при точності вимірювань 0,1 розкид значень шуканих величин досягав 500%;
- при точності 0,01 – 200%;
- при точності 0,001 – 100%.

Отже, внаслідок природного розкиду вимірювальних величин помилка у визначенні шуканих ексцентриситетів могла досягати 400-500% в залежності від точності вимірювань, що є незадовільним результатом розв'язання задачі. В той же час, ексцентриситети, визначені запропонованим методом з застосуванням МНК при 50-ти вимірюваннях прогинів, відрізнялись від

істинних значень не більше 15% при точності вимірювань 0,1, на 2% – при точності вимірювань 0,01, на 0,5% – при точності вимірювань 0,001.

4. Застосуємо тепер лінійну фільтрацію ОНК шляхом усічення молодших компонент ОНК за формулою (2.50). Поклавши  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\omega^2(1 - \mathbf{A}\omega^2)^{-1}$ , приходимо до розв'язання лінійної дискретної ОЗ типу

$$\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{e}, \quad (3.1)$$

де

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0,228 & 0,203 & 0,195 & 0,155 & 0,1299 \\ 0,184 & 0,246 & 0,284 & 0,246 & 0,2457 \\ 0,143 & 0,230 & 0,303 & 0,295 & 0,3472 \\ 0,111 & 0,195 & 0,290 & 0,336 & 0,4440 \\ 0,067 & 0,139 & 0,234 & 0,316 & 0,5200 \end{bmatrix}.$$

5. Оцінимо, на скільки матриця  $\hat{\mathbf{A}}$  є погано обумовленою. Для цього за допомогою SVD-розкладання знайдемо її сингулярні числа  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ , розташовані у порядку спадання:

$$\mathbf{S} = \{1,3; 0,3; 0,06; 0,01; 0,002\}.$$

Оскільки виконується нерівність  $0 < \sigma_{\min} < 1$ , матриця  $\hat{\mathbf{A}}$  є дійсно погано обумовленою, і коефіцієнт підсилення похибки розв'язку  $\mathbf{e}$ , підрахований за формулою (2.27) дорівнює  $q = 1/\sigma_{\min} = 447$ .

Число обумовленості матриці  $cond(\hat{\mathbf{A}}) \approx 573$ . Це означає, що при реальній точності вимірювання прогинів ротора 10 мкм, що відповідає відносній похибці 6-10%, похибка у визначенні ексцентриситетів для звичайного інверсного розв'язку  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{Y}$  системи (3.1) може сягнути 4 мм (5730%), тобто отриманий розв'язок буде абсолютно ненадійним.

Отже, застосування ОНК в цій ситуації при 50-ти вимірюваннях покращить точність ненабагато (оцінка зверху зменшиться приблизно в  $\sqrt{n} \approx 7$  разів), що теж є незадовільним результатом.



Застосувавши співвідношення (2.24) і (2.36) вдалося оцінити достатню похибку кожного із 5-ти невідомих ексцентриситетів. Результати розрахунків представлені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Максимальні похибки ідентифікації ексцентриситетів для звичайного розв'язку рівняння (3.1) без застосування регуляризаційних прийомів

| Точні значення                | Абсолютне значення похибки | Відносне значення похибки |
|-------------------------------|----------------------------|---------------------------|
| $e_1 = 77,4 \cdot 10^{-3}$ мм | 1,5 мм                     | 1815%                     |
| $e_2 = 89,8 \cdot 10^{-3}$ мм | 4,4 мм                     | 4825%                     |
| $e_3 = 105 \cdot 10^{-3}$ мм  | 5,0 мм                     | 4650%                     |
| $e_4 = 79 \cdot 10^{-3}$ мм   | 3,2 мм                     | 3921%                     |
| $e_5 = 59,5 \cdot 10^{-3}$ мм | 0,7 мм                     | 1073%                     |

6. Для перевірки дієвості запропонованого методу лінійної фільтрації з використанням методу головних компонент [72, 274, 296] за допомогою програми MATLAB був проведений наступний чисельний експеримент.

Визначено матрицю Фішера

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0,3273 & 0,4145 & 0,5008 & 0,4771 & 0,5375 \\ 0,4145 & 0,5629 & 0,7082 & 0,7002 & 0,8257 \\ 0,5008 & 0,7082 & 0,9137 & 0,9263 & 1,1251 \\ 0,4771 & 0,7002 & 0,9263 & 0,9651 & 1,2090 \\ 0,5375 & 0,8257 & 1,1251 & 1,2090 & 1,5683 \end{bmatrix} \times 10^9.$$

7. Здійснивши спектральне розкладання матриці Фішера, одержали діагональну матрицю  $\mathbf{D}$  з власними значеннями на головній діагоналі (вибірковою дисперсією головних компонент) і матрицю власних векторів  $\mathbf{V}$ .

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 64215 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14310 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2919 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 568 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 104 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0,2463 & 0,5968 & 0,7071 & -0,2176 & 0,1891 \\ -0,3559 & 0,4432 & -0,1751 & 0,5095 & -0,6218 \\ -0,4670 & 0,2426 & -0,5148 & 0,1023 & 0,6690 \\ -0,4831 & -0,1000 & -0,2230 & -0,7616 & -0,3561 \\ -0,6010 & -0,6152 & 0,3932 & 0,3202 & 0,0572 \end{bmatrix}.$$

Звідси видно, що сумарна вибіркова дисперсія складає 82116. Дисперсія головної компоненти складає 78,2% сумарної дисперсії, а три головні компоненти вичерпують 99,2% повної дисперсії. Для фільтрації оцінки її усіченням обмежимося трьома власними векторами коваріаційної матриці ( $v=3$ ). Для цього застосуємо фільтр у вигляді діагональної матриці  $\mathbf{W} = \text{diag}\{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0\}$ . Тоді маємо

$$\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} -0,2463 & 0,5968 & 0,7071 & 0 & 0 \\ -0,3559 & 0,4432 & -0,1751 & 0 & 0 \\ -0,4670 & 0,2426 & -0,5148 & 0 & 0 \\ -0,4831 & -0,1000 & -0,2230 & 0 & 0 \\ -0,6010 & -0,6152 & 0,3932 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -0,1741 \\ 0,0686 \\ 0,0012 \\ -0,0508 \\ 0,4897 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

8. Оцінювання похибок розв'язання відбувалось за результатами 100-разового моделювання процесу розв'язання ОЗ. В таблиці 3.2 подані результати розв'язання ОЗ ідентифікації ексцентриситетів у вигляді інтервальних оцінок при довірчій імовірності 0,997 (за правилом  $6\sigma$ ). Як видно з таблиці, похибка розв'язку ОЗ добре узгоджується з похибкою вимірювань прогинів ( $\Delta u = 10$  мкм). Отриманий розв'язок задачі стійкий і задовольняє поставлені вимоги до точності.

Усічена оцінка ідентифікації ексцентриситетів, підрахована за формулою (2.50), дорівнює  $\mathbf{e}_r = [84,64; 92,14; 97,31; 76,96; 62,88]^T \cdot 10^{-6}$  м. При цьому відносна похибка усіченої оцінки, підрахована як  $(\|\mathbf{e}_r - \mathbf{e}\|)/\|\mathbf{e}\|$  склала  $\delta e = 0,18\%$ . В той же час оцінка за МНК дорівнює  $\hat{\mathbf{e}} = [188,3; 238,3; 419,8; 58,8; 74,6]^T \cdot 10^{-6}$  м. Відносна похибка ОНК склала  $\delta e = 182\%$ , тобто точність

розв'язку з використанням усіченої оцінки порівняно із звичайним ОНК збільшилась на три порядки. Ці цифри наочно демонструють достатньо високу точність і ефективність описаного статистичного методу одержання регулярних розв'язків лінійних ОЗ за рахунок лінійної фільтрації ОНК [60, 80].

Таблиця 3.2

Порівняльна таблиця значень ідентифікованих  
ексцентриситетів для 5-масової моделі ротора

| Інтервальні оцінки значень<br>ексцентриситетів, одержані за<br>ОНК | Інтервальні оцінки значень<br>ексцентриситетів, одержані за<br>фільтрованою ОНК |
|--|---|
| $63,0 \leq e_1 \leq 103,8$ мкм;                                    | $73,1 \leq e_1 \leq 78,2$ мкм;  |
| $5,3 \leq e_2 \leq 134,5$ мкм;                                     | $89,7 \leq e_2 \leq 91,2$ мкм;  |
| $52,9 \leq e_3 \leq 192,5$ мкм;                                    | $100,5 \leq e_3 \leq 104,2$ мкм;  |
| $33,4 \leq e_4 \leq 115,0$ мкм;                                    | $78,6 \leq e_4 \leq 80,2$ мкм;  |
| $50,3 \leq e_5 \leq 67,7$ мкм;                                     | $58,4 \leq e_5 \leq 61,1$ мкм;  |

Одержані результати демонструють:

- ефективність описаного методу розв'язання задачі ідентифікації і свідчать про ефективність застосування статистичних алгоритмів для ідентифікації ексцентриситетів гнучких роторів з заданою точністю. На рис. 3.4 продемонстровані порівняльні оцінки ідентифікації ексцентриситетів в задачі (3.1) різними методами: МНК, усіченням оцінки за МНК і значення після обробки методом головних компонент (РСА);

- при одноразовому вимірюванні і розв'язанні задачі середня похибка визначення ексцентриситетів складає 2,7 мм, при застосуванні ОНК – 0,627 мм, при застосуванні усіченої оцінки ОНК – 5,77 мкм.

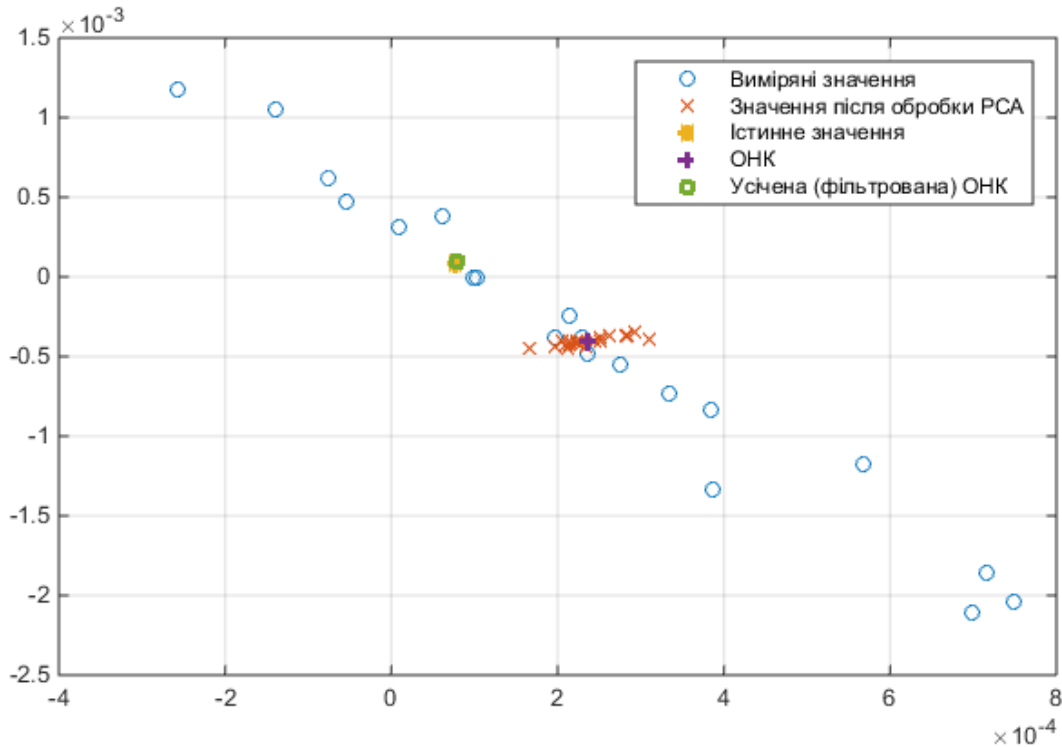


Рис. 3.4. Демонстрація ефективності методу усіченої оцінки для розв'язання задачі (3.1)

Програма реалізації методу усіченої ОНК для одержання стійких розв'язків задачі ідентифікації ексцентриситетів ротора компресора авіадвигуна АИ-20 представлена в додатку А.3.

*Примітка.* Застосування оптимального фільтра з вагами (2.51) в даній задачі показало дещо гірший результат – похибки розв'язків виявились в декілька разів вищі, однак ці похибки були на порядок меншими за похибки ОНК.

*Ідентифікація ексцентриситетів для 10-масової моделі.* Як зазначалось у розділі 2, найефективніші оцінки розв'язків ОЗ можна отримати для відносно нескладних моделей. У випадку одномасової і п'ятимасової моделей десятиступінчатого компресора задовільна точність розв'язків досягається регуляризацією і закругленням: з одного боку зменшується вплив компонент ОНК, що мають найбільшу дисперсію і несуть найменше інформації, а з іншого – закруглення системи зниженням порядку матриці (1 або 5), яке покращує обумовленість системи. Проте розроблені в розділі 2 ефективні методи розв'язання ОЗ дають можливість з достатньою точністю ідентифікувати

параметри десятиступінчатого компресора і без спрощення його моделі. Далі показані результати чисельного експерименту з проведення ідентифікації ексцентриситетів ротора компресора авіадвигуна для більш точної десятимасової моделі, із застосуванням статистичних методів регуляризації.

Матриця статичних коефіцієнтів впливу  $\mathbf{A} = [\alpha_{ik}]_{i,k=1}^{10}$  з числом обумовленості  $cond(\mathbf{A}) = 2030$  для ротора №603244 має вигляд

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2,2 & 2,3 & 2,26 & 1,9 & 1,85 & 1,5 & 1,55 & 1,3 & 1,05 \\ 2,4 & 2,5 & 3,75 & 4 & 3,6 & 3,44 & 3,15 & 3 & 2,75 & 2,4 \\ 2,4 & 3,7 & 4,75 & 4,85 & 4,6 & 4,6 & 4,2 & 4,1 & 3,9 & 3,4 \\ 2,4 & 53,6 & 4,95 & 5,45 & 5,27 & 5,55 & 4,85 & 5,5 & 5,2 & 4,55 \\ 2,5 & 3,75 & 5,2 & 5,67 & 6,35 & 6,35 & 5,6 & 6,55 & 6,45 & 5,6 \\ 2,45 & 3,7 & 4,8 & 5,8 & 6,4 & 7,2 & 7,4 & 7,4 & 7,5 & 7,3 \\ 2,04 & 3,7 & 4,85 & 6 & 6,3 & 7,35 & 7,7 & 8,8 & 8,8 & 8,2 \\ 1,6 & 3,5 & 4,5 & 5,1 & 6,7 & 7,35 & 8,2 & 9,1 & 9,4 & 9,1 \\ 1,8 & 3,1 & 4,85 & 5,85 & 6,3 & 7,5 & 7,85 & 9,8 & 10,4 & 10 \\ 1,2 & 2,7 & 3,5 & 5,6 & 7,2 & 7,6 & 9,3 & 8,7 & 10,25 & 9,9 \end{bmatrix} \times 10^{(-7)}, \text{м/Н.}$$

Розв'язанню підлягала лінійна дискретна ОЗ типу (3.1), де відповідна матриця  $\hat{\mathbf{A}}$  з числом обумовленості  $cond(\hat{\mathbf{A}}) = 79,5$  має вигляд

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0,497 & 0,111 & -0,241 & -0,009 & -0,525 & -0,579 & -0,078 & -0,198 & 0,427 & 0,479 \\ -0,007 & -0,368 & -0,225 & 0,012 & -0,245 & -0,340 & -0,004 & -0,154 & 0,216 & 0,257 \\ -0,427 & -0,202 & -0,199 & -0,091 & -0,299 & -0,267 & 0,058 & -0,216 & 0,181 & 0,213 \\ -0,359 & -0,279 & -0,187 & -0,134 & -0,143 & -0,068 & -0,264 & 0,013 & 0,077 & 0,035 \\ -0,338 & -0,356 & -0,111 & -0,402 & 0,419 & -0,075 & -0,773 & -0,001 & 0,295 & -0,040 \\ -0,017 & -0,097 & -0,656 & -0,301 & -0,173 & 0,406 & 0,718 & -0,133 & -0,783 & -0,252 \\ 0,012 & 0,209 & -0,011 & -0,122 & -0,567 & -0,119 & 0,124 & 0,313 & -0,450 & -0,379 \\ -0,009 & 0,267 & 0,075 & -0,515 & 0,102 & -0,133 & 0,091 & 0,095 & -0,529 & -0,393 \\ 0,330 & 0,090 & 0,563 & 0,328 & -0,476 & -0,519 & -0,812 & -0,272 & 0,082 & 0,088 \\ -0,059 & -0,145 & -0,291 & 0,186 & 0,383 & 0,154 & 0,129 & -0,509 & -0,366 & -0,593 \end{bmatrix}.$$

Оцінимо, наскільки матриця  $\hat{\mathbf{A}}$  є погано обумовленою. Для цього за допомогою SVD-розкладання знайдемо її сингулярні числа:  $\mathbf{S} = \{2,1; 1,4; 1,3; 1; 0,9; 0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,03\}$ .

Оскільки виконується нерівність  $0 < \sigma_{\min} < 1$ , матриця  $\hat{\mathbf{A}}$  є дійсно погано обумовленою, і коефіцієнт підсилення абсолютної похибки розв'язку  $\epsilon$  дорівнює  $q = 1/\sigma_{\min} = 38$ . Оцінювання похибок одержаних розв'язків  $e_i$  без застосування регуляризаційних прийомів, здійснене за формулою (2.36) показало, що похибки значень ідентифікованих ексцентриситетів є незадовільними (табл. 3.3). Очевидно, розв'язання задачі (3.1) потребує звуження ОДО шляхом забезпечення стійкості розв'язків.

Таблиця 3.3

Максимальні похибки ідентифікації ексцентриситетів для звичайного розв'язку (3.1) без застосування регуляризаційних прийомів

| Компресор №603244                                   |                  | Компресор №603255  |                  | Компресор №8808   |                  |
|---|------------------|--------------------|------------------|-------------------|------------------|
| Абсолютні і відносні значення похибок ідентифікації |                  |                    |                  |                   |                  |
| $\Delta e_i$ , мм                                   | $\delta e_i$ , % | $\Delta e_i$ , мкм | $\delta e_i$ , % | $\Delta e_i$ , мм | $\delta e_i$ , % |
| 0,101   | 283              | 63,91              | 282              | 0,0001            | 99               |
| 0,103   | 407              | 42,64              | 60               | 0,0539            | 185              |
| 0,215   | 238              | 0,86               | 99               | 0,0465            | 69               |
| 0,266   | 736              | 100,17             | 16               | 0,0160            | 87               |
| 0,219   | 456              | 75,73              | 29               | 0,0279            | 74               |
| 0,242   | 233              | 12,91              | 89               | 0,0035            | 97               |
| 0,100   | 180              | 5,03               | 95               | 0,0121            | 89               |
| 0,185   | 388              | 2,30               | 97               | 0,0661            | 76               |
| 0,325   | 311              | 3,69               | 97               | 0,0521            | 67               |
| 0,255   | 588              | 5,86               | 93               | 0,0262            | 64               |

Для забезпечення стійкості були застосовані МНК, метод усіченої оцінки, оптимальна і квазіоптимальна фільтрація ОНК разом з моделюванням відповідної прямої задачі. Точне значення вектора ексцентриситетів  $\mathbf{e}_0$ , оцінка за МНК  $\langle \mathbf{e} \rangle$  для 20-ти вимірювань прогинів і усічена оцінка  $\hat{\mathbf{e}}$  мають вигляд

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 0,0552 \\ 0,0336 \\ 0,1564 \\ 0,0418 \\ 0,0618 \\ 0,1825 \\ 0,1252 \\ 0,0644 \\ 0,1540 \\ 0,0525 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \text{ м}, \quad \langle \mathbf{e} \rangle = \begin{bmatrix} 0,0570 \\ 0,0355 \\ 0,1552 \\ 0,0395 \\ 0,0587 \\ 0,1858 \\ 0,1257 \\ 0,0619 \\ 0,1607 \\ 0,0478 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \text{ м}, \quad \hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0,0566 \\ 0,0333 \\ 0,1548 \\ 0,0423 \\ 0,0615 \\ 0,1831 \\ 0,1246 \\ 0,0637 \\ 0,1550 \\ 0,0522 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \text{ м}.$$

Аналіз отриманих результатів свідчить, що похибка для ОНК і для усіченої ОНК склала  $\delta e \approx 3\%$ .

Аналогічні дослідження і розрахунки були проведені для матриці статичних коефіцієнтів впливу  $\mathbf{A} = [\alpha_{ik}]_{i,k=1}^{10}$  з числом обумовленості  $cond(\mathbf{A}) = 1037$  для ротора №603255, яка має вигляд

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,6 & 3,45 & 2,55 & 2,9 & 2,8 & 2,16 & 3,0 & 2,0 & 1,8 & 1,4 \\ 2,8 & 3,7 & 4,35 & 3,7 & 3,35 & 3,0 & 3,0 & 2,9 & 2,45 & 2,3 \\ 2,8 & 4,1 & 5,1 & 5,0 & 5,2 & 4,45 & 4,6 & 4,6 & 4,0 & 3,7 \\ 2,8 & 4,6 & 5,35 & 6,2 & 6,42 & 6,2 & 6,4 & 5,3 & 5,36 & 5,3 \\ 2,4 & 3,9 & 5,35 & 5,9 & 6,55 & 6,3 & 6,45 & 6,75 & 6,3 & 6,2 \\ 2,45 & 4,3 & 5,3 & 6,4 & 7,0 & 7,75 & 8,3 & 7,9 & 7,85 & 7,7 \\ 2,1 & 3,15 & 5,2 & 6,3 & 6,95 & 7,95 & 8,9 & 8,85 & 8,8 & 8,4 \\ 1,85 & 3,5 & 5,1 & 5,9 & 6,8 & 7,7 & 8,7 & 9,65 & 9,5 & 9,3 \\ 1,6 & 3 & 4,85 & 5,6 & 6,9 & 7,85 & 8,8 & 10,4 & 10,6 & 10,55 \\ 1,4 & 3,3 & 4,3 & 5,6 & 7,0 & 8,1 & 9,4 & 9,4 & 10,5 & 11,4 \end{bmatrix} \times 10^{(-7)}, \text{ м/Н}.$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -4,973 & -6,064 & 0,978 & 1,218 & 1,247 & 3,153 & -1,652 & 11,038 & 1,126 & -11,654 \\ -3,097 & -3,306 & -0,243 & 0,852 & 1,059 & 2,930 & -0,189 & 2,337 & -0,522 & -3,571 \\ -0,801 & -0,496 & -0,617 & 0,087 & 0,622 & 0,659 & 0,042 & -1,643 & -0,669 & 1,270 \\ 5,891 & 6,491 & -1,928 & -1,956 & -2,558 & -4,173 & 2,520 & -11,139 & -0,345 & 11,639 \\ 2,374 & 2,989 & -1,094 & -0,832 & -0,568 & -1,749 & 0,806 & -6,320 & -0,809 & 6,581 \\ 1,333 & 1,178 & 0,185 & -0,798 & -1,396 & -1,568 & -0,160 & 0,455 & 0,649 & 0,216 \\ -0,600 & -1,463 & 1,683 & -0,205 & -0,688 & -1,107 & -1,882 & 6,353 & 1,417 & -5,179 \\ -4,070 & -4,364 & 1,380 & 1,079 & 1,310 & 2,304 & -2,202 & 7,851 & 0,222 & -8,239 \\ -4,598 & -4,747 & 0,841 & 1,520 & 2,259 & 3,409 & -1,953 & 6,147 & -0,534 & -7,542 \\ 4,891 & 5,335 & -1,904 & -1,203 & -1,720 & -2,612 & 2,981 & -10,449 & -1,208 & 9,321 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 880.$$

Її сингулярні числа  $\mathbf{S} = \{38,9; 7,0; 2,2; 1,2; 1,0; 0,5; 0,3; 0,2; 0,1; 0,04\}$ , коефіцієнт підсилення абсолютної похибки розв'язку  $q = 1/\sigma_{\min} = 23$ . Похибки значень ідентифікованих ексцентриситетів є неприйнятними (табл. 3.3). Точне значення вектора ексцентриситетів  $\mathbf{e}_0$ , оцінка за МНК  $\langle \mathbf{e} \rangle$  і фільтрована оцінка  $\hat{\mathbf{e}}$  після застосування фільтра для головних компонент ОНК у вигляді набору вагових коефіцієнтів  $\mathbf{W} = \text{diag}\{1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0,39\}$  мають вигляд

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 0,0167 \\ 0,1068 \\ 0,1097 \\ 0,0864 \\ 0,1061 \\ 0,1153 \\ 0,1086 \\ 0,0850 \\ 0,1267 \\ 0,0819 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \text{м}, \langle \mathbf{e} \rangle = \begin{bmatrix} 0,0176 \\ 0,1059 \\ 0,1210 \\ 0,0539 \\ 0,1184 \\ 0,1203 \\ 0,1138 \\ 0,0812 \\ 0,1287 \\ 0,0782 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \text{м}, \hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0,0203 \\ 0,1038 \\ 0,1100 \\ 0,0839 \\ 0,1056 \\ 0,1164 \\ 0,1092 \\ 0,0876 \\ 0,1225 \\ 0,0840 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \text{м}.$$

Згідно з отриманими результатами, похибка для ОНК склала  $\delta \mathbf{e}_1 = 12\%$ , похибка усіченої оцінки з фільтром  $\mathbf{W} = \text{diag}\{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0\}$  склала  $\delta \mathbf{e}_3 = 7,9\%$ , а похибка фільтрованої оцінки  $\hat{\mathbf{e}}$  виявилась у 4,9 разів меншою за ОНК  $\Delta \mathbf{e}_2 = 2,5\%$ .



Для ротора компресора №8808 маємо:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,15 & 2,53 & 2,37 & 2,3 & 1,95 & 1,8 & 1,55 & 1,47 & 1,44 & 1,13 \\ 2,5 & 3,75 & 3,77 & 3,9 & 3,84 & 3,59 & 3,25 & 2,65 & 2,8 & 2,5 \\ 2,35 & 3,65 & 4,75 & 4,7 & 4,2 & 3,9 & 3,5 & 4,3 & 3,7 & 3,45 \\ 2,05 & 3,35 & 5,1 & 2,45 & 4,15 & 4,2 & 3,7 & 5,6 & 5,0 & 4,1 \\ 1,26 & 3,9 & 4,95 & 4,4 & 4,9 & 4,9 & 4,1 & 6,3 & 5,85 & 5,3 \\ 2,1 & 3,6 & 4,7 & 5,5 & 5,9 & 6,65 & 6,7 & 7,0 & 7,0 & 6,65 \\ 1,5 & 2,6 & 4,75 & 4,52 & 5,3 & 5,8 & 6,55 & 8,45 & 7,95 & 7,7 \\ 1,5 & 3,15 & 4,4 & 4,8 & 6,05 & 6,6 & 8,0 & 8,7 & 8,9 & 8,2 \\ 1,4 & 2,9 & 4,9 & 4,25 & 5,15 & 5,15 & 5,15 & 9,75 & 9,9 & 9,0 \\ 1,25 & 2,7 & 4,0 & 4,5 & 5,7 & 6,45 & 7,65 & 8,9 & 9,7 & 9,7 \end{bmatrix} \times 10^{(-7)}, \text{ м/Н.}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0,534 & -0,556 & -0,641 & -0,153 & -0,462 & 0,243 & 1,291 & -0,256 & -0,569 & 0,068 \\ 0,099 & -0,307 & -0,753 & -0,139 & -0,197 & 0,278 & 0,528 & -0,932 & -0,294 & 0,759 \\ -0,138 & -0,464 & -0,092 & -0,038 & -0,333 & -0,446 & 0,159 & 0,167 & -0,167 & 0,222 \\ -0,395 & -0,444 & 0,199 & -0,612 & -0,101 & -0,104 & 0,193 & 0,756 & -0,051 & -0,757 \\ -1,457 & -0,035 & -0,029 & -0,079 & 0,322 & 0,286 & -0,749 & 0,297 & -0,014 & -0,370 \\ 0,619 & 0,395 & -0,514 & -0,039 & -0,340 & -0,325 & -1,104 & -0,913 & 0,709 & 0,807 \\ 0,768 & 0,312 & 0,314 & -0,092 & -0,466 & -1,154 & -0,741 & 0,046 & 0,351 & 0,254 \\ 0,378 & 0,456 & 0,021 & -0,153 & -0,167 & -0,914 & -0,538 & 0,037 & 0,588 & -0,417 \\ -1,407 & -1,094 & 0,305 & 0,074 & 0,443 & 0,960 & 1,076 & 1,385 & -1,448 & -2,408 \\ 1,159 & 0,672 & 0,391 & 0,071 & -0,323 & -0,077 & -0,324 & -2,047 & -0,356 & 1,474 \end{bmatrix}.$$

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = 135,3$$

Сингулярні числа  $\mathbf{S} = \{5,4; 2,9; 1,9; 1,8; 1; 0,8; 0,5; 0,4; 0,2; 0,04\}$ , коефіцієнт підсилення похибки розв'язку  $q = 1/\sigma_{\min} = 25$ . Оцінювання похибок одержаних розв'язків  $e_i$  без застосування регуляризаційних прийомів (таблиця 3.3), показало необхідність застосування методів забезпечення стійкості. Похибка для ОНК склала  $\delta e_1 = 1,48\%$ , а похибка усіченої оцінки виявилась з точністю до десятих відсотка такою ж  $\delta e_2 = 1,45\%$ . Наведений приклад свідчить, що ОНК є досить ефективною оцінкою для лінійних дискретних ОЗ з

незначною обумовленістю матриць і найменшими власними числами розглянутого порядку. На рис. 3.5 проілюстровані різноманітні оцінки для ідентифікованих ексцентриситетів першого і другого дисків.

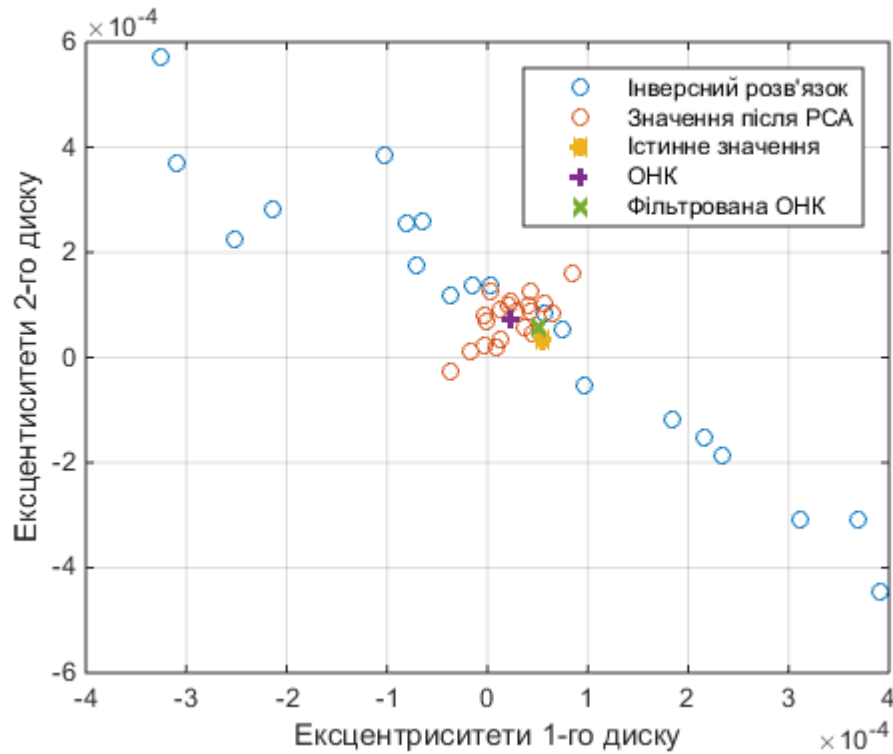


Рис. 3.5. Ілюстрація нестійкості розв'язків СЛАР (3.1)

У таблиці 3.4 представлені інтервальні значення ідентифікованих ексцентриситетів, отримані за методом МНК і усіченням ОНК. Аналіз показує, що розсіювання обох оцінок майже однакове, тобто для даної конкретної задачі спеціальні методи регуляризації не мають переваги перед ОНК.

Результати, подані у таблиці 3.4, потребують окремого аналізу і пояснення. Відомо, що вектор похибки розв'язку містить дві складові  $\Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X}_1 + \Delta \mathbf{X}_2$ , де  $\Delta \mathbf{X}_1$  – вектор зміщення,  $\Delta \mathbf{X}_2$  – вектор розсіювання. Нагадаємо, що всі методи регуляризації ОЗ направлені на суттєве зменшення розсіювання за рахунок деякого допустимого збільшення зміщення. У таблиці 3.4 в колонці 2 представлені результати ОНК, для якого  $\Delta \mathbf{X}_1 \ll \Delta \mathbf{X}_2$ , і результати фільтрованого ОНК, для якого  $\Delta \mathbf{X}_1 \gg \Delta \mathbf{X}_2$ . Вектор похибок  $\Delta \mathbf{X}$  для

обох випадків порівнювальний, що говорить про відсутність переваги додаткового методу регуляризації у порівнянні з ОНК. Очевидно, це пов'язано з достатньо невеликим числом обумовленості  $cond(\mathbf{A}) = 135$ .

Розраховані значення ексцентриситетів дисків у двох площинах ротора дозволяють за формулами (2.58) і (2.59) визначати дисбаланси та їх місця розташування і провести його динамічне балансування, завдяки чому вдалось знизити максимальні прогини ротора компресора АИ-20 у 2,5 рази.

Таблиця 3.4

Порівняльна таблиця інтервальних значень розв'язків  
СЛАР (3.1) для 10-масової моделі ротора

| Точні значення, мкм | Одержані за ОНК                   | Одержані за усіченою ОНК          |
|---------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $e_1=55,2$          | $36,1 \leq e_1 \leq 65,9$ мкм;    | $29,7 \leq e_1 \leq 37,0$ мкм;    |
| $e_2=33,6$          | $18,3 \leq e_2 \leq 59,3$ мкм;    | $56,1 \leq e_2 \leq 65,8$ мкм;    |
| $e_3=156,4$         | $115,9 \leq e_3 \leq 156,7$ мкм;  | $104,1 \leq e_3 \leq 113,4$ мкм;  |
| $e_4=41,8$          | $20,1 \leq e_4 \leq 89,1$ мкм;    | $93,5 \leq e_4 \leq 100,4$ мкм;   |
| $e_5=61,8$          | $44,2 \leq e_5 \leq 95,3$ мкм;    | $99,2 \leq e_5 \leq 105,3$ мкм;   |
| $e_6=182,5$         | $144,4 \leq e_6 \leq 203,5$ мкм;  | $131,3 \leq e_6 \leq 141,0$ мкм;  |
| $e_7=125,2$         | $103,1 \leq e_7 \leq 135,1$ мкм;  | $96,7 \leq e_7 \leq 104,1$ мкм;   |
| $e_8=64,4$          | $48,4 \leq e_8 \leq 96,4$ мкм;    | $98,1 \leq e_8 \leq 106,1$ мкм;   |
| $e_9=154,0$         | $100,8 \leq e_9 \leq 177,7$ мкм;  | $87,5 \leq e_9 \leq 95,5$ мкм;    |
| $e_{10}=52,5$       | $33,5 \leq e_{10} \leq 95,9$ мкм; | $86,2 \leq e_{10} \leq 96,7$ мкм; |

3.1.2. Аналіз амплітудно-частотної характеристики. Амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) авіадвигуна (рис. 3.6) будуються на підставі безперервного запису вібрацій у деяких характерних точках на його корпусі від моменту запуску до набору максимальних частот обертання. Вони характеризують не тільки рівень вібрацій машини, але і явно чи приховано містять в собі відомості про динамічні характеристики (масу, твердість, моменти інерції, демпфування) багатьох вузлів і деталей двигуна. Для складних машин ці характеристики мають багатoverшинний характер, що свідчить про те, що двигун проходить через кілька резонансних зон, але причини кожного з резонансів при цьому можуть залишатися невідомими. Тим часом, надзвичайно важливо вміти правильно ідентифікувати кожен з резонансів для боротьби з ним.

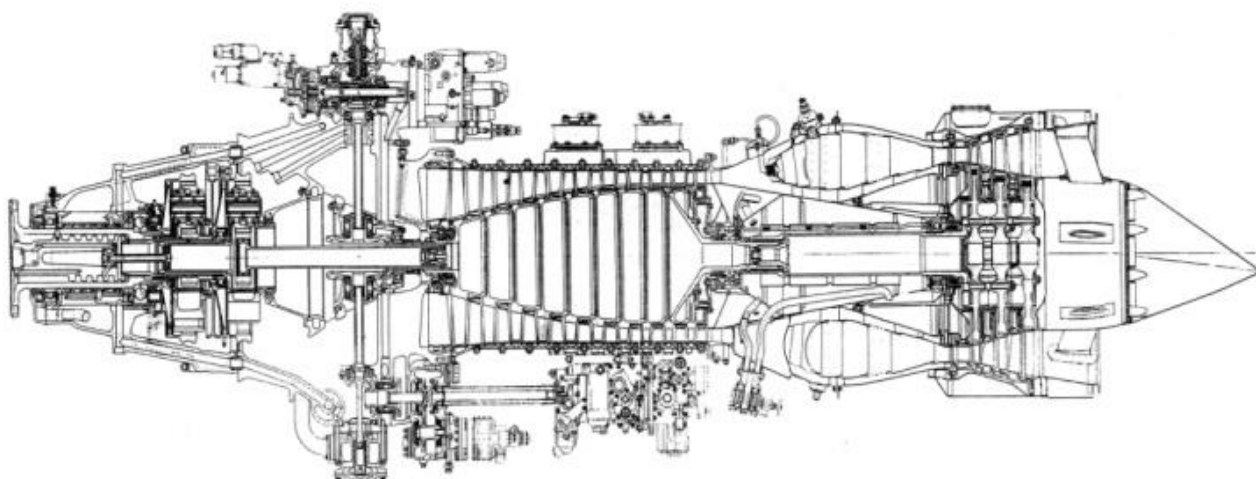


Рис. 3.6. Загальний вигляд ГТД АИ-20

Зазвичай проводяться дослідження динаміки окремих вузлів і машин в цілому, які не завжди приводять до успіху, оскільки далекі від натурних умов експлуатації виробу, не враховують різноманіття факторів впливу і динамічну модель системи. Проте винятково важливо знаходити точні значення динамічних характеристик, прив'язаних саме до математичної моделі, і тим самим підвищувати її ефективність. Цього можна досягти розв'язанням ОЗ динаміки за експериментально отриманою АЧХ.

На прикладі компресора авіадвигуна АИ-20 покажемо, як з математичної моделі коливань ротора багатоступінчастого компресора, розташованого на пружних опорах з приєднаними до них масами корпусів лобового картера і камери згорання, і записаної при обертанні ротора компресора АЧХ всієї коливальної системи, а також АЧХ всього двигуна, вдається ідентифікувати невідомі параметри цієї системи, а потім і розрахувати походження всіх п'яти резонансів.

У відповідності з програмою, дослідженню на вакуумному стенді МАИ-3 підлягали в числі інших і два ротори компресора: компресора №603243 з максимальними посадковими натягами і компресора №603255 – з мінімальними.

Для максимального наближення умов випробувань до робочих, ротор складався у власних підшипниках і корпусах камери згорання і лобового картера.

Для зручності вимірювань прогинів і доступу до ротора в установці замість корпусу компресора був введений технологічний корпус, що замінив собою реальний, при цьому були збереженні всі посадкові місця у з'єднанні його з лобовим картером і корпусом камери згорання. Як показали наступні експерименти, така заміна не порушила жорсткості всього вузла компресора.

Загальний вигляд компресора, розташованого у вакуум-камері, представлений на рис. 3.7. Тут же представлено препарування об'єкта у відповідності з комплексним методом дослідження динаміки.

Кріплення вузла компресора у вакуум-камері відбувалося через власні цапфи і опори, тобто аналогічно кріпленню двигуна на випробувальному гідрогальмівному стенді. Всі опори є регульованими, що дає змогу переміщувати вузол у вертикальному, повздовжньому і горизонтальному напрямках.

У верхній частині камери вздовж твірної закріплена рама, що несе ємнісні датчики ступенів. Вони були встановлені навпроти всіх ступенів ротора для вимірювання їх прогинів і на опорах – для визначення режиму роботи підшипників.

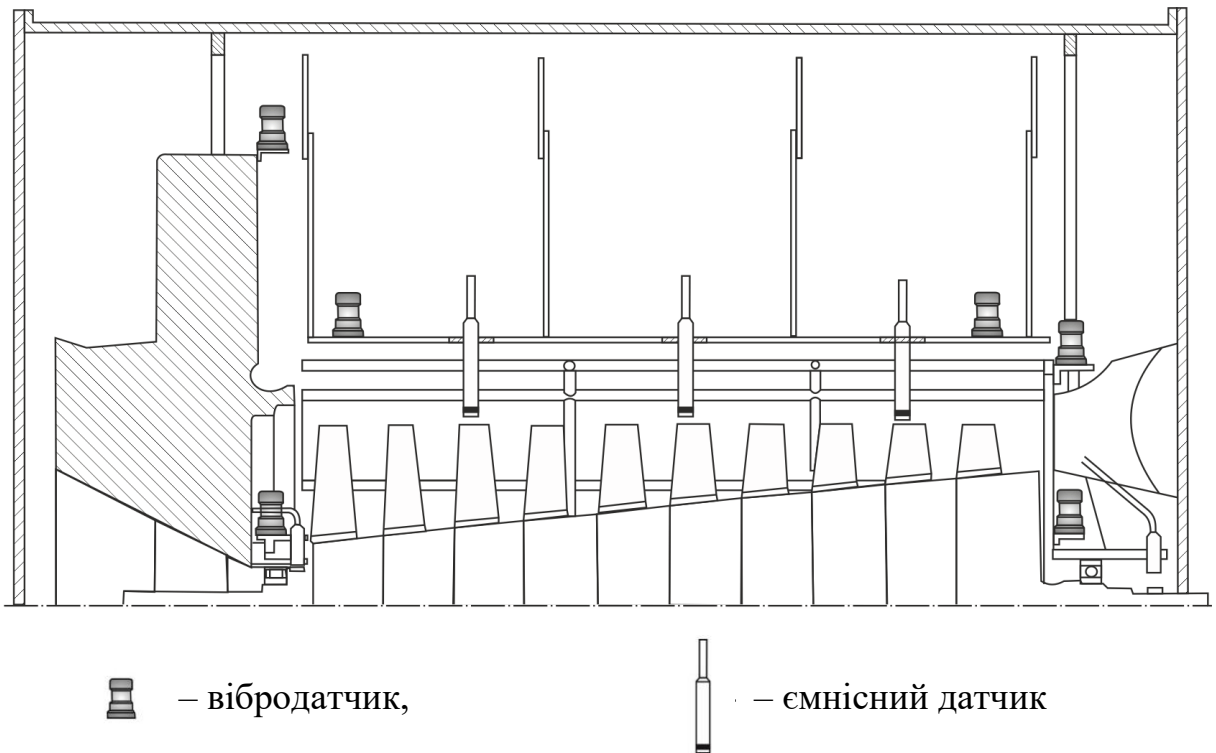


Рис. 3.7. Схема розташування ротора компресора ГТД  
АИ-20 і вимірювальних датчиків у вакуумній камері

Віброперетворювачі було встановлено: на корпусі, в площині задньої опори у вертикальному і поперечно-горизонтальному напрямках, тобто у місцях установки віброперетворювачів при серійному вібрографуванні двигуна АИ-20, у площині передньої опори на лобовому картері у вертикальному і поперечно-горизонтальному напрямках, безпосередньо на передній опорі у вертикальному напрямі на одній площадці з ємнісним датчиком цієї опори, безпосередньо на задній опорі у вертикальному напрямі, а також на рамі ємнісних датчиків для визначення коливань останніх.

Колівання установки у повздовжньому напрямі фіксувались відповідним віброперетворювачем, розташованим на лобовому картері. Привід ротора в обертання відбувався зі сторони заднього вала. Перед установкою у вакуум-камері обидва ротори були продефектовані і відбалансовані за серійною технологією на низькочастотному балансувальному верстаті БСД-3 до залишкового дисбалансу 0,5 г·мм по кожній із опор.

Програма досліджень передбачала балансування ротора з використанням статичних коефіцієнтів впливу.

На рис. 3.8 приведені вібраційні характеристики ротора компресора № 603243 у вихідному стані, у місцях серійних кріплень, тобто на стику корпусу компресора і корпусу камери згоряння.

Як видно із представлених кривих, резонансні режими мають місце в районі 8000 об/хв і 10500-11000 об/хв.

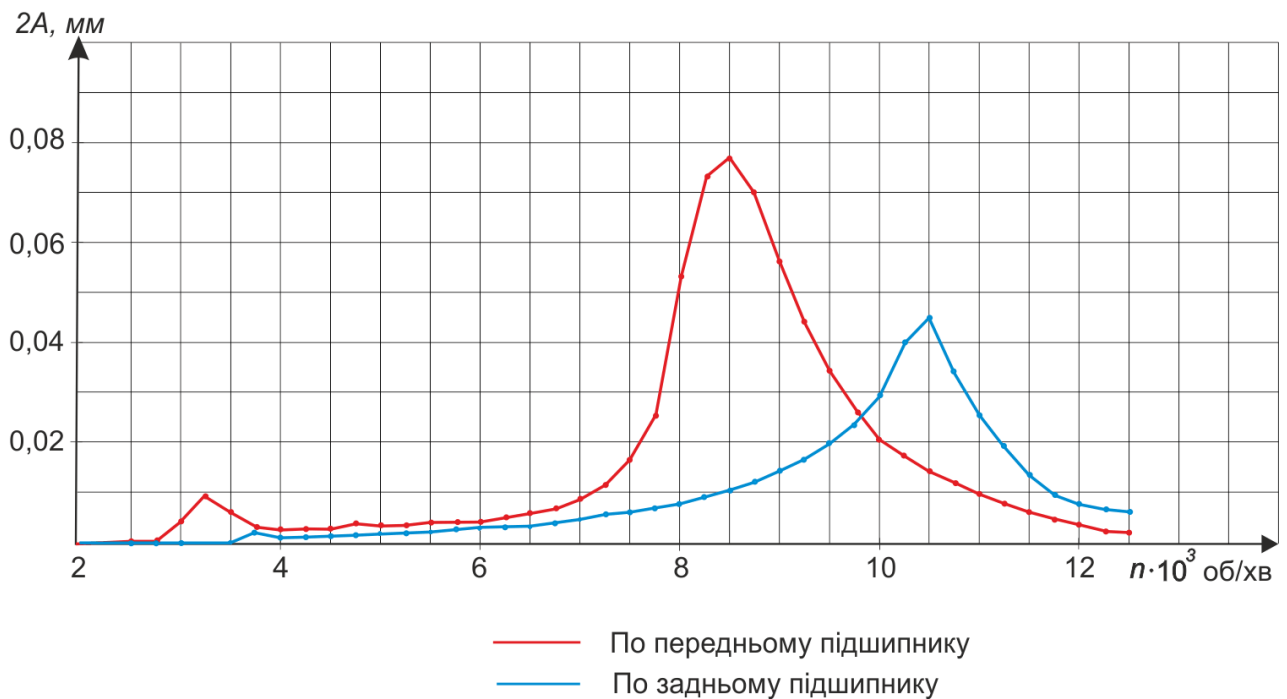


Рис. 3.8. Порівняльні характеристики вібрацій переднього і заднього підшипників ротора №603243 у вихідному стані

При установці інших трьох роторів даної конструкції значення резонансів змінювалось у межах 800 об/хв. від вказаних величин.

Заключні випробування роторів на двигуні вказували на збіг вібраційних характеристик ротора в умовах вакуумного стенду і випробувальної станції.

На рис. 3.9, 3.10 представлені порівняльні коливання, зняті одночасно з віброперетворювачів, встановлених на передньому і задньому підшипниках у вихідному стані при відносно низьких вібраціях і після розбалансування ротора дисбалансом зі значенням  $d=18,6$  г·мм. Із розгляду цих і попередніх кривих слід припустити, що характер коливань опор різний.

Хоча через радіацію коливань обидва підшипника вказують на наявність всіх резонансів системи, передній має чітко визначений резонанс в районі 8000 об/хв, що можна пояснити залученням у коливання мас корпусів.

Оскільки маса лобового картера є більшою за масу корпусу камери згоряння, то і резонанс спільних коливань ротор-корпус по передній опорі відбувається на більш низьких частотах, ніж по задній. В подальшому це припущення було підкріплено низкою інших чинників.

Для встановлення характеру і причин всіх резонансів використано записані дані про коливання опор, рухів цапф ротора, прогинів ступенів ротора, записаних одночасно, і розрахунок сумісних коливань системи «ротор-корпус». Детальний опис проведеної роботи і протоколи випробувань відображені у [206].

В цілому, поведінка роторів компресорів ГТД АИ-20 в системі своїх опор і приєднаних мас корпусів у діапазоні від 0 до 12500 об/хв має наступні особливості:

1. При зміні кутової швидкості обертання 7300–7600 об/хв спостерігається перше значне підвищення коливань опор і зовнішніх корпусів. При цьому рухи кінців ротора (цапф) направлені в одну сторону і знаходяться у фазі.

Колівання опор також приблизно синфазні до резонансу, причому вони знаходяться і в одній фазі з коливаннями цапф ротора.

2. При зміні кутової швидкості обертання 8300–8500 об/хв спостерігається інтенсивний ріст коливань передньої опори ротора компресора, при цьому коливання цієї опори і рух цапфи вала знаходяться майже у протифазі. В той же час зміна фаз при коливаннях задньої цапфи і задньої опори ще не настає.

Запис переміщень ступенів ротора вказує на значні переміщення передньої частини ротора, в той час як для задньої частини такі переміщення є незначними.

3. При зміні кутової швидкості обертання 9600–10000 об/хв коливання передньої і задньої опор відбуваються у різних фазах з переважанням асиметричних коливань. Різниця у значеннях вібрацій опор незначна.



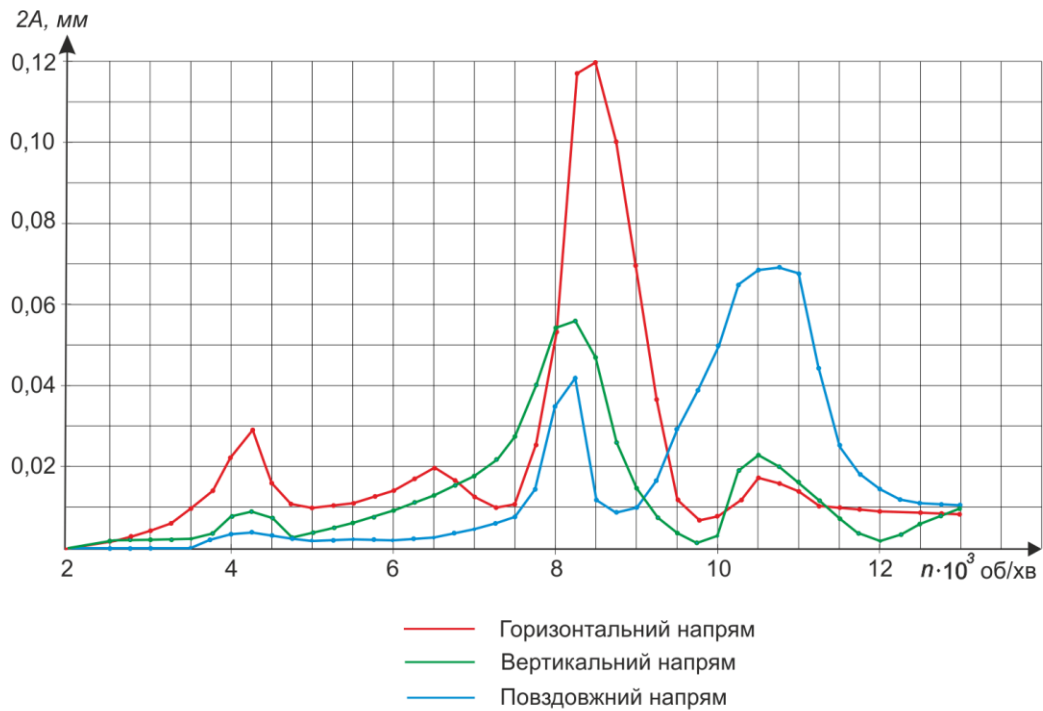


Рис. 3.9. Вібраційні характеристики корпусу компресора з ротором № 603243

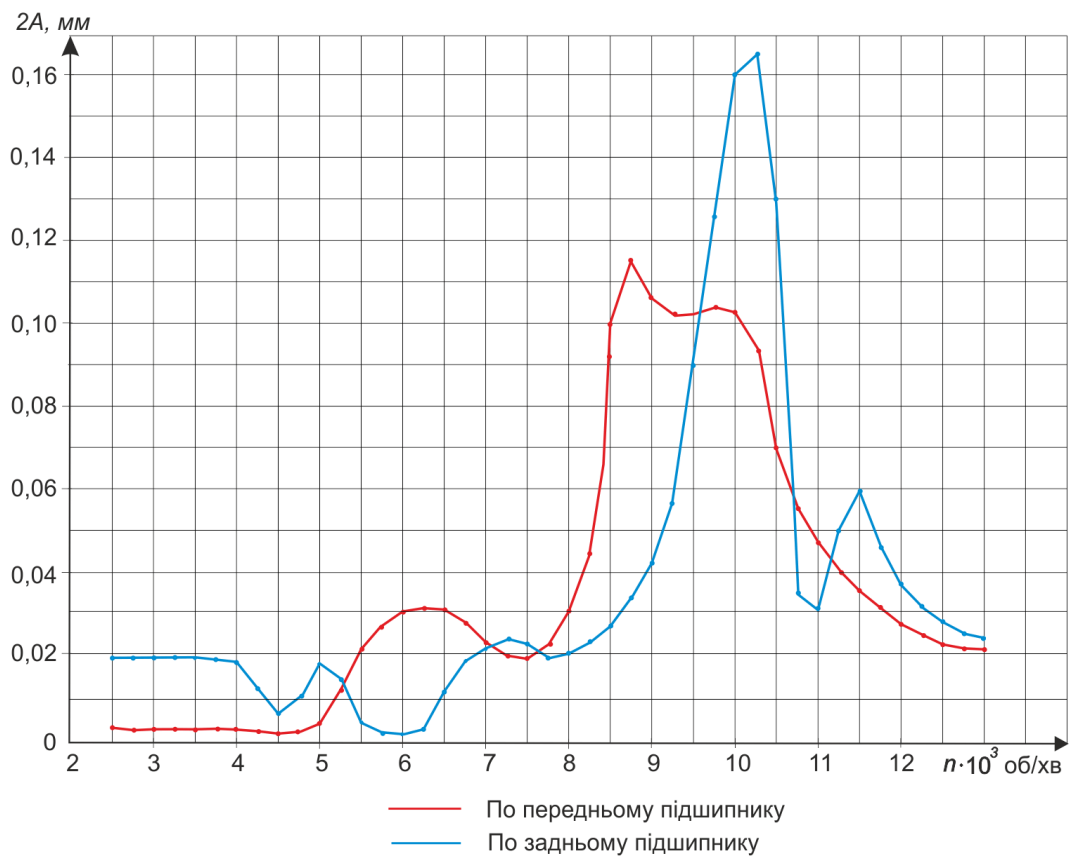


Рис. 3.10. Порівняльна характеристика вібрацій переднього і заднього підшипників ротора №603243 при внесенні у 8-й ступінь дисбалансу 18,6 г·мм

На цих частотах має місце зсув фаз між коливаннями опор і цапфи, що дорівнює наближено  $90^\circ$ .

4. В околі 10500 об/хв переважають значні коливання задньої опори і цапфи вала. Запис переміщень вказує на значні переміщення ступенів задньої частини ротора і незначні переміщення передніх ступенів.

На цих частотах різниця фаз коливань задньої опори і цапфи вала  $180^\circ$ , в той час як по передній опорі коливання цапфи і опори синфазні.

5. В околі 11200 об/хв спостерігаються значні прогини ротора, хоча вібрація опор і корпусу знизилась.

Наведені особливості поведінки системи і проведеній далі розрахунок сумісних коливань дає змогу описати картину руху ротора і опор і пояснює причини вказаних резонансних станів.

3.1.3. Ідентифікація жорсткостей опор ротора компресора і пояснення причин резонансів. У сучасних спеціалізованих комп'ютерних програмах, що базуються на методі скінченних елементів, існують ефективні алгоритми модального аналізу, що включає визначення критичних частот ротора та форм його коливань. Однак модальний аналіз є прямою задачею, тому для ідентифікації жорсткостей опор ротора і діагностування АЧХ всього двигуна необхідно вміти ефективно розв'язувати відповідні ОЗ.

Вихідні дані для ідентифікації жорсткостей опор і визначення форм коливань ротора зведені в таблицю 3.8.

В п. 2.3.2 був здійснений аналіз впливу кількості мас моделі ротора на її точність і висловлене припущення, що найбільш прийнятними і стійкими моделями роторів з зосередженими масами є відносно нескладні розрахункові моделі, які відрізняються тим, що в них використовуються отримані в результаті експериментів точні, еквівалентні даній розрахунковій схемі, значення параметрів: жорсткостей, мас, прогинів тощо.

Таблиця 3.8

Вихідні дані для розрахунків жорсткостей опор

| Параметр  |                       | Значення             |
|---|-----------------------|----------------------|
| Довжина ротора                                      | $l$ , мм              | 840                  |
| Відстань від лівої опори до центра ваги ротора      | $a$ , мм              | 437,4                |
| Відстань від правої опори до центра ваги ротора     | $b$ , мм              | 402,6                |
| Вага ротора   | $G$ , Н               | 1154                 |
| Вага лобового картера                               | $G_l$ , Н             | 1200                 |
| Вага камери згоряння                                | $G_s$ , Н             | 600                  |
| Коефіцієнт впливу для перерізу ротора по центру мас | $\alpha_{ц.в.}$ , м/Н | $6,35 \cdot 10^{-9}$ |

Для підтвердження цього припущення ротор компресора був схематизований лише однією точковою масою, яка дорівнює масі ротора, прикладеній у його центрі мас з жорсткістю у точці кріплення, що дорівнює жорсткості ротора у перерізі, яка містить центр мас. Покажемо, що така проста схематизація не матиме значного впливу на значення критичної частоти обертання у порівнянні із підрахунком для багатомасової моделі, якщо у обидві схеми підставити реальні значення жорсткостей і мас. Для отриманої моделі маємо співвідношення  $1 - m_1 \alpha_{11} \omega^2 = 0$ , або

$$n_{кр} = 30 / \sqrt{\delta_{ст}} \text{ об/хв}, \quad (3.2)$$

де  $\delta_{ст} = G \alpha_{ц.в.}$  – прогин від ваги ротора.

Центр ваги ротора компресора двигуна АИ-20 знаходиться між 5-м і 6-м ступенем,  $l_{ц.в.} = 437,4$  мм. За даними статичних навантажень ротора вибираємо коефіцієнт впливу для перерізу ротора по центру мас,  $\alpha_{ц.в.} = 6,35 \cdot 10^{-9}$  м/Н,  $\delta_{ст} = 7,33$  мкм, де  $G = 1154$  Н – вага ротора компресора. Звідси,  $n_{кр} = 11200$  об/хв.

Більш точне значення, підраховане для ротора з урахуванням коефіцієнта впливу всіх ступенів за методом Релея [123] дорівнює 11220 об/хв. Таким чином, похибка від схематизації десятимасового ротора одномасовим склала не

більше 0,4%. Отже, у розрахунках для визначення  $\omega_{кр1}$  можна розглядати ротор як одномасову систему, використовуючи «точні» значення жорсткостей і мас.

Значення критичних частот обертання і резонансів такої тримасової системи знаходять із розв'язку «вікового» визначника системи трьох рівнянь, що описують її коливання.

Однак у цьому визначнику невідомі всі податливості, крім  $\alpha_{11}$ , тому для пошуку невідомих значень податливості було застосовано метод пробних параметрів. За пробний елемент використовувалося пружне кільце фірми «Allison Engine Company», що одягалось на зовнішню обойму переднього підшипника ротора компресора, характеристика жорсткості якого була визначена на спеціальному пристосуванні і виявилася значно більше податливості ротора (рис. 3.11).

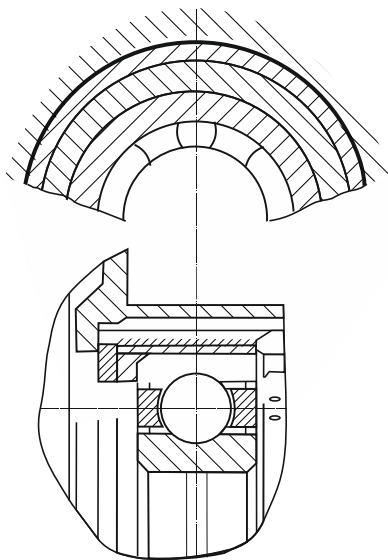


Рис. 3.11. Опора ротора з пружним кільцем

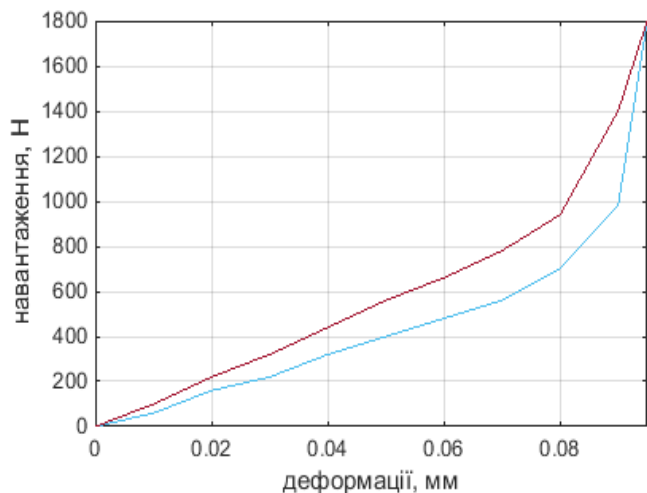


Рис. 3.12. Залежність переміщення від сили для розглянутого пружного кільця

У подальших розрахунках для ідентифікації жорсткостей опор використовували експериментальні дані статичних навантажень пружного кільця передньої опори ротора компресора і дані вібрографування двигунів АИ-20 на випробувальному стенді з пружною опорою і без неї, а також експериментальні дані, отримані при дослідженні роторів на вакуумному вібровимірювальному балансувальному стенді.

Податливості опор ротора, розташованих у лобовому картері і корпусі камери згоряння, ідентифікували за етапами:

1. Знаючи пружність кільця і вважаючи, що пружність передньої опори компресора визначається лише ним, за значенням резонансу двигуна з пружним кільцем, ідентифікували податливість задньої опори, розглядаючи коливання одномасового ротора на двох податливих опорах.

2. За найденим значенням податливості задньої опори і значенню резонансів двигуна без пружної опори, ідентифікували податливість передньої опори.

Для цього був розглянутий двоопорний ротор, схематично представлений на рис. 3.13, у якого коефіцієнти впливу позначені через  $\alpha_{AA}$  – для опори у лобовому картері,  $\alpha_{BB}$  – для опори в корпусі камери згоряння,  $\alpha_{AA}^K = 50 \cdot 10^{-9}$  м/Н – податливість пружного кільця двигуна АИ-20.

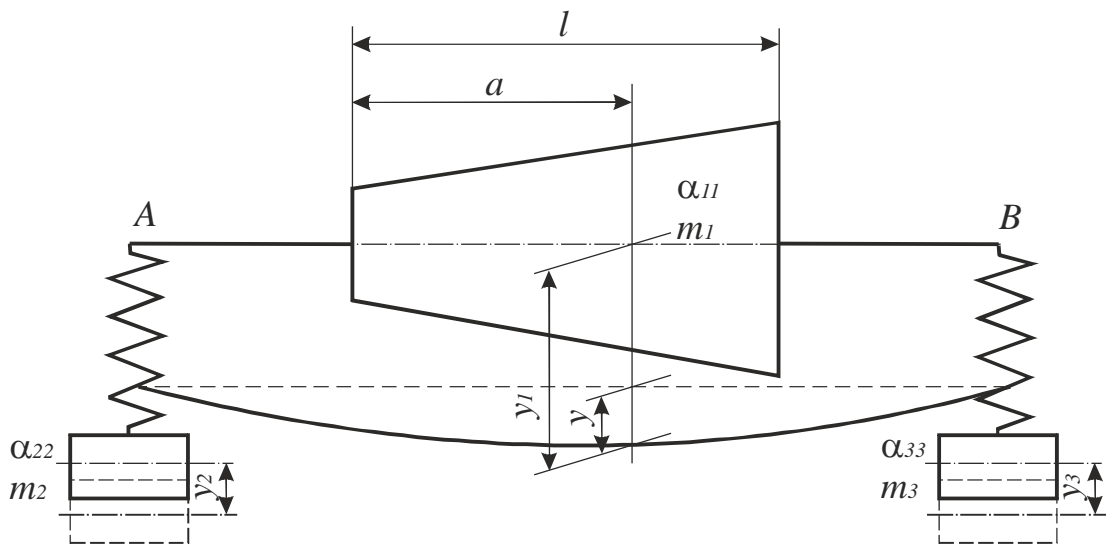


Рис. 3.13. Динамічна модель для розрахунку спільних коливань ротор-опори

Спочатку знайшли переміщення опор під дією одиничної сили, прикладеної в центрі мас ротора (або розглянутої ідеалізованої системи), тобто коефіцієнти впливу  $\alpha_{A1}$  і  $\alpha_{B1}$ , а далі переміщення центру ваги через пружність опор і новий коефіцієнт впливу в цій точці (рис. 3.14)

$$\alpha_{A1} = \alpha_{AA}^k \frac{b}{l}, \quad \alpha_{B1} = \alpha_{BB} \frac{a}{l},$$

$$AE = \frac{b}{l} \alpha_{AA}^k, \quad BD = \frac{a}{l} \alpha_{BB}, \quad CE = \frac{b}{l} \alpha_{AA}^k - \frac{a}{l} \alpha_{BB},$$

$$\delta_{11} = FK + SF = \frac{b^2}{l^2} \alpha_{AA}^k - \frac{a \cdot b}{l^2} \alpha_{BB} + \frac{a}{l} \alpha_{BB}, \quad \delta_{11} = \frac{b^2}{l^2} \alpha_{AA}^k + \frac{a^2}{l^2} \alpha_{BB}.$$

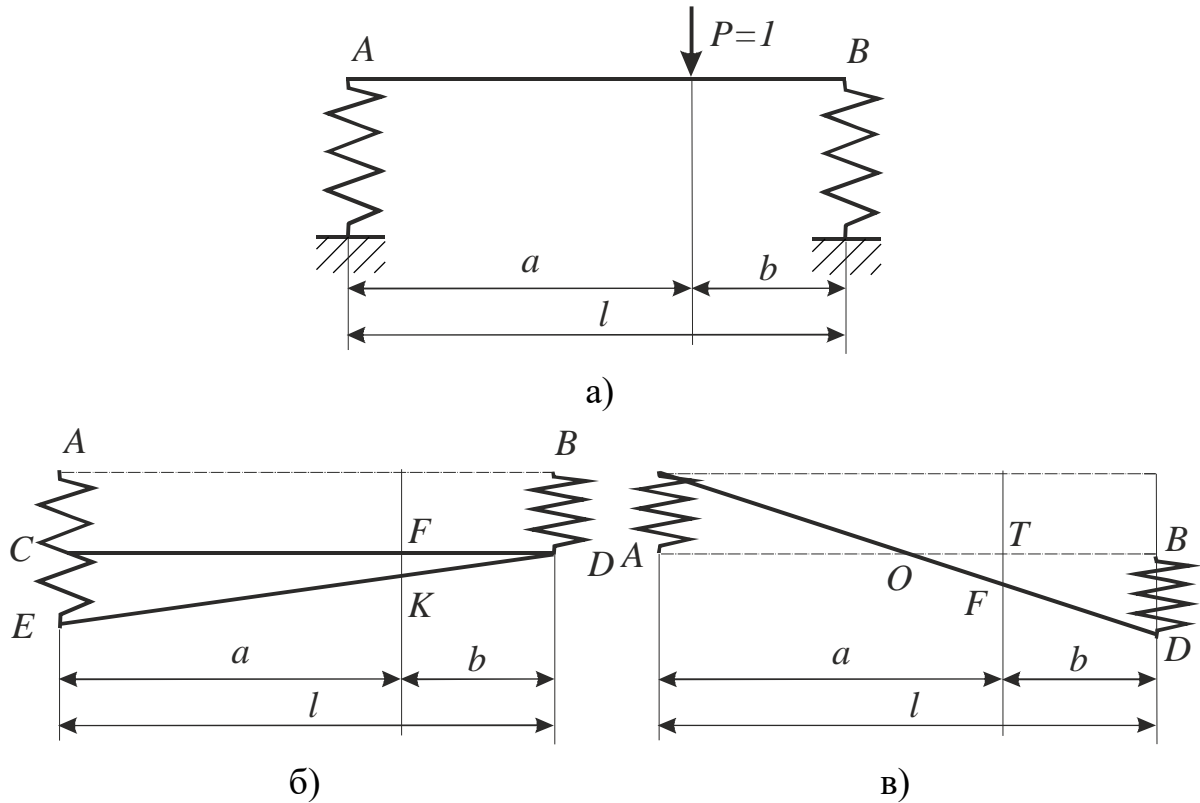


Рис. 3.14. До розрахунку коефіцієнтів впливу

Тоді сумарний коефіцієнт впливу дорівнює

$$\alpha_{11}^x = \alpha_{11} + \frac{b^2}{l^2} \alpha_{AA}^k + \frac{a^2}{l^2} \alpha_{BB}. \quad (3.3)$$

З рівняння  $\omega_{кр}^2 = \frac{1}{m_1 \alpha_{11}^x}$  знайшли сумарний коефіцієнт впливу  $\alpha_{11}^x$ , а потім —  $\alpha_{BB}$ , вважаючи, що на першому етапі розрахунку  $\alpha_{11}$  є податливістю пружного кільця.

У даному випадку  $\alpha_{BB}$  ідентифікували, розглядаючи симетричні коливання ротора як твердого тіла на податливих опорах. У випадку асиметричних коливань, які відповідають більш високому за частотою резонансу (рис. 3.14 (в)), з подібності трикутників  $CPD$  і  $FKC$  також знайшли

$$\delta_{11} = \alpha_{AA}^k \frac{b^2}{l^2} + \alpha_{BB} \frac{a^2}{l^2},$$

або після підстановки значень  $\delta_{11} = 0,229\alpha_{AA}^k + 0,271\alpha_{BB}$ .

За даними вібрографування двигуна АИ-20 з пружною опорою, критичну частоту обертання приймали рівною  $n_{kp} = 7500$  об/хв. А тоді за наведеними вище формулами

$$\delta_{11} = 11,5 \cdot 10^{-6} + 0,271\alpha_{BB};$$

$$\alpha_{11}^x = \alpha_{11} + \delta_{11}.$$

Із рівняння (3.3) отримали значення сумарного коефіцієнта впливу  $\alpha_{11}^x = 13,8 \cdot 10^{-9}$  м/Н. Звідси, переміщення центру ваги через пружність опор  $\delta_{11} = 7,45 \cdot 10^{-9}$  м. Остаточо з (3.3) отримуємо, що податливість опори, розташованої в камері згоряння  $\alpha_{BB} = -14,8 \cdot 10^{-9}$  м/Н.

На другому етапі була проведена ідентифікація коефіцієнта впливу передньої опори компресора.

Із експериментальних даних з дослідження ротора компресора №603255 без пружного кільця на працюючому двигуні і в умовах вакуум-камери отримали значення  $n_{kp1} = 7800$  об/хв і  $n_{kp2} = 10000$  об/хв. Враховуючи ці дані, аналогічно попередньому випадку, знаходили податливість передньої опори.

Для першої форми коливань при  $n_{kp1}$  з (3.3) маємо  $\alpha_{11}^x = 12,7 \cdot 10^{-9}$  м/Н. Звідси, переміщення центру ваги через пружність опор дорівнює  $\delta_{11} = 6,35 \cdot 10^{-9}$  м. Остаточо отримуємо, що податливість опори, розташованої в лобовому картері дорівнює  $\alpha_{AA} = 10,22 \cdot 10^{-9}$  м/Н.

При розрахунку за другою формою коливань жорсткого ротора на податливих опорах при  $n_{kp2}$  маємо  $\alpha_{11}^x = 7,74 \cdot 10^{-9}$  м/Н. Переміщення центру ваги через пружність опор  $\delta_{11} = 1,39 \cdot 10^{-9}$  м. Звідси знаходимо  $\alpha_{AA} = -11,44 \cdot 10^{-9}$  м/Н.

Таким чином було отримано, що при 7800 об/хв. обидва  $\alpha$  мають однаковий знак, тобто рух обох опор відбувається в одному напрямі, а при 10000 об/хв  $\alpha_{AA}$  і  $\alpha_{BB}$  мають різні знаки і рух відбувається в протилежних напрямках.

Далі розраховували власну частоту коливань складових системи, тобто власну частоту коливань ротора на жорстких опорах, лобового картера з податливістю  $\alpha_{AA}$  і корпусу камери згоряння з податливістю  $\alpha_{BB}$ , прийняв її розмірність  $\omega$  рад/с і  $n$  об/хв, що відповідає резонансам цих вузлів.

1. Частота коливань системи ротора компресора на жорстких опорах підрахована раніше і відповідає 11200 об/хв.

2. Резонансну частоту для лобового картера з податливістю  $\alpha_{AA}$  знайшли за формулою (3.2)  $n_{рез}^n = 8566$  об/хв.

Також за (3.2) знайшли резонансну частоту  $n_{рез}^k = 10067$  об/хв корпусу камери згоряння з податливістю  $\alpha_{BB}$ .

Далі були проведені розрахунки спільних коливань системи, в якій ротор схематизований масою, розташованою в центрі мас. Враховані коливання приєднаних мас лобового картера і корпусу камери згоряння (рис. 3.13)

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{b}{l} \alpha_{AA} = 4,9 \cdot 10^{-9} \text{ м/Н}, \quad \alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{a}{l} \alpha_{BB} = 7,71 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{32} = 0.$$

Власні частоти цієї системи знайшли із розв'язку визначника частотного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - m_1 \alpha_{11} \omega^2 & -m_2 \alpha_{12} \omega^2 & -m_3 \alpha_{13} \omega^2 \\ -m_1 \alpha_{21} \omega^2 & 1 - m_2 \alpha_{22} \omega^2 & -m_3 \alpha_{23} \omega^2 \\ -m_1 \alpha_{31} \omega^2 & -m_2 \alpha_{32} \omega^2 & 1 - m_3 \alpha_{33} \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

нехтуючи через малу величину виразом, який містить  $\omega^6$ , були знайдені дві власні частоти обертання  $\omega_1 = 781 \text{ с}^{-1}$  ( $n_1=7450$  об/хв),  $\omega_2 = 990 \text{ с}^{-1}$ , ( $n_2=9200$  об/хв).



За одержаними при розв'язанні розглянутої ОЗ значеннями пружних характеристик динамічної системи «ротор-опори» за допомогою бібліотеки фізичного моделювання SimMechanics пакету Simscape Multibody у додатку Simulink пакету прикладних програми MATLAB була створена динамічна модель системи ротора компресора як твердого тіла на гнучких опорах, представлена на рис. 3.15. У результаті дослідження моделі були отримані значення критичних швидкостей коливань ротора на пружних опорах, близькі до одержаних за експериментально виміряною вібраційною характеристикою. Різниця між значеннями складала не більше 10%.

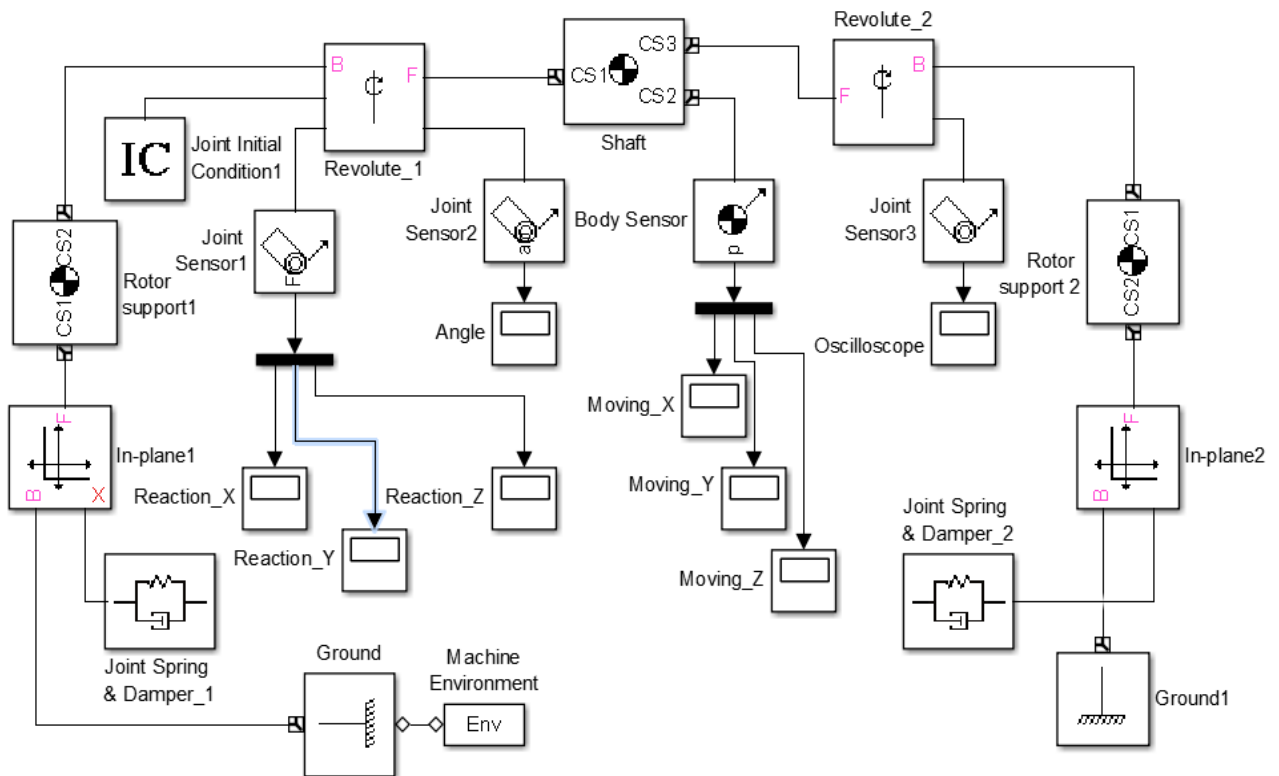


Рис. 3.15. Simulink-модель динамічної системи компресора

Співставлення результатів розрахунків із експериментом дало змогу сформулювати основні причини виникнення та особливості проходження резонансів:

1. Перший резонанс системи в околі 7500 об/хв відбувається внаслідок коливань жорсткого вала на податливих опорах.

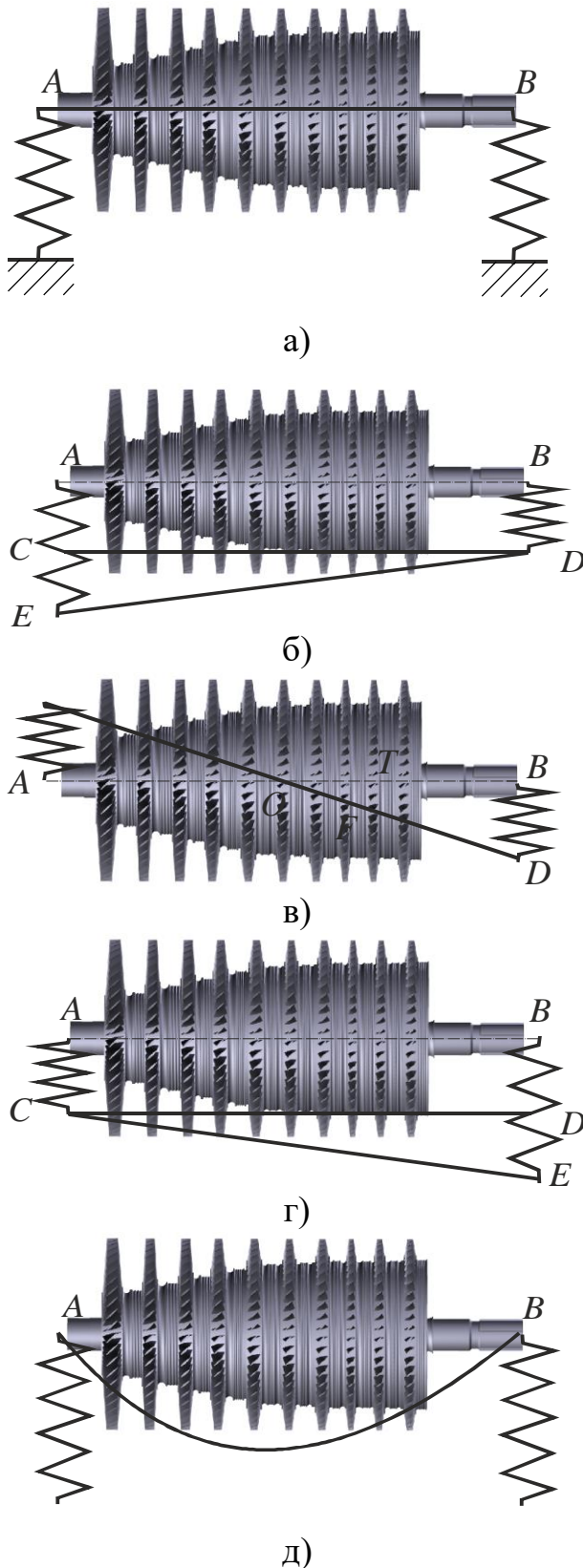


Рис. 3.16. Імітація форм коливань ротора компресора

Це перша форма коливань – симетрична, коли ротор коливається майже як тверде тіло, покладене на податливі опори (рис. 3.16 а).

2. Другий резонанс системи ротор-опори на 8300–8500 об/хв – резонанс передньої опори, коли частота обертання ротора співпадає з власною частотою коливань лобового картера (рис. 3.16 б).

3. Третій резонанс при кутовій швидкості 9600–10000 об/хв має місце після спаду амплітуди коливань. Характеризується коливаннями ротора як твердого тіла на податливих опорах за другою формою коливань – антисиметричних, при цьому ротор повертається відносно центру обертання (рис. 3.16 в).

4. Резонанс за кутової швидкості 10500 об/хв настає при збігу частоти власних коливань корпусу камери згоряння з частотою обертання ротора (рис. 3.16 г).

5. Резонанс на швидкості 11200 об/хв відповідає критичній частоті обертання ротора, що встановлений на жорсткій опорі (рис. 3.16 д).

Співставлення результатів розрахунків і експерименту показує, що

динамічна модель і прийнятий алгоритм ідентифікації жорсткостей опор в достатній мірі відбивають реальну поведінку системи.

Крім вказаних резонансів існує невелике підвищення вібрацій опор при частоті обертання ротора 500–600 об/хв, що пояснюється, очевидно, впливом ваги ротора. Резонанси за першою і другою формами коливань ротора як твердого тіла на пружних опорах близькі за своїм значенням до власної частоти коливань лівої і правої опор і інколи на практиці їх приймали за один резонанс в околі 8000 об/хв і в околі 10400 об/хв.

При цих формах коливань ротор вигинається незначно, а переміщення ступенів відбуваються, в основному, разом з опорами, причому співвідношення між прогином ротора і коливаннями опор залежать від близькості даного резонансу до власної частоти опори.

Віддаляючись від власної частоти опори в загальному зміщенні ступенів переважають прогини самого ротора і в районі 11200 об/хв вони досягають максимуму.

### 3.2. Оцінювання збалансованості ротора при низькочастотному балансуванні

3.2.1. Призначення допустимих дисбалансів при унімодальному законі розподілу ймовірностей. З практичних міркувань абсолютно очевидно, що навіть найточніші методи досліджень динаміки і балансування не можуть довести машину до ідеального вібраційного стану через неусувні похибки обладнання, вимірювальної апаратури та інші конструктивні, технологічні і експлуатаційні фактори. Тому одним з найважливіших етапів забезпечення надійної роботи нової створеної машини є встановлення обґрунтованих критеріїв, що забезпечують її нормальне функціонування протягом всього терміну експлуатації, зокрема призначення обґрунтованих значень допустимих дисбалансів.

Допуски на дисбаланси роторів необхідно призначати з урахуванням причин вібрацій, які безпосередньо впливають на величину і зміну дисбаланса. Оскільки граничний дисбаланс залежить від розбалансування в роботі, припрацювання, особливостей складання, балансування, газодинамічних, магнітних тощо впливів, то коефіцієнт запасу балансування повинен вибиратись таким, щоб за жодних умов не був перевищений граничний дисбаланс протягом всього терміну служби ротора. Для ідентифікації граничного і призначення допустимого дисбалансів необхідно використовувати методи математичної статистики з урахуванням того, що розподіл дисбалансів може мати як одно-, так і полімодальний розподіл.

Варто відзначити, що оцінка кінцевого стану збалансованості може відбуватись в залежності від типу ротора і виробу, цілі і критерію балансування одним з двох шляхів на:

- а) низькочастотних балансувальних верстатах;
- б) високочастотних балансувальних стендах.

Балансування на низькочастотних балансувальних верстатах дозволяє вимірювати дисбаланси в двох площинах корекції; в той же час на високочастотних балансувальних стендах можна вимірювати вібрації, прогини, напруження, реакції опор тощо. Крім цього, на випробувальних стендах та в експлуатаційних умовах інколи можна вимірювати вібрації, прогини і напруження.

Для того, щоб призначити певне значення допустимого дисбалансу в деякій площині корекції, спочатку в цій же площині необхідно визначити значення функціонального дисбалансу  $D_{\phi}$ . Функціональним є такий максимальний дисбаланс, при якому виріб функціонує нормально.

З визначення функціонального дисбалансу випливає, що його значення має бути більше суми абсолютних значень трьох векторних доданків [167]:

- залишкового дисбалансу після балансування  $D_{зал}$  в цій же площині, тобто такого максимального дисбалансу, при якому машина ще функціонує нормально;

- технологічного дисбалансу  $D_m$ , що виникає після балансування при складанні ротора, монтажу опор, складанні машини, регулюванні тощо. Такі дисбаланси неминуче мають місце, оскільки деталі складання (підшипники, шкиви тощо) мають власні дисбаланси.

- експлуатаційного дисбалансу  $D_e$ , який виникає під час роботи машини через зношування, старіння, нерівномірний прогрів і тощо.

У цьому випадку має виконуватись співвідношення

$$D_{\phi} \geq D_{\text{доп}} + D_T + D_e. \quad (3.4)$$

В кінці ресурсної роботи машини або перед його міжресурсним ремонтом, що передбачає балансування, він буде функціонувати нормально. В нерівності (3.4) під  $D_{\text{доп}}$  мається на увазі значення допустимого дисбалансу, який, звичайно, має бути дещо більше за  $D_{\text{зал}}$ .

Для забезпечення нормального функціонування машини можна встановити запас балансування, що характеризується коефіцієнтом запасу балансування  $K_{\text{зан}}$ . Він дорівнює відношенню функціонального і допустимого дисбалансів  $K_{\text{зан}} = D_{\phi} / D_{\text{доп}}$ .

З останньої залежності і нерівності (3.4) видно, що виконується співвідношення  $K_{\text{зан}} \geq 1 + D_m / D_{\text{доп}} + D_e / D_{\text{доп}}$ , тобто коефіцієнт запасу балансування повинен перевищувати праву частину останньої нерівності на деяку величину, що залежить від вірогідності визначення доданків цієї правої частини, економічних міркувань, важливості безвідмовної роботи машини тощо.

Отже, до визначення обґрунтованого значення допустимого дисбаланса треба встановити значення  $D_{\phi}$ . При цьому можливі два варіанти. Перший варіант виникає в тому випадку, коли є можливість встановити значення функціонального дисбаланса виходячи з досвіду роботи аналогічних машин, що нормально функціонують весь термін експлуатації, а також спеціальних вимог, обумовлених в технічних умовах на розробку машини.

Другий – коли можливостей, передбачених першим варіантом, немає, тобто або відсутній достатній досвід, або відсутні аналоги. В цьому випадку значення функціонального дисбаланса слід ідентифікувати з експериментальних даних при випробуваннях дослідних зразків, використовуючи методи математичної статистики.

В першому випадку на основі досвіду балансування аналогічних виробів складається таблиця класів точності балансування, за якою встановлюється значення функціонального дисбалансу виробу. У відповідності з цим значенням і коефіцієнтом запасу балансування і назначається допуск на дисбаланс [167].

Дещо складніші справи для нових створюваних типів виробів і конструкцій. Тут значення функціонального дисбаланса встановлюється шляхом випробувань дослідних машин.

Процес встановлення значень функціонального дисбаланса починається з пошуку його попереднього значення. Для цього дослідний ротор спочатку балансують до мінімально можливих залишкових дисбалансів. Після складання машини в площині корекції вводять деякі дисбаланси, величину яких поступово нарощують доти, доки їх дія не викликатиме негативний вплив на вібрації підшипникових опор і функціонування машини. З економічних міркувань цей експеримент необхідно проводити один раз наступним чином: не змінюючи дисбаланса по одній із сторін ротора і переставляючи інший відносно його початкового положення на деякий кут, наприклад на  $45^\circ$ . Вказану операцію повторюють декілька разів. Таким чином знаходять низку значень граничного дисбалансу. Оскільки різне взаємне положення введених дисбалансів визначає різні значення граничних дисбалансів, то правомірно вважати, що отримані  $n$  значень  $D_j$  визначені не при випробуваннях одного ротора, а при дослідженні різних роторів одного і того ж типу. Для обробки отриманих результатів можна використати методи математичної статистики.

Оскільки дисбаланс – векторна величина, то виміряні дисбаланси можна приймати за векторні випадкові величини, які характеризуються значенням і

кутом або проекціями на дві взаємно перпендикулярні осі. Отже, значення вимірюючого дисбалансу має двомірне розсіювання параметрів.

Нехай дисбаланси вимірюють для великої кількості однотипних роторів, що виготовляються і складаються у практично однакових умовах. При цьому значення і кути дисбалансів зручно позначити на площині, використовуючи полярну систему координат. Якщо кількості вимірювань  $n \rightarrow \infty$  дисбаланси одного значення з радіусом  $r$  повинні рівномірно розподілятися навколо початку координат. Значення дисбалансів (модулі векторів) – мають розподілятися за деяким законом розподілу імовірностей вздовж радіуса постійного кута  $\varphi$ .

Розглянемо систему координат  $XYZ$ , побудовану на площині, в якій відкладені вектори дисбалансів. Відкладемо по осі  $OZ$  частоту появи дисбаланса певного значення. Отримана при цьому тривимірна поверхня є поверхнею розподілу дисбалансів, представленою на рис. 3.17.

Цю ж поверхню можна отримати, розглядаючи замість кута і значень дисбаланса його проекції на дві взаємно перпендикулярні осі.

Як частинний випадок, розглянемо ситуацію, коли проекції  $x$  і  $y$  вектора дисбаланса розподілені за нормальним законом, тобто  $x \sim N(\bar{x}, \sigma_x^2)$ ,  $y \sim N(\bar{y}, \sigma_y^2)$ . Звідси, як слідує з теорії імовірностей [35], довжина вектора дисбаланса розподілена за законом Релея.

При цьому, якщо середні значення  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow 0$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \rightarrow 0$  і обидві проекції мають однакові середньоквадратичні відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \bar{x} - x_i^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \bar{y} - y_i^2},$$

поверхня розподілу буде симетричною відносно вертикальної центральної осі  $Z$  (рис. 3.17).

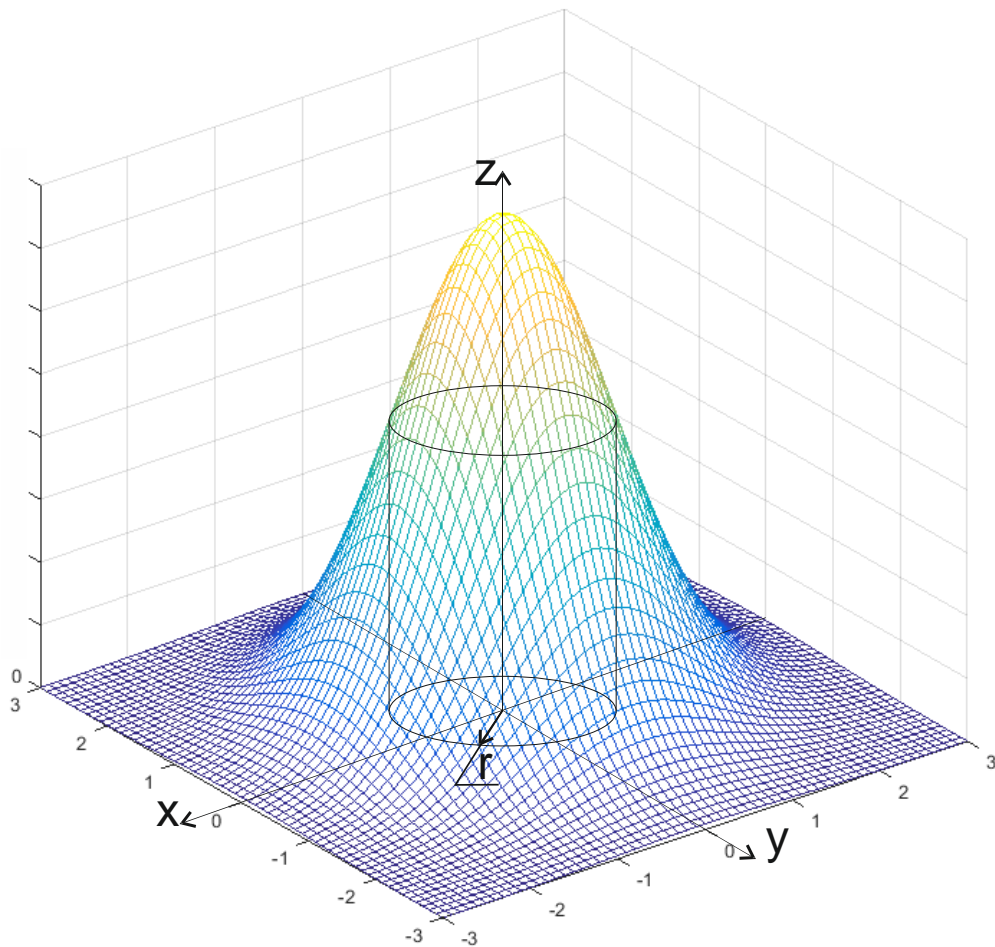


Рис. 3.17. Поверхня розподілу дисбалансів

*Примітка.* Розглянутий випадок закону розподілу Гауса для проєкцій дисбалансів і закон Релея для його довжини – частинний випадок. Для нього метод статистичної обробки результатів контролю базується на теоремі Ляпунова і нерівності Чебишева, з яких слідує, що при  $n \rightarrow \infty$  розподіл середнього арифметичного описується законом Гауса. Математичне сподівання наближається до істинного значення випадкової величини. В загальному випадку, закони розподілу імовірностей для проєкцій дисбалансів можуть бути довільними, зокрема і полімодальними.

Як відомо, розсіювання значень дисбалансів залежить від прийнятого способу виготовлення роторів. Найкращій точності виконання робіт відповідають інтервали розсіювання, які пов'язані з неусувними факторами, які



викликають появу дисбалансів. Границі цих інтервалів визначаються законами розподілу дисбалансу, який розглядається як випадкова величина, що є геометричною сумою векторних випадкових величин, кожна з яких викликана одним з неусувних факторів. В цьому випадку проекції вектора дисбаланса на осі системи координат, що обертається разом з ротором, являє собою алгебраїчні суми проекцій цих же випадкових величин на ті ж осі.

Якщо кількість доданків в останній сумі достатньо велика, то може виникнути два варіанти при призначенні функції розподілу дисбалансів і їх проекцій на осі координат.

У випадку, коли величина кожного з доданків в описаній вище сумі мала у порівнянні з її величиною, за центральною граничною теоремою розподіл суми близький до нормального [37].

В цьому випадку призначення попереднього значення функціонального дисбаланса на основі вказаних вище  $n$  значень  $D_j$  відбувається, виходячи з наступних міркувань.

Відомо [37], що для імовірності  $P$  існують співвідношення  $P\{|D_\phi - \bar{D}| \leq t\sigma n^{-1/2}\} = \gamma$ , де

$$\bar{D} = n^{-1} \sum_{j=1}^n D_j \quad (3.5)$$

$$\sigma = \sqrt{(n-1)^{-1} \sum_{j=1}^n (\bar{D} - D_j)^2} \quad (3.6)$$

$D_\phi$  – істинне значення випадкової величини функціонального дисбалансу;

$t = t(\gamma, n-1)$  – коефіцієнт Стюдента, взятий з таблиці для заданої довірчої імовірності  $\gamma$  і числа ступенів вільності  $n-1$ .

Тоді з довірчою ймовірністю  $\gamma$  можна стверджувати, що значення граничного дисбаланса будь-якого ротора знаходиться в межах

$$\bar{D} - t\sigma n^{-1/2} \leq D_\phi \leq \bar{D} + t\sigma n^{-1/2}. \quad (3.7)$$

В якості попереднього значення функціонального дисбалансу доцільно прийняти лівий кінець довірчого інтервалу (3.7), тобто

$$D_{\phi} = \bar{D} - t\sigma n^{-1/2}, \quad (3.8)$$

і тоді можлива похибка піде в запас балансування.

Після попереднього встановлення значення технологічного і експлуатаційного дисбалансів встановлюється попереднє значення допустимого дисбаланса  $D_{oon}$ . Воно визначається із рівності  $D_{oon} = D_{\phi} / K_{зан}$ . Тут коефіцієнт запасу  $K_{зан} > 1$  попередньо встановлюється із досвіду роботи аналогічних машин, які нормально функціонують протягом свого терміну експлуатації. Значення  $K_{зан}$  мають вибиратись такими, щоб за весь термін роботи його дисбаланс не перевищив  $D_{\phi}$  з урахуванням всіх можливих несприятливих обставин, що можуть виникнути при роботі машини. Отже, поділивши вказані вище  $n$  значень граничних дисбалансів на  $K_{зан}$ , отримаємо  $n$  значень допустимих дисбалансів. Ці значення можна заново приписати  $n$  роторам того ж типу і за формулами (3.5) і (3.6) знайти для них  $\bar{D}_{oon}$  і  $\sigma_{oon}$ .

Значення одержаних таким чином допустимих дисбалансів дають можливість встановити кількість  $n$  роторів дослідної партії, необхідних для встановлення кінцевих значень функціонального і допустимого дисбалансів. Необхідною умовою тут є неперевикнення попереднього значення допустимого дисбалансу значенням дисбалансів роторів дослідної партії після балансування з довірчою ймовірністю  $\gamma$ . Можна вважати, що одержані вище  $n$  значень допустимих дисбалансів не тільки є значеннями дисбалансів  $n$  різних однотипних роторів, але і є значеннями дисбалансів  $n$  роторів, вибраних з дослідної партії. Якщо відхилення від середнього в (3.8) прийняти таким, що дорівнює  $|D - \bar{D}_{oon}| < |\bar{D}_{oon} - D|$ , де  $D$  – випадкове значення дисбаланса ротора дослідної партії, з нерівності слідує, що  $D < D_{oon}$ . Тому для знаходження

необхідної кількості  $n$  достатньо розв'язати нерівність  $t\sigma n^{-1/2} < |D_{\text{дон}} - \bar{D}_{\text{дон}}|$ , звідки отримаємо  $n \geq (t\sigma / (D_{\text{дон}} - \bar{D}_{\text{дон}}))^2$ .

Для кожної машини із дослідної партії знову встановлюються кінцеві значення функціонального, технологічного, експлуатаційного і допустимого дисбалансів за викладеною вище методикою. Необхідно відмітити, що в тому випадку, коли кількість дослідних машин, виділених для призначення допусків, обмежена необхідністю проведення інших видів експериментів, всі ці операції можуть здійснюватися паралельно з використанням дослідних зразків за іншими програмами, не пов'язаними з встановленням функціонального і допустимого дисбалансів.

Обчислення обґрунтованих кінцевих значень, вказаних дисбалансів, можна проводити за формулою (3.8), підставляючи в якості  $D_\phi$  і  $\sigma$  відповідні величини обчислені для кожного з них. Наприклад, нехай  $D_{\phi j}$ ,  $j=1,2,\dots,n$  – функціональні дисбаланси  $n$  дослідних машин. В цьому випадку в формулах (3.5) і (3.6) слід замінити  $D_j$  на  $D_{\phi j}$ , і одержані значення  $\bar{D}_\phi$  і  $\sigma_\phi$ , число  $n$ , разом з новим, вибраним за таблицею коефіцієнтом Стюдента  $t$ , підставити в формулу (3.8). Тоді з довірчою імовірністю  $\gamma$  можна отримати кінцеве значення функціонального дисбаланса для всієї партії створюваних виробів.

Цікаво відмітити, що і праві границі довірчих інтервалів грають чималу роль, наприклад, в тому випадку, коли необхідно визначити, якого розкиду експлуатаційних дисбалансів слід очікувати для даної партії роторів і в деяких інших важливих на практиці випадках.

Сума знайдених значень функціональних дисбалансів для площин корекції 1 і 2 визначає значення головного вектора функціональних дисбалансів ротора  $D_{\text{ст.}\phi} = D_{1\phi} + D_{2\phi}$ . Функціональний ексцентриситет або функціональний питомий дисбаланс для виробу знаходять за формулою  $e_{\text{ст.}\phi} = D_{\text{ст.}\phi} / m_{\text{рот}}$ .

Тепер, знаючи максимальну експлуатаційну частоту обертання ротора можна встановити, до якого класу точності балансування попадає знайдений на

дослідних виробках функціональний питомий дисбаланс. Остаточню клас точності балансування для масового виробництва цих машин доцільно назначати на один клас точніше [40].

Для машин, у яких неможливий доступ до площин корекції, допускається змінювати і нарощувати залишкові дисбаланси на декількох роторах до складання виробів, а кількість виробів визначати за викладеною вище методикою. Допустимі значення дисбалансів знаходять, як викладено вище, використовуючи поняття коефіцієнта запасу балансування  $K_{зан}$ , або безпосередньо, віднімаючи від функціонального дисбаланса експлуатаційний для ротора, що балансується у складанні, і ще технологічний, для ротора, у якого балансують окремі деталі до складання [75].

Типи ротора, для яких гістограми випадкової величини дисбаланса наближаються тими чи іншими модифікаціями або граничними випадками Гаусової щільності ймовірностей, розглядається в роботі [49]. При відповідному підборі параметрів ці гістограми з тією чи іншою точністю можна наближати і Гаусовими нормальними кривими. Дещо складніша ситуація у випадку, коли розподіл дисбалансів є полімодальним, як це показано у пункті 3.2.2.

3.2.2. Полімодальність реальних емпіричних даних про параметри механічних систем. Через об'єктивні і суб'єктивні причини виміряні на реальному об'єкті параметри, які характеризують якість роботи МС, динамічні характеристики, властивості матеріалів тощо, як правило, мають розкид значень, тобто можуть набувати довільних значень у деяких числових інтервалах. Ця обставина дозволяє приймати їх за випадкові величини, що підпорядковані деяким законам розподілу. Маючи дані про реалізацію цих випадкових величин, можна з певною точністю оцінити їх істинні значення, наприклад методом довірчих інтервалів, як це було показано у п. 3.2.1.

Крім призначення дисбалансів, проблему дослідження законів розподілу доводиться вирішувати при ідентифікації технологічних процесів [209],

розробці нормативної документації, контролі якості продукції, що випускається [114], прогнозуванні ресурсу машин, і в низці інших задач забезпечення міцності машин, де значення контрольованих величин визначають, випробовуючи дослідні зразки з наступною обробкою експериментальних матеріалів методами математичної статистики [184].

Найчастіше дослідники обробляють емпіричні дані, виходячи із параметричних статистичних гіпотез. Перевага застосування типових законів розподілу (нормального, логарифмічно нормального, експоненціального закону, закону Вейбулла, Гамма-розподілу тощо) полягає в їх достатній вивченості та можливості отримання спроможних, незміщених і відносно високоефективних оцінок параметрів. Однак вказані вище типові закони розподілу не мають необхідного різноманіття форм, тому їх застосування не дає необхідної загальності подання випадкових величин, які зустрічаються при дослідженні динамічних систем.

Якщо апроксимація на основі типових розподілів не дає бажаної точності статистичних оцінок, у нагоді може стати непараметричний підхід, описаний, наприклад, у роботах [184, 293]. Методи непараметричної статистики є досить ефективними у багатьох задачах, які достатньо часто виникають на практиці, коли дослідник обробляє відносно малочисельні вибірки, нічого не знаючи про параметри досліджуваної генеральної сукупності [184]. Одним із недоліків непараметричних критеріїв є низька статистична потужність у порівнянні зі стандартними параметричними критеріями. Ріст статистичної потужності можливий лише з ростом об'єму вибірки.

Серед всіх задач статистичної оцінки параметрів можна виокремити клас задач, в якому оцінці підлягають емпіричні дані, сформовані під дією декількох домінуючих причин, причому виявити ці причини і розділити вибірку на відповідні до них підвибірки не видається можливим. Зокрема, такі задачі часто виникають на виробництві при статистичній оцінці параметрів деякої вибірки деталей, які потрапили на підприємство із різних партій. Щільність розподілу (ЩР) імовірностей досліджуваних параметрів може бути полімодальною.

Наприклад, проведене автором вивчення гістограм, побудованих за результатами вимірювань руйнуючого зусилля деякої досить великої кількості однотипних керамічних виробів (резисторів), показало, що закон розподілу ймовірностей зусиль не унімодальний і має чітко виражену багатoverшинну гістограму (рис. 3.18).

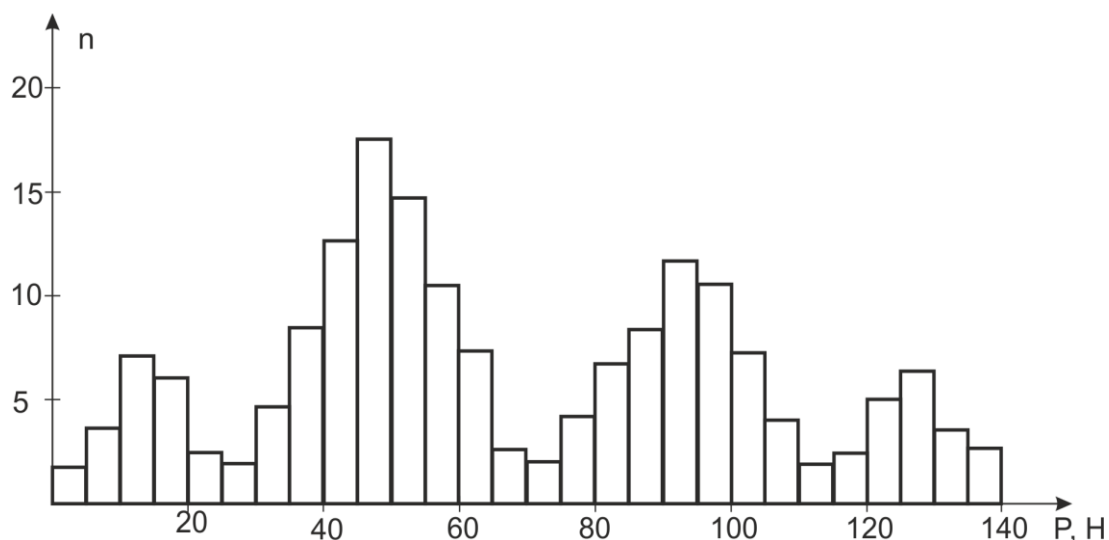


Рис. 3.18. Гістограма розподілу руйнуючих зусиль кераміки виробів

Лише вивчивши процес виробництва цих виробів, стало можливим пояснити причини появи полімодальності [69, 74, 76]. Виявилось, що вироби одного і того ж типу виготовляються на заводі на декількох однотипних лініях, кожна з яких має специфічні похибки виготовлення. Вироблені на всіх лініях деталі сортують за певними ознаками. При цьому в одну партію виробів, відібраних за однаковою радіотехнічною надійністю, потрапляють деталі, виготовлені на різних лініях. Вони при механічних випробуваннях утворюють стільки однотипних за механічними властивостями груп, скільки різноманітних ліній брали участь у їх виготовленні. Дослідження виробів з однієї партії показали чітко виражений унімодальний розподіл.

Аналогічно, проведені дослідження гістограм, побудованих за результатами вимірювань дисбалансів досить великої кількості однотипних роторів компресорів авіадвигунів після виготовлення або після експлуатації, показали, що щільність розподілу ймовірностей добре апроксимується

одновершинною кривою лише після виготовлення і складання в ідентичних умовах, а експлуатаційних дисбалансів – у однакових умовах експлуатації. Дисбаланси ж однотипних роторів, викликані, наприклад, різними виробничими чи експлуатаційними причинами, мають чітко виражені багатoverшинні гістограми (рис. 3.19). Причини полімодальності розподілу вимірних дисбалансів у наведеному прикладі детально викладені у [68]. Як виявилось [64], одні авіадвигуни з досліджуваної партії працювали на літаках в умовах Крайньої Півночі, інші – в умовах польових, погано обладнаних аеродромів Півдня, треті – в умовах великих перепадів температур при перельотах з Північної півкулі у Південну, четверті – у морських, корозійних умовах тощо. Тому поява експлуатаційних дисбалансів роторів першого типу викликано в основному попаданням у двигун дрібних частинок льоду і снігу, у роторів другого типу – попаданням дрібних камінців та інших твердих частинок, третій тип дисбалансу викликаний в основному температурними процесами, четвертий – корозійними і т.п. Таким чином, однорідна у вихідному стані вибірка роторів в процесі експлуатації розпадається на декілька підвбірок, кожна із яких об'єднана типом домінуючої причини, яка викликає появу експлуатаційного дисбалансу, і, потрапляючи на завод, наприклад, для міжресурсного ремонту, ці ротори утворюють партії з полімодальними законами розподілу дисбалансів. З цієї ж причини гістограми розподілу границі втоми лопаток таких авіадвигунів теж є полімодальними.

Очевидно, що через ненормальність ЦР апроксимація нормальним законом розподілу буде не ефективною. Більш того, апроксимація ЦР відомими параметричними законами, як це продемонстровано на рис. 3.20, часто невдала і приводить до занадто широких довірчих інтервалів досліджуваної вимірної величини, що веде до збільшення похибок і розкиду значень шуканих величин у математичній моделі.

Застосування непараметричного підходу не дає відповіді про причини полімодальності і не зможе розкрити внутрішню структуру даних з урахуванням можливої полімодальності законів їх розподілу.

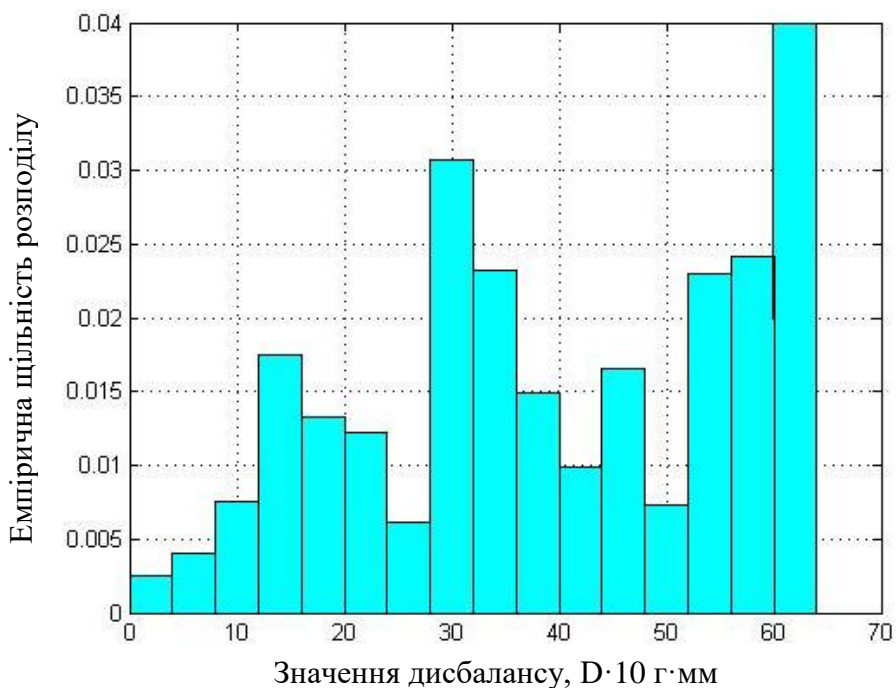


Рис. 3.19. Розподіл дисбалансів ротора компресора при низькочастотному балансуванні для лівої опори, побудована по вибірці з 252 роторів

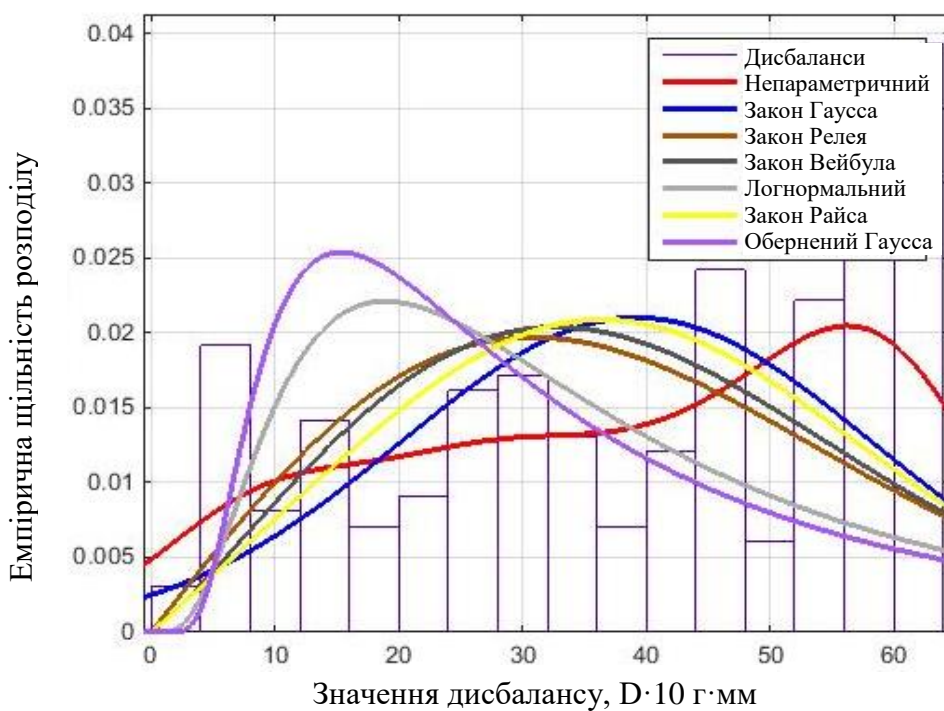


Рис. 3.20. Апроксимація щільності розподілу унімодальними розподілами



Ці проблеми тягнуть також за собою труднощі зі встановленням допусків експериментально досліджуваних параметрів.

Розв'язання задачі статистичної обробки даних з полімодальними імовірнісними розподілами пропонується здійснювати, апроксимуючи емпіричну ЩР сумішшю законів розподілу імовірностей, з наступною її декомпозицією і статистичною оцінкою параметрів компонентів суміші. Для цього є принаймні два важливі аргументи.

1. На відміну від непараметричного підходу, запропонований підхід дає правила роботи з такими статистичними матеріалами, зокрема, методи визначення обґрунтованих допустимих значень досліджуваних параметрів.

2. Запропонований підхід в умовах серійного виробництва і змішування партій деталей дає змогу реалізувати селективний підбір матеріалів і деталей для їх ефективнішого використання, що призводить до збільшення економічної ефективності виробництва.

Отже, досліджувана характеристика може розглядатись як випадкова величина, що являє собою алгебраїчну суму великої кількості незалежних і рівномірно обмежених випадкових величин, кожна з яких визначається одним з таких факторів, як властивості матеріалу, сировинна база, особливості обладнання, технологія виробництва тощо.

Зауважимо, що далеко не завжди причини, які викликають розкид значень досліджуваного параметра, очевидні і можуть бути знайдені. Тому виникає проблема пошуку методів обробки таких полімодальних емпіричних законів розподілу.

Проведений автором аналіз робіт [13, 39, 94, 138, 225] показав, що існуючі підходи та методи вирішення задачі обробки статистичних даних, які підпорядковані полімодальним законам розподілу, мають суттєві недоліки, що обмежує їх застосування в задачах обробки емпіричних даних. У зв'язку з цим вимагають розробки методи обробки таких даних. Поряд з вирішенням проблеми розділення сумішей розподілів випадкових величин потребують

вирішення й інші завдання, зокрема забезпечення стійкості рішень, створення методів побудови гістограм.

Математично полімодальні закони розподілу, які називають сумішами функцій розподілу, можна описати наступним чином [37]. Нехай у наведеному вище прикладі розподілу дисбалансів роторів компресорів авіадвигунів кількість умов експлуатації, які формують домінуючі причини появи підвибірок, дорівнює  $k$ , імовірність того, що авіадвигун експлуатувався у  $i$ -ій експлуатаційній умові дорівнює  $\rho_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ;  $\sum_{i=1}^k \rho_i = 1$ ), дисбаланс авіадвигуна є випадковою величиною з ЩР  $f_i(x, \mu_i, \sigma_i)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , де  $\mu_i$  і  $\sigma_i$  – математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення  $i$ -ї підвибірки. Маємо випадкову величину  $X$ ; про умови досліду, в результаті якого вона набуває певне значення, можна утворити  $k$  взаємовиключних гіпотез:  $H_1, H_2, \dots, H_k$ .

Імовірності гіпотез відомі:  $P(H_i) = \rho_i \quad \forall i = \overline{1, k}, \quad \sum_{i=1}^k \rho_i = 1$ .

Якщо має місце гіпотеза  $H_i$ , функція розподілу  $X$  дорівнює  $F_i(x)$ . Знайдемо повну («усереднену») функцію розподілу  $F(x)$  випадкової величини  $X$  з врахуванням випадковості її закону розподілу.

За визначенням  $F(x) = P\{X < x\}$ . Знайдемо цю імовірність за формулою повної імовірності з гіпотезами  $H_1, H_2, \dots, H_k$

$$F(x) = \sum_{i=1}^k P(H_i)F_i(x) = \sum_{i=1}^k \rho_i F_i(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

де функції розподілу  $F_i(x)$  – компоненти суміші;

$\rho_i$  – ваги відповідних компонент.

Дискретній суміші розподілів  $F(x)$  відповідає дискретна ЩР

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \rho_i f_i(x, \mu_i, \sigma_i), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

3.2.3. Динаміка механічних систем із декомпозицією полімодальних сумішей імовірнісних розподілів. При побудові статистичних моделей розподілу найважливішим етапом розв'язання ОЗ є декомпозиція (розщеплення) сумішей, оскільки структура отриманих при вибіркових спостереженнях даних, як правило, невідома. Це задача визначення кількості  $k$ , ваги  $\rho_i$  і вектора параметрів  $\mu_i, \sigma_i$  кожної із підвбірок (партій, що змішуються) в загальній виборці (змішаному розподілі) (3.9).

Суть запропонованого автором імовірнісного методу обробки експериментальних даних, що підпорядковані полімодальним законам розподілу, полягає у наступному:

- деякий параметр об'єкта розглядається як випадкова величина  $X$ ;
- кожна вибірка реалізацій може бути представлена у вигляді об'єднання  $k$  підвбірок;
- кожна підвбірка є вибіркою  $x_i$  із генеральної сукупності реалізацій випадкової величини з ЩР  $f_i$  з вектором параметрів  $\theta_i$  (компонент суміші),  $i = \overline{1, k}, 2 \leq k < \infty$ .

Якщо імовірність того, що  $X$  набуває значення, яке належить  $x_i$ , дорівнює  $\rho_i$ , то для наступної обробки статистичних даних пропонується представляти і обробляти емпіричну ЩР у вигляді суперпозиції  $k$  функцій з ЩР  $f_i$ , в якій  $f_i$  – унімодальні, у вигляді

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \rho_i f_i(x, \theta_i), \quad 2 \leq k < \infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

де  $\rho_i$  – апіорна імовірність (ваговий коефіцієнт)  $i$ -ї компоненти суміші.

В загальному випадку умова приналежності  $\forall i, f_i(X, \theta_i)$  до однієї параметричної сім'ї не ставиться.

Розглянемо окремий випадок, для якого гістограму вдається апроксимувати лінійною комбінацією Гаусових функцій ЩР з ваговими коефіцієнтами  $\rho_i$  виду

$$f(x, \mu_i, \sigma_i, \rho_i) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-1} \rho_i \exp\left[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma_i^2)^{-1}\right], \quad i = \overline{1, k}, \quad 2 \leq k < \infty. \quad (3.11)$$

Нехай у результаті експерименту одержана вибірка значень  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Для подальшої обробки результатів експерименту, перш за все, необхідно визначити невідомі параметри, застосувавши, наприклад, інтерполяцію на деякій точковій множині. Невідомі параметри необхідно шукати з умови збігу значень функції (3.11) у деяких точках (наприклад вершинах і западинах) зі значеннями апроксимуючої функції. Графік вказаної функції огинає плавною кривою побудовану гістограму. Ясно, що для однозначного визначення  $3k$  невідомих параметрів кількість точок в множині повинна бути не менше, ніж  $3k - 1$  (оскільки коефіцієнти  $\rho_i$  завжди пов'язані рівнянням  $\sum_{i=1}^k \rho_i = 1$ ). Таким чином, для знаходження невідомих  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$  і  $\rho_i$

необхідно скласти і розв'язати систему рівнянь виду

$$\begin{cases} F(x)_j = \int_{-\infty}^{\infty} (x_j, \mu_i, \sigma_i, \rho_i) dx = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-1} \rho_i \int_{-\infty}^x \exp\left[-(x_j - \mu_i)^2 (2\sigma_i^2)^{-1}\right] dx, \\ \sum_{i=1}^k \rho_i = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 3k - 1. \end{cases}, \quad (3.12)$$

де  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $\rho_i$  – сталі невідомі параметри розподілу  $i$ -ої підвибірки і її ваговий коефіцієнт.

Очевидно, що розв'язок системи (3.12) після підстановки у функцію (3.11) буде тим точніше наближати реальність, чим менші ділянки розбиття при побудові гістограми, тобто чим точнішою є гістограма і огинаюча її плавна крива.

Пошук описаних параметрів можна здійснити і методом найменших квадратів [37], записавши функцію (3.11) і прирівнявши до нуля її частинні похідні по кожному з параметрів, де  $g(x_j)$  – значення огинаючої функції у вибраних точках,  $n = 1, 2, \dots, n \geq 3k - 1$ .

$$V = \sum_{j=1}^n \left[ g(x_j) - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-1} \rho_i \exp \left[ -(x_j - \mu_i)^2 (2\sigma_i^2)^{-1} \right] \right]^2.$$

При розв'язанні аналогічної задачі можна використовувати і метод моментів, але оскільки підрахунок емпіричних моментів високих порядків призводить до значних похибок, то такий спосіб пропонується застосовувати для попередніх оцінок шуканих величин. Уточнення цих оцінок слід здійснювати, максимізуючи функцію максимальної вірогідності [37]

$$W = \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^k (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sigma_i^{-1} \rho_i \exp \left[ -(x_j - \mu_i)^2 (2\sigma_i^2)^{-1} \right],$$

прирівнюючи до нуля її частинні похідні по шуканих параметрах.

Як правило, замість пошуку максимуму функції  $W(\rho, \sigma, x)$  простіше шукати максимум її логарифму

$$\ln W = \sum_{j=1}^n \ln \left( \sum_{i=1}^k (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sigma_i^{-1} \rho_i \exp \left[ -(x_j - \mu_i)^2 (2\sigma_i^2)^{-1} \right] \right). \quad (3.13)$$

Проте, навіть така постановка задачі без застосування спеціальних прийомів викликає значні труднощі. Тому для декомпозиції суміші (3.10) застосовують спеціальні методи: EM-алгоритм і його модифікації – SEM, SEM, MSEM, SAEM тощо; наближені методи, такі як: метод фіксованих компонент з використанням МНК та метод найменших модулів, а також Баєсовський класифікатор, описані, наприклад, у роботах [141, 142, 149, 200, 291].

Запропонований метод декомпозиції сумішей імовірнісних розподілів можна застосовувати як окремо, так і разом із відомими методами, що підвищує точність і вірогідність знайдених оцінок.

Наступна складність, яка виникає при вирішенні подібних задач, носить чисто обчислювальний характер. Справа в тому, що збіжність розв'язку системи трансцендентних рівнянь на комп'ютері будь-яким ітераційним методом вимагає, щоб було відоме хоча б початкове наближення. Для

більшості випадків воно залишається невідомим. Застосування ж методу моментів саме по собі пов'язане з обчислювальними труднощами. Тому одним із шляхів вирішення вказаної проблеми може бути наступний:

- на початковому етапі розв'язання слід застосовувати градієнтний метод, який при відносно невисокій точності може застосовуватися при «грубих» початкових наближеннях;

- отриманий цим методом розв'язок може бути прийнятий за початкове наближення для застосування більш точного методу, наприклад, методу Ньютона.

Запропонований автором метод декомпозиції сумішей базується на апроксимації функції ЩР ймовірностей функцією типу (3.11) за допомогою МНК або інтерполяції на деякій точковій множині. В той же час відомо, що емпіричні дані вибірки  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  можуть бути представлені лише варіаційним рядом, гістограмою або вибірковою (емпіричною) функцією розподілу ймовірностей

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{x_j < x\}}, \quad (3.14)$$

де  $1_{\{A\}}$  – індикатор події  $A$ .

Питання побудови гістограм є достатньо важливим і заслуговує на детальний розгляд в окремому підрозділі.

3.2.4. Метод побудови гістограм при довільному розподілі ймовірностей емпіричних даних. Оскільки нормалізована гістограма (щільність відносної частоти) при певних умовах є емпіричною ЩР, побудованою для вибірки, апроксимація буде тим точнішою, чим краще побудована нормалізована гістограма буде наближатись до функції ЩР імовірностей генеральної сукупності.

У будь-якому випадку задача зводиться до розв'язання системи трансцендентних рівнянь. Цю процедуру виконують за допомогою спеціальних програм на комп'ютері. Проведений огляд (див., наприклад роботи [88, 141]) відомих підходів до розв'язання таких задач, показав їх недоліки і, незважаючи на високу теоретичні цінність, при вирішенні практичних завдань їх важко застосувати, оскільки суміші ЩР, як правило, задаються не графіками, а деякими кінцевими вибірками реалізацій випадкової величини, які подаються в зручному для обробки вигляді, наприклад, у вигляді гістограм. Якщо для двох і тривимірних законів розподілу статистичні дані зручно представляти у вигляді кластерів, то для аналізу одновимірних розподілів їх найзручніше візуалізувати у вигляді гістограм. Сама по собі гістограма дає можливість прогнозувати величину досліджуваного параметра лише на обмеженому інтервалі. Для побудови статистичної моделі розподілу і обґрунтованого прогнозування в області малих імовірностей необхідно наблизити її деякою аналітичною функцією з продовженням останньої на числову вісь. Отже, вибір статистичної моделі розподілу визначається видом гістограм, який, у свою чергу, залежить від способу її побудови, і, особливо, від обраного кроку інтервалу значень.

При побудові нормалізованих гістограм перед дослідниками природно постає питання, яким же повинен бути крок розбиття  $h$  при побудові гістограм?

Важливість обґрунтованого вибору кількості інтервалів при побудові гістограм підкреслена, наприклад у [181], де зазначено, що задача вибору оптимальної кількості інтервалів при побудові гістограм – це задача оптимальної фільтрації, а оптимальною кількістю інтервалів є така, коли максимально можливе згладжування випадкових флуктуацій даних узгоджуються з мінімальним спотворенням від згладжування самої кривої шуканого розподілу.

Рекомендації щодо вибору кроку розбиття інтервалу значень досліджуваної випадкової величини, які є в літературі з теорії ймовірностей і математичної статистики, носять чисто емпіричний характер (наприклад, правило Штюргеса). Е. С. Вентцель [37] відмічає, що кількість кроків не має

бути занадто великою, в іншому разі ряд розподілу стає невиразним, і частоти виявляють в ньому нерівномірні коливання; з іншої сторони вона не має бути занадто малою, адже при малій кількості кроків властивості розподілу описуються статистичним рядом занадто грубо. У багатьох роботах (див., наприклад, огляд у роботах [197]) теж дані рекомендації із вибору кількості інтервалів, але незважаючи на широке практичне використання вказаних рекомендацій, лишається відкритим питання обґрунтованого вибору кроку розбиття інтервалу значень досліджуваної випадкової величини таким чином, щоб побудований статистичний ряд і гістограма відповідали дійсній структурі даних і забезпечували розкриття цієї структури, зокрема, наявності суміші розподілів.

На рис. 3.21 проілюстровано вплив кроку на характер гістограми, зокрема кількість мод, для однієї і тієї ж вибірки емпіричних даних ( $n=150$ ) суміші трьох гаусіан  $N_i(\mu, \sigma^2)$ ,  $i=1,2,3$ , з параметрами відповідно  $\mu_1=10, \sigma_1=2$ ;  $\mu_2=20, \sigma_2=5$ ;  $\mu_3=40, \sigma_3=4$ ;  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1/3$ .

З рис. 3.21 видно, що з ростом кількості інтервалів гістограма не буде наближатись до ЩР. Отже, існує деякий оптимальний крок  $h_{opt}$  побудови гістограм, при якому її апроксимація функцією (3.11) дасть оцінки параметрів  $\rho_i$ ,  $\theta_i$ , найближчі до їх справжніх значень.

Також є очевидним, що кількість компонент суміші  $k$ , визначених за гістограмою, залежить від кроку  $h$ . Для визначення  $h$  пропонується розглянути різні варіанти його значень, а отже і різні значення кількості компонент суміші  $k$ , і надалі вибрати оптимальне значення  $h_{opt}$ , виходячи із деяких критеріїв якості. Одним із способів може бути перебір всіх можливих значень  $h$ ,  $k$  і оцінювання отриманої моделі, максимізуючи деякі критерії, але такий спосіб є занадто ресурсовитратним.

Слід також пам'ятати, що з ростом  $k$  буде збільшуватись і вірогідність моделі (3.13), оскільки більш гнучка модель може краще пояснити



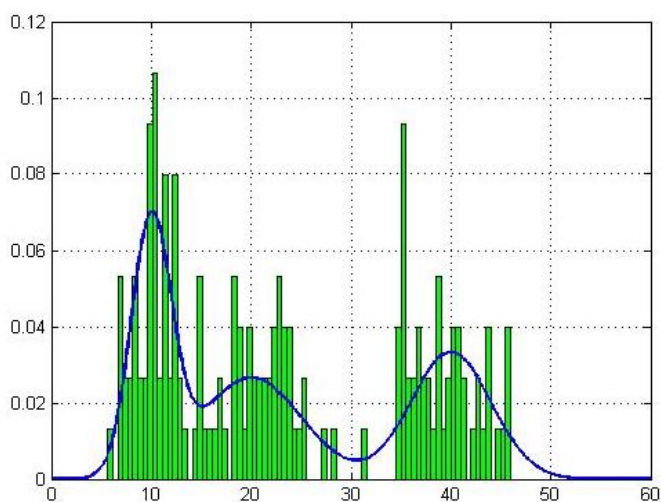
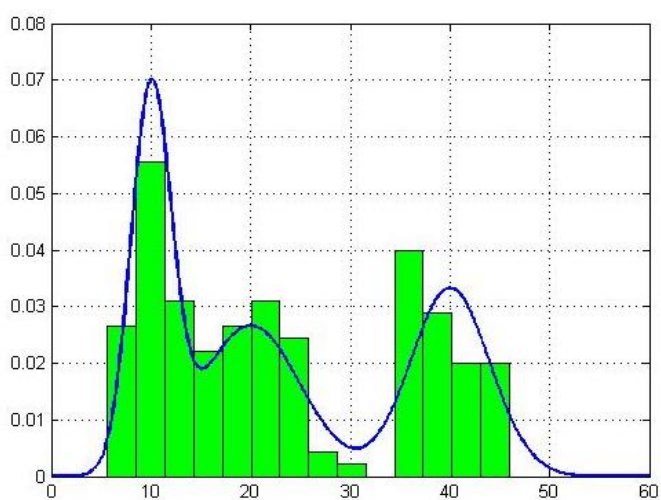
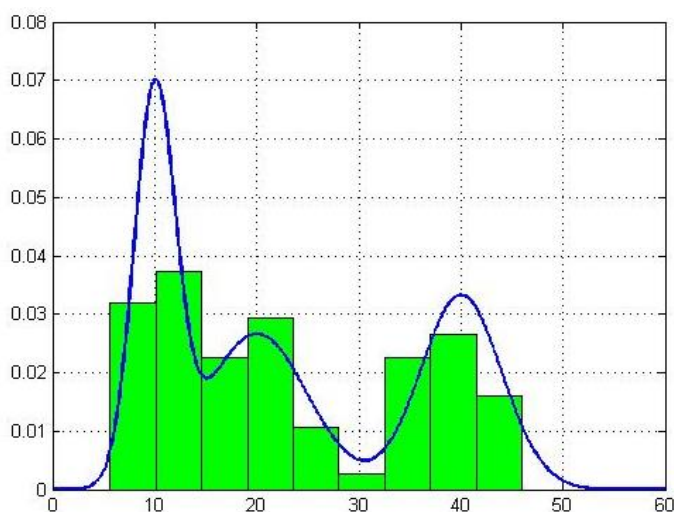
а)  $h=0,5$ б)  $h=3$ в)  $h=5$ 

Рис. 3.21. Функція ЦР суміші гаусіан і гістограми розподілу емпіричних даних з різними кроками  $h$  їх побудови

досліджувані дані, тому цю задачу неможливо розв'язати, просто шукаючи  $k$  із умови максимуму вірогідності і включивши його до шуканих параметрів.

Для вибору оптимального кроку  $h_{opt}$  автором запропонований наступний метод.

На початку необхідно задатись початковим кроком  $h$ . Крок має бути мінімальним, але не меншим за точність вимірювання параметра  $\varepsilon$ . Оскільки справжня кількість мод  $\varepsilon$  невідомою, пропонується вибирати початкову кількість компонент  $k$  в (3.11) наперед більшою, наприклад такою, що дорівнює кількості локальних максимумів функції  $f(x)$ . Далі запропонованим раніше методом необхідно визначити невідомі параметри  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{i-1}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ .

Якщо в результаті розрахунків один або декілька вагових коефіцієнтів  $\rho_i$  виявляться меншими за деяку наперед задану порогової величини  $\beta$  (рівня значущості), то відповідними членами у лінійній комбінації (3.11) можна знехтувати.

Дійсно, інтегральна функція розподілу з ЩР (3.11) має вигляд

$$F(x) = \sum_{i=1}^k \rho_i \int_{-\infty}^x f_i(x, \theta_i) dx.$$

Нехай, наприклад,  $\rho_1 < \beta$ . Тоді після відкидання першого доданку в лінійній комбінації (3.14) нова інтегральна функція розподілу може бути

записана у вигляді  $\bar{F}(x) = \sum_{i=2}^k \rho_i \int_{-\infty}^x f_i(x, \theta_i) dx$ . Оцінімо різницю:

$$|F(x) - \bar{F}(x)| = \rho_1 \int_{-\infty}^x f_1(x, \theta_1) dx \leq \rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, \theta_1) dx \leq \beta.$$

Причому, отримана оцінка є справедливою для довільного  $x$ . Правомірність застосування такого підходу до емпіричної функції розподілу імовірностей  $F_n(x)$  підтверджується тим, що відповідно до теореми Гливенка [200] при великих  $n$  рівномірно по  $x \in \mathbb{R}$  виконується співвідношення  $F_n(x) \approx F(x)$ .

Наприклад, якщо функція розподілу імовірностей повинна вимірюватись з точністю до  $\varepsilon=0,01$ , то значення порога достатньо взяти  $\beta=0,005$ .

Далі крок гістограми можна збільшувати доти, доки кількість вершин (локальних максимумів) не стане дорівнювати кількості членів  $k$  у лінійній комбінації (3.11) після відкидання її малих членів. Знову застосовуючи той же метод розв'язання, але вже для меншої кількості невідомих, можна визначити їх уточнене значення і відкинути малі члени.

Такий процес слід продовжувати поки  $\rho_i$  не стануть порівнювальні з вибраним рівнем значимості  $\beta$ . Отриманий при цьому крок може бути взятий за оптимальний  $h_{opt}$ . Фізично цей процес означає, що підвибірки з малим  $\rho_i$  вносять досить незначний внесок у загальну вибірку і тому їх можна об'єднати з однією із підвбірок виробів з близькими величинами досліджуваного параметра.

Модифікацією запропонованого алгоритму може бути попереднє визначення кількості компонент суміші  $k$  одним із відомих методів, наприклад

за Байєсовським інформаційним критерієм [141], і виконання ітераційного алгоритму до його зупинки при досягненні рівності кількості компонент знайденому значенню  $k$ . При цьому одержаний крок побудови гістограми може бути взятий за оптимальний  $h_{opt}$ .

3.2.5. Призначення допустимих значень параметрів з певною надійністю. Одержання закону розподілу імовірності досліджуваного параметра у вигляді (3.10) дає можливість перейти до розв'язання однієї із важливих практичних задач – призначення допустимого значення цього параметра з певною надійністю. Як відомо, допустиме значення параметра, який характеризує властивості або якість роботи нових виробів і матеріалів, які не мають вивчених аналогів, встановлюється випробуванням однієї партії. При цьому для виробів (матеріалів) створюються критичні, найбільш несприятливі для їх роботи ситуації, за яких ці вироби (матеріали) ще здатні виконувати покладені на них функції, і визначають значення досліджуваного параметра. Допустимі значення параметрів з певною надійністю визначаються методами математичної статистики на основі отриманих експериментальних даних. Наприклад, при дослідженні механічної міцності керамічних виробів (резисторів) їх піддають випробуванням шляхом прикладання різного виду навантажень: розтягу, згину, крученню. Одночасно вимірюють величини тих навантажень, які призводять до руйнування тіла виробів.

Як відомо, розсіювання значень досліджуваного параметра залежить від прийнятого способу виготовлення виробу. Межі інтервалів розсіювання визначаються законами розподілу параметра, який розглядається як випадкова величина, що є сумою випадкових величин, кожна з яких викликається одним з нездоланних чинників. Якщо кількість доданків у сумі досить велика, то може виникнути два варіанти при призначенні функції розподілу параметра.

У разі, коли величина кожної зі складових у описаної раніше сумі мала в порівнянні з її величиною, за центральною граничною теоремою [37] розподіл

суми близький до нормального. Фізично ця умова малості кожного доданка означає, що жоден з факторів, що обумовили появу відповідної випадкової величини, не має переважного значення.

Якщо ж серед зазначених факторів з'являються один або кілька домінуючих, то відповідні доданки мають переважне значення в сумі і закон розподілу суми стає полімодальним.

У разі нормального закону розподілу параметра, його допустиме значення встановлюється на основі отриманих реалізацій параметра з таких міркувань.

Точковою оцінкою для математичного сподівання в силу закону великих чисел є вибіркве середнє арифметичне  $\bar{x}$ . Нижня и верхня довірчі границі для математичного сподівання мають вигляд  $\bar{x} - t_\gamma \cdot \sigma / \sqrt{n}$  и  $\bar{x} + t_\gamma \cdot \sigma / \sqrt{n}$  відповідно. Тут  $\bar{x}$  – вибіркве середнє арифметичне досліджуваного параметра,  $t_\gamma$  – квантиль розподілу Стюдента, взятий із таблиці для заданої довірчої

імовірності  $\gamma$  і числа ступенів вільності  $n - 1$ ,  $\sigma = \sqrt{(n - 1)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n (\bar{x} - x_j)^2}$  – вибіркве середнє квадратичне відхилення (виправлене),  $n$  – об'єм вибірки.

Тоді із довірчою імовірністю  $\gamma$  можна стверджувати, що допустиме значення параметра знаходиться у межах  $\bar{x} - t_\gamma \cdot \sigma / \sqrt{n} \leq x \leq \bar{x} + t_\gamma \cdot \sigma / \sqrt{n}$ .

В багатьох практичних задачах дослідження параметрів МС для того, щоб можлива помилка пішла у запас, за допустиме значення параметра доцільно взяти лівий кінець довірчого інтервалу, тобто

$$[X] = \bar{x} - t_\gamma \cdot \sigma / \sqrt{n}. \quad (3.15)$$

Зауважимо, що у разі ненормальності результатів спостережень слід застосовувати непараметричний підхід, згідно чого у (3.15) замість квантилі розподілу Стюдента слід підставляти число  $U(p)$ , задане рівністю  $\Phi(U(p)) = (1 + p) / 2$ , де  $\Phi(x)$  – функція стандартного нормального розподілу з

математичним сподіванням 0 і дисперсією 1. При цьому отримані довірчі інтервали будуть дещо вузкими [184].

У разі, якщо отримана гістограма описується полімодальним законом розподілу, подальші дії з призначення допустимого значення досліджуваного параметра МС можуть здійснюватись двома шляхами.

1. *Метод екстремальних характеристик.* Розглядається підвибірка з мінімальним (максимальним) значенням  $\mu_i$ . Очевидно, що характеристика цієї підгрупи мінімальна (максимальна). Отже, визначена характеристика для таких виробів може бути прийнята і для всієї партії, оскільки отримані при цьому похибки підуть у запас міцності. У цьому випадку подальша обробка експериментальних даних може відбуватися тільки для зазначеної нормально розподіленої підвибірки значень з параметрами розподілу  $\mu_i, \sigma_i$ , як описано вище.

Якщо є можливість розділити вихідну вибірку виробів на підвибірки, об'єднані однією з домінуючих причин появи розкиду значень, то аналогічні операції з обробки експериментальних даних слід проводити для кожної підвибірки.

2. *Метод інтегральних характеристик.* Визначені параметри дозволяють записати інтегральну функцію розподілу з «вагами»

$$F(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-1} \rho_i \int_{-\infty}^x \exp\left[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma_i^2)^{-1}\right] dx,$$

яку, як і Гаусову випадкову величину, за допомогою комп'ютера можна задати таблицею наступним чином. Для кожного значення величини  $x$ , яке змінюється з певним числовим інтервалом, наприклад, 0,1, за таблицею функції розподілу нормованого нормального розподілу  $\Phi^x(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x \exp(-x^2/2) dx$  можна

визначити імовірність

$$\gamma_i = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sigma_i^{-1} \int_{-\infty}^x \exp\left[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma_i^2)^{-1}\right] dx = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{(x - \mu_i)/\sigma_i} \exp(-x^2/2) dx, \quad i = \overline{1, k}$$

і далі значення інтегральної функції з «вагами»

$$F^x(x) = \sum_{i=1}^k \rho_i \gamma_i. \quad (3.16)$$

Це означає, що функція  $F^x(x)$  буде задана таблицею. Отримана таблиця дає можливість не тільки за значеннями  $x$  визначати величину функції  $F^x(x)$ , але і навпаки – за заданими значеннями функції визначати величину аргументу. Таким чином, для заданої довірчої імовірності можна визначити шукане допустиме значення параметра  $x$  зі співвідношення виду

$$\gamma = P\{x < [x]\} = F^x([x]) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^k \sigma_i^{-1} \rho_i \int_{-\infty}^{[x]} \exp\left[-(x - \mu_i)^2 (2\sigma_i^2)^{-1}\right] dx,$$

складеного на основі визначення інтегральної функції розподілу випадкової величини параметра з ЩР (3.16).

Необхідно відзначити, що:

- по-перше, другий шлях більш точний, оскільки він враховує функції розподілу всіх підвбірок;

- по-друге, він є більш універсальним, адже з його допомогою можна розв'язувати поставлену задачу у випадку довільного розподілу, якщо попередньо скласти для нього таблицю залежності довірчої ймовірності від аргументу інтегральної функції розподілу досліджуваної величини.

Необхідно зауважити, що другий спосіб призначення допусків при полімодальному розподілі параметра поширюється (як частинний випадок) і на унімодальний закон.

Більше того, призначення допуску за допомогою інтегральної функції розподілу в цьому окремому випадку може слугувати навіть доповненням і уточненням способу розв'язання аналогічної задачі при унімодальних законах розподілу параметра, описаного раніше в припущенні, що істинне значення вимірюваної величини збігається з її математичним сподіванням.

Щоб не вимагати виконання останньої умови і отримувати значення допустимої величини параметра менше і в цьому сенсі більш надійне, ніж розраховане із зазначеним припущенням, слід прийняти лівий кінець довірчого інтервалу за СКВ і застосувати призначення допуску за допомогою інтегральної функції розподілу для унімодальних законів з отриманим зазначеним раніше чином математичним сподіванням і дисперсією.

Запропонована методика статистичної обробки даних експериментів із вимірними параметрами МС, властивостями тощо дає можливість, по-перше, розкрити внутрішню структуру даних з урахуванням можливої полімодальності законів їх розподілу, і, по-друге, дає правила роботи з такими статистичними матеріалами, зокрема, методи визначення обґрунтованих допустимих значень досліджуваних параметрів [69, 76, 84].

Зауважимо, що досліджуване питання має й самостійне значення, оскільки статистичні матеріали необхідно обробляти і при вивченні виробничих похибок виготовлення об'єктів, і при ідентифікації технологічних процесів, і при складанні нормативної документації, а також у низці інших важливих випадків у практиці проектування та виробництва МС.

*Приклад.* Порівняємо ефективність використання параметричного і непараметричного методів та методу представлення вибірки як суміші гауссіан. Для цього змодельємо суміш  $F(x)$  об'ємом вибірки  $n = 21$  двох нормальних розподілів  $F_1(x)$  та  $F_2(x)$  типу  $N(\mu, \sigma^2)$ , де  $\mu_1 = 74$ ,  $\sigma_1 = 6,6$ ,  $\mu_2 = 81$ ,  $\sigma_2 = 5,7$ , з відповідними вагами у суміші  $\rho_1 = 66 \%$ ,  $\rho_2 = 34 \%$

$$\{72,33; 77,03; 72,05; 71,15; 71,83; 72,53; 72,57; \\ 74,46; 73,49; 75,51; 71,81; 76,06; 70,12; 76,25; \\ 80,42; 81,40; 76,31; 77,97; 83,81; 85,84; 80,34\}.$$

Графік функції емпіричної ЩР ймовірностей суміші  $F(x)$ , представлена на рис. 3.22 (а), «нагадує» графік щільності розподілу закону Гаусса. Тести Ліллієфорса і Яркі-Бера на непротивіччя розподілу генеральної сукупності

значень випадкової величини нормальному закону показали позитивний результат. Параметри нормального закону, який може описати досліджувану вибірку, дорівнюють  $\mu = 75,9$ ,  $\sigma = 4,4$ , де  $\mu$  – точкова оцінка математичного сподівання,  $\sigma$  – точкова оцінка СКВ (рис. 3.23). При цьому значення від’ємного логарифму функції максимальної вірогідності дорівнює  $-60,35$ . Для порівняння, значення від’ємного логарифму функції максимальної вірогідності для закону Вейбулла дорівнює  $-62,90$ , тобто закон Вейбулла навіть краще описує досліджувану вибірку.

Після декомпозиції суміші за допомогою EM-алгоритму, одержані наступні її характеристики:  $\mu_1 = 73,6$ ;  $\sigma_1 = 5,0$ ;  $\rho_1 = 71\%$ ;  $\mu_2 = 81,3$ ,  $\sigma_2 = 8,6$ ,  $\rho_2 = 29\%$ . Графік функції густини імовірності суміші  $F(x)$ , що складається з двох законів Гаусса з ідентифікованими вище параметрами, представлений на рис. 3.22 (б).

Внаслідок похибок декомпозиції (відновлення), одержана густина розподілів дещо відрізняється від початкової. Значення від’ємного логарифму функції правдоподібності суміші дорівнює  $-88,78$ .

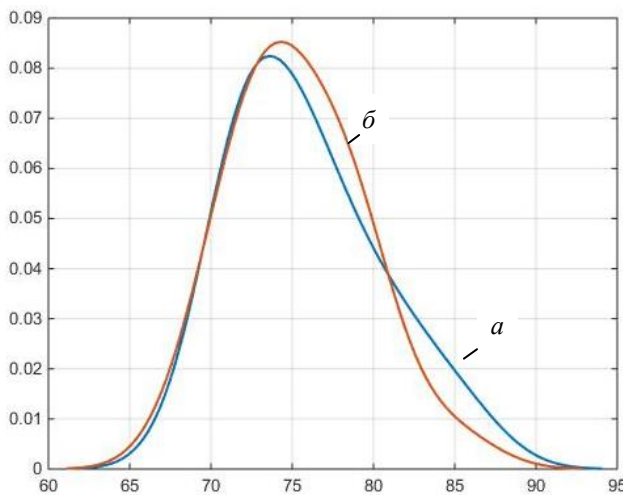


Рис. 3.22. Графіки функцій ЩР:

а) початкової суміші  $F(x)$

б) ідентифікованої суміші  $F(x)$

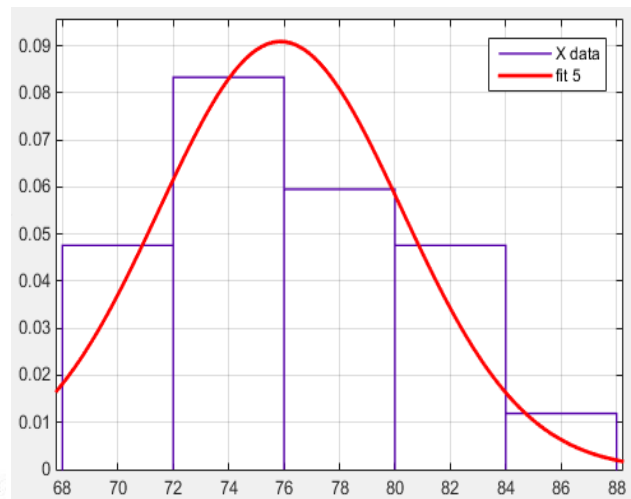


Рис. 3.23. Графік нормального розподілу,

що з прийнятною точністю описує

імовірнісний розподіл вибірки



Отже, не зважаючи на правомірність апроксимації досліджуваної вибірки нормальним розподілом, суміш нормальних розподілів у 1,5 рази краще описує досліджувану вибірку даних. Побудована таблиця значень інтегральної характеристики типу (3.16) показала, що значення імовірності попадання випадкової величини у заданий інтервал для суміші є точнішим, ніж для нормального розподілу. На практиці це означає, що моделі, в які входять одержані характеристики, а отже, і ідентифіковані за ними значення динамічних характеристик будуть точнішими.

3.2.6. Статистичні методи розв'язання обернених задач з полімодальним розподілом ймовірностей вимірних даних. Розглянемо задачу про вплив величини похибок на точність параметрів ідентифікації (див. розділ 2). Спростимо задачу (2.5) і вважатимемо, як і в п. 2.2, що елементи матриці  $\mathbf{A}$  задані точно. Для розв'язання ОЗ (2.30) необхідно мати вихідні дані динамічного процесу МС - виміряти  $\mathbf{Y}$ , компоненти якого  $y_j$  є випадковими величинами. Припущення, що  $y_j$  розподілені нормально, не завжди правомірно, і стосується лише випадкових похибок вимірювання. На практиці, як показано в розділі 2, на розподіл емпіричних даних можуть впливати і інші чинники, тому ЩР імовірностей  $y_j$ , досліджуваних параметрів може бути більш складною, зокрема полімодальною [49]. Першою проблемою, що постає перед дослідником, є задача ідентифікації компонент  $\mathbf{Y}$ , без якої неможливе розв'язання (2.30). Природно, що таку ідентифікацію необхідно здійснювати в рамках статистичної обробки даних.

Розглянемо шляхи підвищення точності розв'язання лінійних дискретних ОЗ типу (2.30) у випадку полімодального розподілу імовірностей вимірних величин шляхом обґрунтованого переходу до систем рівнянь з нормально розподіленими векторами вільних членів і забезпечення стійкості розв'язків.

Нехай в загальному випадку вектор вимірних величин  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  у (2.2) містить компоненти  $y_j$ , що мають полімодальний розподіл імовірностей. Представлення ЩР елемента  $y_j$  як суміші нормальних розподілів, у вигляді

$$f_j(y_j) = \sum_{i=1}^k \rho_{ji} f_{ji}(y_j, \mu_{ji}, \sigma_{ji}), j = \overline{1, n},$$

де  $f_{ji}$  – нормальна щільність розподілу,

з наступною декомпозицією суміші, дозволяє за емпіричними даними лише оцінити параметри  $\rho_{ji}, \mu_{ji}, \sigma_{ji}$  полімодального розподілу. Однак під час розв’язання реальних практичних задач інженера цікавить конкретне значення  $y_j$ , яке він має врахувати для розв’язання (2.30).

Для вирішення цієї проблеми пропонується спочатку провести декомпозицію суміші, а далі перейти від отриманого неперервного розподілу до дискретного розподілу  $y_j = \{y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jp}\}$  вимірних величин з їх одночасною класифікацією, де  $p$  – кількість вимірювань параметра  $y_j$ ,  $p \geq k$ . Така класифікація передбачає проведення дискримінантного аналізу [200]. Для визначення приналежності  $y_{ji}$  до  $f_{ji}$  необхідно оцінити функції максимальної вірогідності  $L(f_{ji} | y_{ji})$  і порівняти між собою. Елемент  $y_{ji}$  слід віднести до такого класу  $f_{ji}$ , в рамках якого він виглядає найбільш вірогідним, тобто функція вірогідності якого максимальна. Оскільки відомо [240], що добуток нормально розподіленої випадкової величини  $z \sim N(\mu, \sigma^2)$  на коефіцієнт  $\rho$  дає величину з розподілом  $N(\rho\mu, \rho^2\sigma^2)$ , провівши класифікацію для всіх вимірних  $y_{ji}$ , систему (2.30) можна записати у вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11}\mu_{11} + \rho_{12}\mu_{12} + \dots + \rho_{1k_1}\mu_{1k_1} \\ \rho_{21}\mu_{21} + \rho_{22}\mu_{22} + \dots + \rho_{2k_2}\mu_{2k_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_{n1}\mu_{n1} + \rho_{n2}\mu_{n2} + \dots + \rho_{nk_n}\mu_{nk_n} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Очевидно, що безпосереднє розв’язання системи (3.17) для кінцевої вибірки не дасть достовірних результатів. Тому у (3.30) замість  $Y$  пропонується по чергово підставити вектори

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{11}\mu_{11} \\ \rho_{21}\mu_{21} \\ \vdots \\ \rho_{n1}\mu_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} \rho_{12}\mu_{12} \\ \rho_{22}\mu_{22} \\ \vdots \\ \rho_{n2}\mu_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{Y}_k = \begin{pmatrix} \rho_{1k}\mu_{1k} \\ \rho_{2k}\mu_{2k} \\ \vdots \\ \rho_{nk}\mu_{nk} \end{pmatrix},$$

де  $k = \max(k_1, k_2, \dots, k_n)$  і замість (3.17) розв'язувати  $k$  систем рівнянь типу

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}_j \quad \forall j = \overline{1, k},$$

де  $\mathbf{Y}_1 = [\rho_{i1}\mu_{i1}]_{1 \times n}$ ,  $\mathbf{Y}_2 = [\rho_{i2}\mu_{i2}]_{1 \times n}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{Y}_k = [\rho_{ik}\mu_{ik}]_{1 \times n}$ .

Такий підхід значно полегшує розв'язання задачі. При цьому в загальному випадку при  $k_l < k$ ,  $l = \overline{1, m}$ , для всіх  $k_{l+1}, k_{l+2}, \dots, k$ , їх компоненти замінюються на  $\rho_{\mu} = 0$ . Отже, розв'язання задачі (2.43) у випадку полімодального розподілу імовірностей вимірних даних  $\mathbf{Y}$  зводиться до розв'язання  $k$  систем рівнянь типу (2.30), де  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_k$  – багатомірні нормальні величини,  $k$  – максимальна кількість унімодальних розподілів, одержаних при розщепленні сумішей розподілів елементів вектора  $\mathbf{Y}$ .

3.2.7. Призначення допустимих дисбалансів роторів з полімодальним законом розподілу дисбалансу. У відповідності із розробленим вище методом визначення допусків при полімодальному законі розподілу дисбалансів, нижче наводяться результати перевірки ефективності викладених методу декомпозиції суміші розподілів Гауса для гістограми розподілу значень дисбалансів однотипних роторів компресорів авіадвигунів АІ-20 після експлуатації, і призначення допусків для вимірних значень експлуатаційних дисбалансів. Відповідна гістограма представлена на рис. 3.19.

Для пошуку параметрів законів розподілу дисбалансів був застосований спосіб інтерполяції. Кожна компонента у (3.11) була прийнята за ЩР нормального закону  $N(\mu, \sigma^2)$ . Розрахунок проводився з використанням пакету MATLAB. У таблиці 3.9 і на рис. 3.24 наведені результати вказаних

розрахунків. Визначені параметри трьох гауссіан дозволили перейти до статистичної обробки емпіричних даних про дисбаланси роторів компресорів авіадвигунів з наступним визначенням допустимих значень дисбалансів.

Таблиця 3.9

## Шукані параметри суміші імовірнісних розподілів

| $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\rho_3$ |
|---------|---------|---------|------------|------------|------------|----------|----------|----------|
| 15,13   | 33,77   | 58,49   | 5,12       | 6,98       | 3,54       | 0,18     | 0,51     | 0,31     |

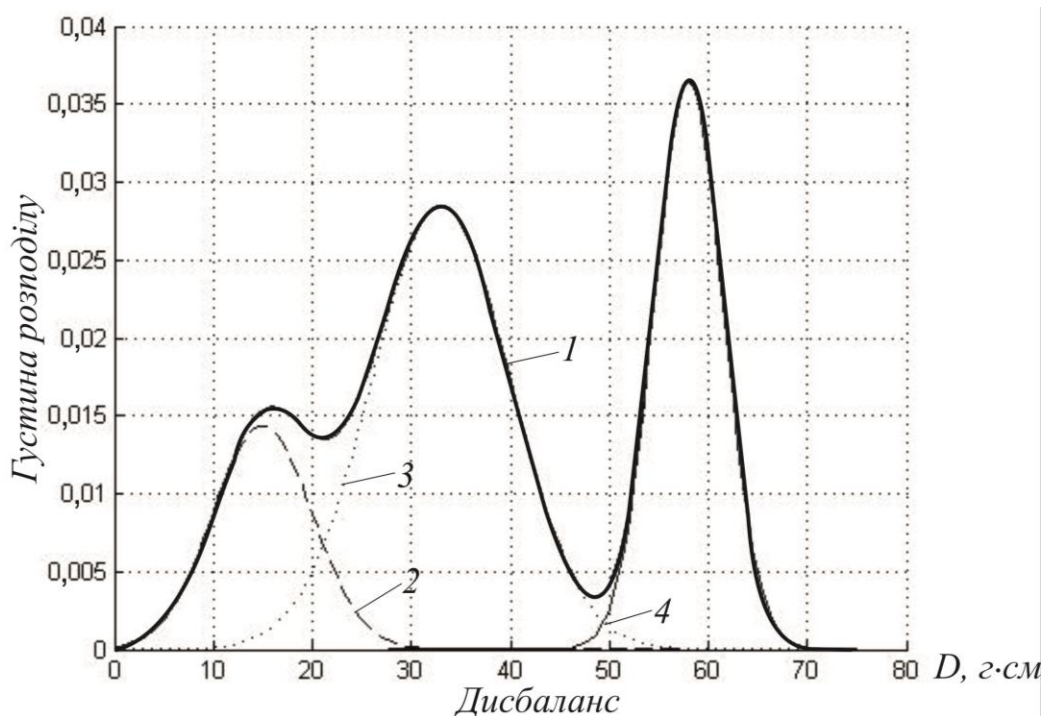


Рис. 3.24. Графіки шуканої функції ЩР суміші 1 і її складових компонент з параметрами  $\mu_1, \sigma_1$  – 2,  $\mu_2, \sigma_2$  – 3 і  $\mu_3, \sigma_3$  – 4.

У відповідності з методом екстремальних характеристик за викладеною у пп. 3.2.1 – 3.2.6 методикою аналізувалась третя мода суміші розподілів, оскільки для неї характерні більші (а отже, більш небезпечні) дисбаланси. В результаті з довірчою імовірністю  $P=0,95$  було встановлено, що допустиме значення функціонального дисбалансу знаходиться в межах  $5,11 \leq D \leq 6,49$  г·мм. Отже, для всієї досліджуваної партії роторів компресорів авіадвигунів за

допустиме значення дисбалансу було прийнято 6,49 г·см, оскільки ймовірність його перевищення складає не більше 0,05.

У таблиці 3.9 наведені параметри інтегральної функції розподілу залишкових дисбалансів типу (3.16), які отримані на базі розробленого методу. Аналіз цих таблиць, отриманих за різними значеннями вузлів інтерполяції, показує, що незважаючи на певну відмінність параметрів складових законів, значення інтегральної функції відрізняються неістотно, що важливо в способі призначення допусків, де застосовується саме інтегральна функція розподілу.

На основі запропонованого методу інтегральних характеристик за допомогою пакету MATLAB в таблицю 3.10 була записана інтегральна функція (3.16).

Таблиця 3.10

## Значення інтегральної функції розподілу залишкових дисбалансів

|        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0002 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0008 | 0,0011 | 0,0015 | 0,0019 | 0,0025 | 0,0032 | 0,0041 | 0,0052 |
| 0,0065 | 0,0081 | 0,0099 | 0,0121 | 0,0146 | 0,0175 | 0,0209 | 0,0246 | 0,0288 | 0,0335 | 0,0386 | 0,0441 |
| 0,0500 | 0,0564 | 0,0631 | 0,0701 | 0,0774 | 0,0849 | 0,0925 | 0,1003 | 0,1081 | 0,1158 | 0,1235 | 0,1312 |
| 0,1387 | 0,1460 | 0,1532 | 0,1603 | 0,1673 | 0,1741 | 0,1809 | 0,1877 | 0,1945 | 0,2014 | 0,2084 | 0,2157 |
| 0,2232 | 0,1210 | 0,2392 | 0,2478 | 0,2568 | 0,2663 | 0,2764 | 0,2869 | 0,2979 | 0,3095 | 0,3215 | 0,3339 |
| 0,3468 | 0,3601 | 0,3737 | 0,3875 | 0,4015 | 0,4157 | 0,4300 | 0,4442 | 0,4584 | 0,4724 | 0,4862 | 0,4998 |
| 0,5129 | 0,5257 | 0,5381 | 0,5499 | 0,5612 | 0,5720 | 0,5822 | 0,5917 | 0,6007 | 0,6090 | 0,6167 | 0,6238 |
| 0,6304 | 0,6363 | 0,6417 | 0,6466 | 0,6510 | 0,6549 | 0,6584 | 0,6615 | 0,6643 | 0,6667 | 0,6689 | 0,6709 |
| 0,6727 | 0,6744 | 0,6761 | 0,6778 | 0,6798 | 0,6820 | 0,6847 | 0,6881 | 0,6922 | 0,6972 | 0,7034 | 0,7109 |
| 0,7198 | 0,7102 | 0,7422 | 0,7557 | 0,7706 | 0,7867 | 0,8039 | 0,8217 | 0,8399 | 0,8581 | 0,8759 | 0,8930 |
| 0,9091 | 0,9240 | 0,9374 | 0,9492 | 0,9595 | 0,9682 | 0,9755 | 0,9814 | 0,9862 | 0,9899 | 0,9927 | 0,9949 |
| 0,9964 | 0,9976 | 0,9984 | 0,9989 | 0,9993 | 0,9996 | 0,9997 | 0,9998 | 0,9999 | 1      | 1      | 1      |

Аналіз представлених результатів дав змогу встановити:

1) максимальне допустиме значення експлуатаційного дисбалансу не перевищує 6,16 г·мм;

2) ймовірність появи у виборці дисбаланса, що не перевищує 6,49 г·мм, дорівнює 0,99.

У результаті проведених розрахунків за граничне значення експлуатаційного дисбалансу було взято 6,49 г·мм. Похибку, що виникає, можна ураховувати в запасі міцності ротора. *Примітка.* Метод інтегральних характеристик дозволив при однаковій надійності одержати на 5,4% точніше значення дисбалансу.

Для підтвердження отриманих результатів проводився наступний експеримент. Той з вагових коефіцієнтів, який виявився істотно менше двох інших, вважали рівним нулю, і інтегральний закон розподілу вважали двомодальним. Для цих випадків знову визначали відповідні параметрів  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $\rho_i$ ,  $i = 1, 2$ , і знову розраховували таблиці інтегральної функції розподілу з «вагами».

Порівняльний аналіз таблиць, розрахованих вищевказаним чином, для трьох- і двомодальних законів розподілу показав, що вони відрізняються неістотно. Це дає можливість при певному аналізі на комп'ютері автоматично знаходити не тільки практично достатню кількість мод закону розподілу для будь-якого кроку  $h$ , обраного при побудові гістограм, а й уточнювати значення самого кроку.

У додатку А.4 розміщена програма мовою MATLAB, яка здійснює апроксимацію полімодальної емпіричної функції ЩР дисбалансів відомими параметричними законами (Гаусса, Релея, Вейбула, логнормальним, Райса, оберненим Гаусса), що демонструє неспроможність опису реального полімодального розподілу відомими законами імовірнісних розподілів.

### 3.3. Зниження віброактивності турбонасосного агрегату

3.3.1. Побудова математичної моделі. Як показують результати експериментальних досліджень, низькочастотне балансування ТНА (див. рис. 3.25) є неефективним. Тому виникла потреба провести динамічне балансування ротора ТНА. Загальна мета дослідження ТНА полягала в тому, щоб на основі розробленого у розділі 2 методу балансування без пробних вантажів

диференціюванням кривої прогину та ідентифікацією з потрібною точністю пружно-інерційних характеристик і дисбалансів ротора, застосовуючи методи забезпечення стійкості ОЗ, провести балансування і перевірити адекватність ідентифікованих параметрів і динамічної моделі результатам натурних випробувань. Крім того, бажано визначити, якими мають бути значення залишкових дисбалансів (або ексцентриситетів) на дисках ? Використаємо розроблену вище методику, згідно якої потрібно було вибрати математичну модель, записати рівняння, що пов'язують ексцентриситети з реакціями опор. В умовах відсутності достовірних даних про жорсткість і критичні оберти ротора на першому етапі поставлено задачу провести статичні випробування ротора, а відтак експериментально знайти його статичні коефіцієнти впливу.

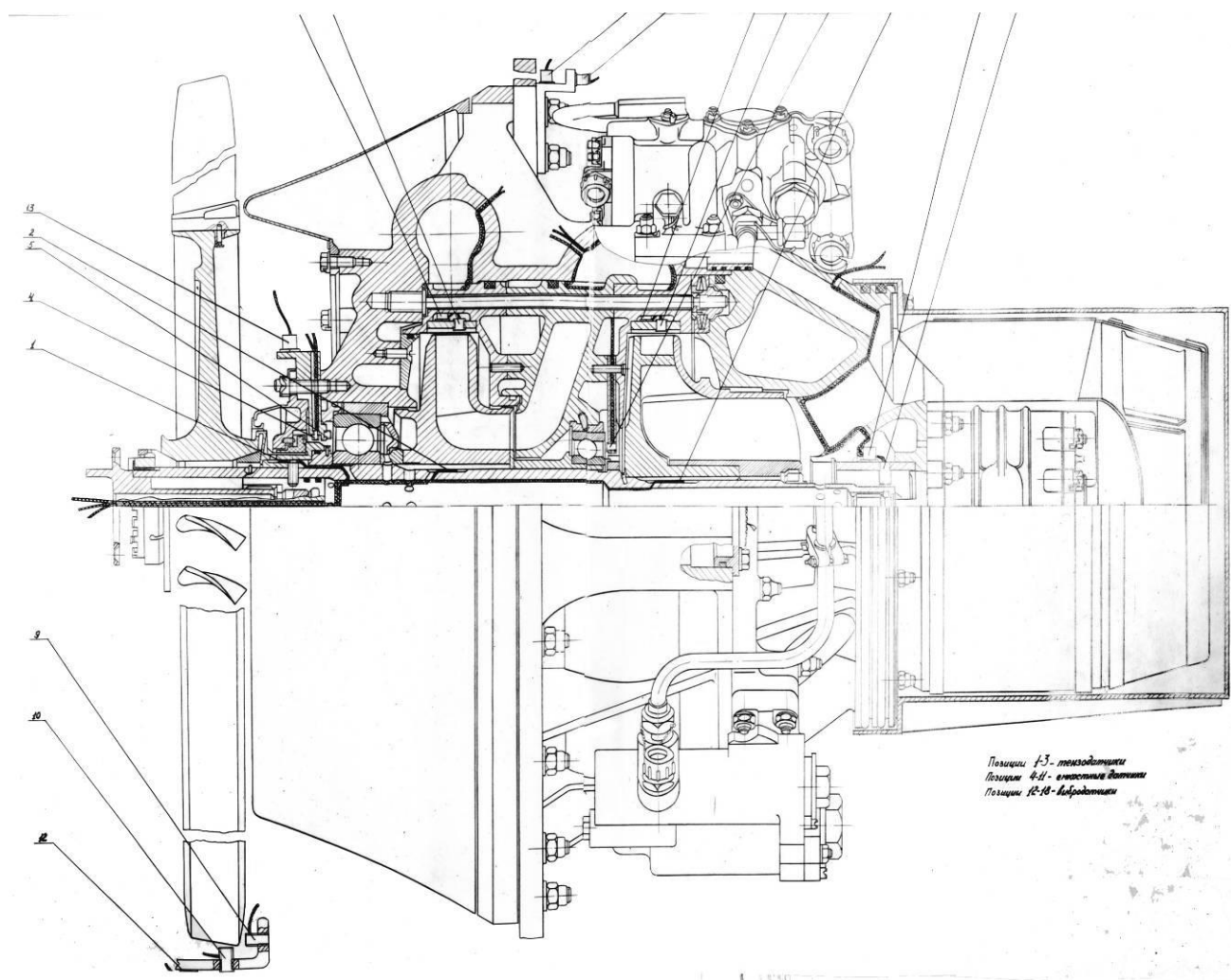


Рис. 3.25. Поздовжній переріз ТНА-150, препарованого для досліджень

Крім цього, із технічної документації такої складної конструкції, як ТНА, розрахунковим шляхом не вдається визначити точне значення мас, жорсткостей, коефіцієнтів демпфування багатозв'язної системи, а підстановка неточних значень цих параметрів навіть у найрозгалуженіші математичні моделі призводить до великих помилок [72, 92]. Між тим у ОЗ, як показано, наприклад, в роботах Л. Я. Банах [19, 311], можна досягти більшої точності при складанні більш грубих моделей, в які підставлені точні, приведені до цих моделей значення вказаних вище основних динамічних параметрів.

Оскільки ротор ТНА-150, що обертається на двох підшипниках, складається з двох масивних дисків компресора і диска турбіни (рис. 3.25), в яких зосереджені основні маси і дисбаланси, для розрахунків була вибрана тримасова модель, наведена на рис. 3.26. Номери дисків моделі позначені цифрами 1, 2 і 3. При цьому до уваги бралися висловлені в [66] висновки про ефективність розрахункової моделі в залежності від точності підставлених у неї жорсткісних, масових і інерційних параметрів ротора. Для цієї тримасової моделі і були проведені статичні випробування ротора ТНА.

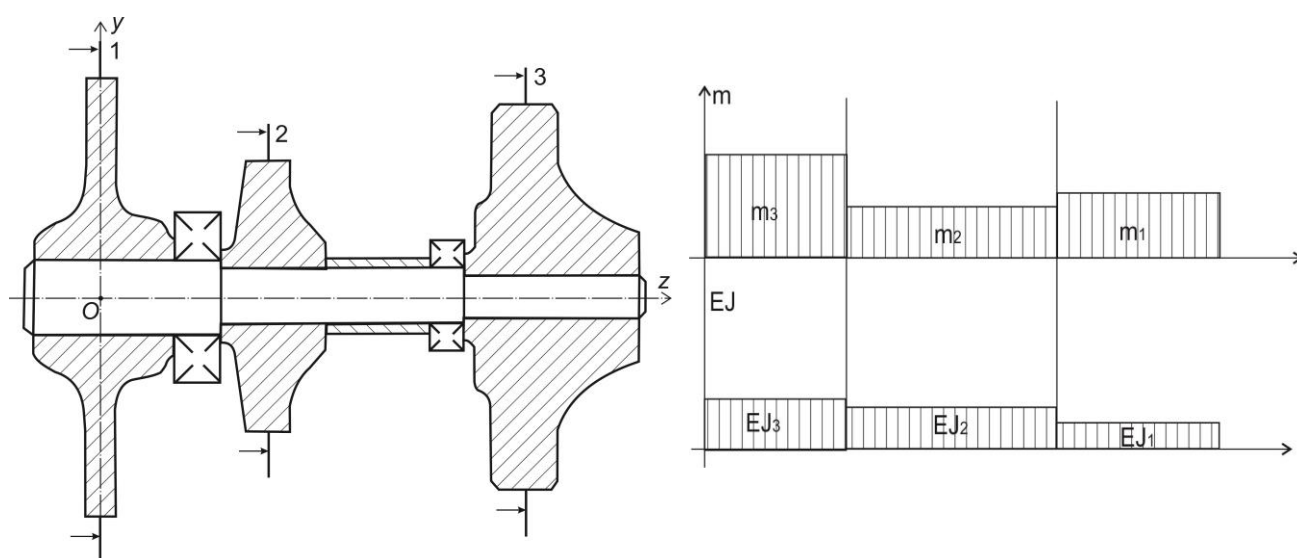


Рис. 3.26. Розрахункова модель ТНА-150



3.3.2. Визначення податливості ротора статичними випробуваннями. Для визначення статичних коефіцієнтів впливу ротора ТНА-150 проводилися його статичні випробування на спеціальній установці на базі випробувальної машини типу ДМ-30М. На рухомий стіл машини було встановлено пристосування для кріплення вала ТНА у вигляді балки з профрезерованим пазом у формі «ластівкового хвоста» (рис. 3.27). До бокової поверхні випробувального стола прикріплений кронштейн для встановлення індикаторів. Конструкції кронштейна та індикаторних стійок дозволяють вимірювати переміщення кожного наперед заданого перерізу. Зусилля у заданому перерізі задавались наконечником при переміщенні рухомого стола машини зі встановленим на ньому випробувальним столом.

Статичні коефіцієнти впливу, які дорівнюють величині прогину у  $i$ -му перерізі від дії одиничної сили у  $j$ -му перерізі,  $i, j = 1, 2, 3$ , визначали за методикою, викладеною в [206]. Для виключення похибок, обумовлених наявністю люфту і зазорів у різних елементах конструкції силовимірювального пристрою, навантажувальної системи тощо, вал піддавався обтисненню попереднім зусиллям  $P_1 = 500$  Н. В подальшому це навантаження приймалось за нульове.

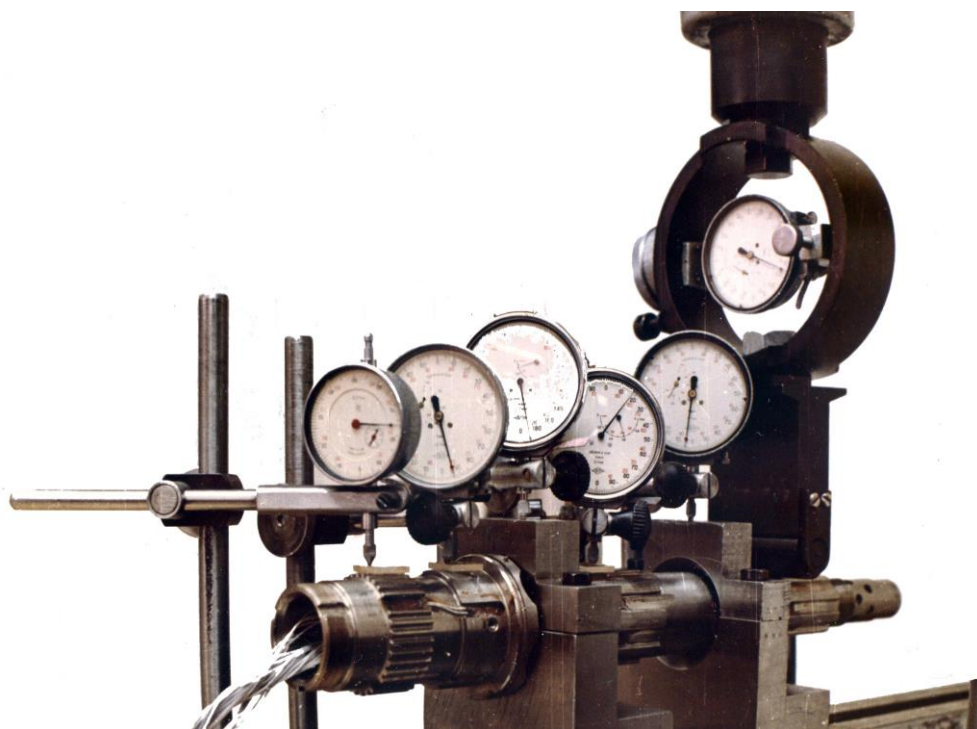


Рис. 3.27. Загальний вигляд допоміжного пристосування для статичних випробувань ротора ТНА

Для врахування переміщення опор у центрі верхньої зовнішньої поверхні кожної опори встановлюються ніжки індикаторів. Реєстрація показів цих індикаторів відбувалась одночасно із записом показів індикаторів, що вимірюють переміщення в перерізах вала.

Перед початком навантаження вала фіксувались початкові показання всіх індикаторів, включно з опорними. Далі здійснювали ступінчасте навантаження вала через кожні  $\Delta P$  від нуля до деякого максимального навантаження  $P_{\max}$  в залежності від геометричних характеристик перерізів, в якому прикладалось навантаження.

Значення максимального навантаження для деяких перерізів, у яких воно прикладалось, приведені у таблиці 3.11, причому номери перерізів у ній відповідають схемі, представлений на рис. 3.28.

Таблиця 3.11

| Навантаження   | Переріз 1 | Переріз 2 | Переріз 3 |
|----------------|-----------|-----------|-----------|
| $P_{\max}$ , Н | 1000      | 2000      | 1000      |
| $\Delta P$ , Н | 2000      | 2000      | 2000      |

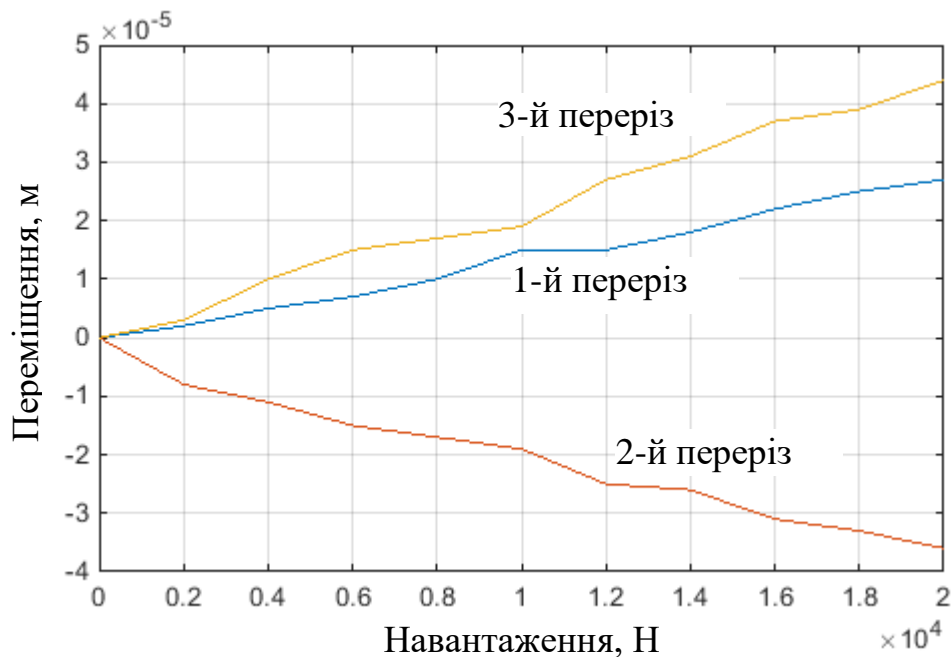


Рис. 3.28. Графіки осереднених значень переміщень перерізів при прикладанні навантаження у 2-му перерізі (з врахуванням переміщень опор)

На кожній ступені навантаження при усталеному значенні навантаження одночасно записували навантаження всіх індикаторів, після чого визначали величину переміщення перерізу вала як різницю між тільки що записаними і початковими показниками індикаторів. Розвантаження вала відбувалось також плавно і в зворотному порядку ступенями через кожні  $\Delta P$  до зусилля попереднього навантаження.

Навантаження вала здійснювали почергово в кожному з досліджуваних перерізів 1, 2, 3, 4 (рис. 3.29). З цією метою система опори – вал як єдине ціле переміщувалась вздовж паза випробувального стола доти, доки наконечник, за допомогою якого здійснювалось навантаження, не опинявся точно над перерізом, в якому має бути прикладене навантаження.

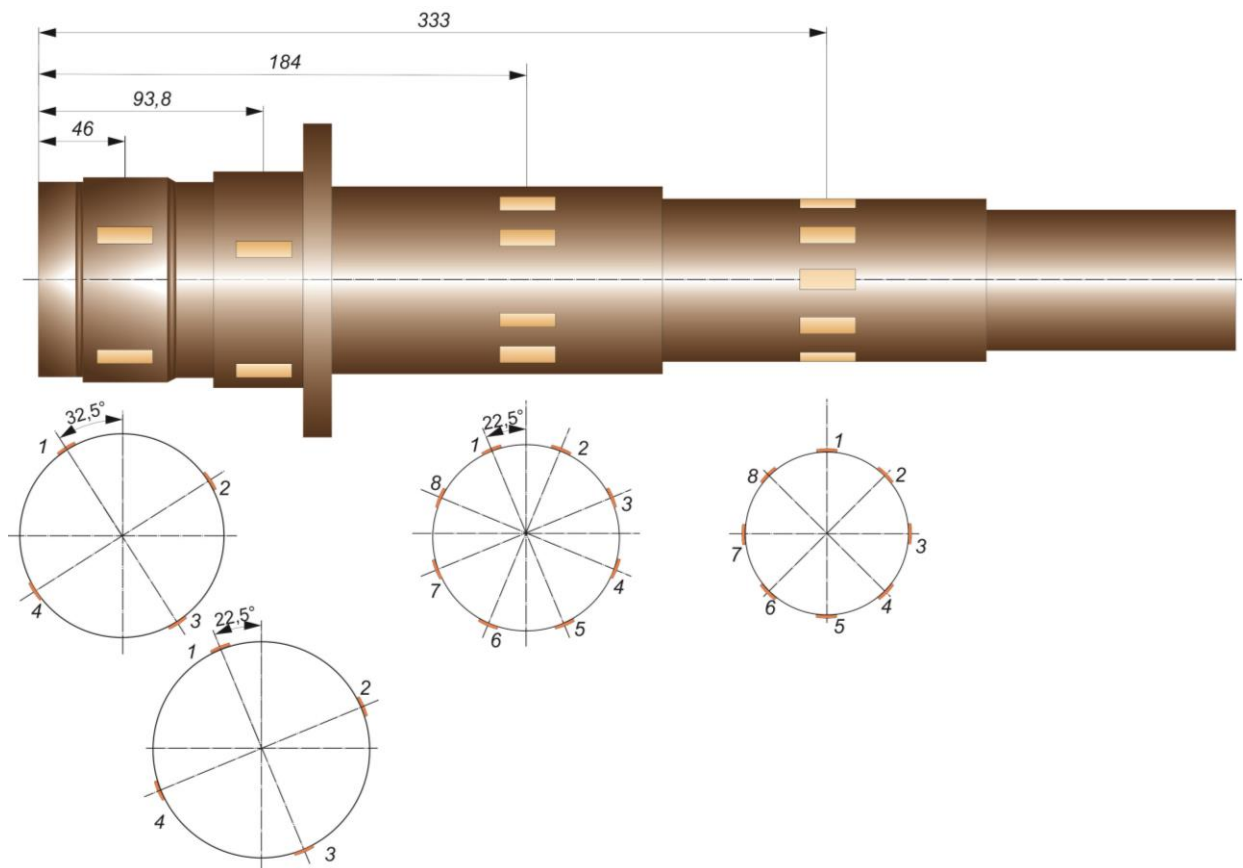


Рис. 3.29. Розташування тензорезисторів на валу ротора

Навантаження вала в кожному перерізі здійснювалось 4-5 разів. З метою виключення із переміщень вала його переміщень разом з опорами, за нульову лінію відліку переміщень перерізів вала було взято прямі, що з'єднують точки

переміщень, зафіксовані опорними індикаторами. Таким чином, вдається визначити спражні деформації осі вала від прикладеного до нього навантаження.

За графіками, що встановлюють залежність деформації осі ротора від прикладеного навантаження, які добре описуються лінійними законами, визначались статичні коефіцієнти впливу як відношення величини деформації  $i$ -го перерізу вала при прикладанні вантаження у  $j$ -му перерізі до величини цього навантаження. Отримані значення наведені в таблиці 3.12.

Побудована з коефіцієнтів впливу матриця податливостей виявилася несиметричною. Різниця між її компонентами  $\alpha_{ij}$  и  $\alpha_{ji}$  не перевищує 20%.

На основі отриманих статичних коефіцієнтів впливу розв'язанням визначника  $D$  частотного рівняння

$$D = \begin{vmatrix} m_1\alpha_{11}\omega^2 - 1 & m_2\alpha_{12}\omega^2 & m_4\alpha_{13}\omega^2 \\ m_1\alpha_{21}\omega^2 & m_2\alpha_{22}\omega^2 - 1 & m_3\alpha_{23}\omega^2 \\ m_1\alpha_{31}\omega^2 & m_2\alpha_{32}\omega^2 & m_3\alpha_{33}\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.18)$$

де  $m_1=4,05$  кг,  $m_2=2,74$  кг,  $m_3=11,0$  кг, уточнювали критичні частоти ротора на жорстких опорах:  $\omega_1=20,5 \cdot 10^2$  1/с,  $\omega_2=32,5 \cdot 10^2$  1/с, що відповідає  $n_1=19500$  об/хв,  $n_2=31100$  об/хв.

Таблиця 3.12.

Статичні коефіцієнти впливу  $\alpha_{ij}$  ротора ТНА-150

| Номер перерізу | Коефіцієнти впливу, мм/Н |                       |                      |
|----------------|--------------------------|-----------------------|----------------------|
|                | 1                        | 2                     | 3                    |
| 1              | $22 \cdot 10^{-6}$       | $-1,24 \cdot 10^{-6}$ | $3,25 \cdot 10^{-6}$ |
| 2              | $-1,6 \cdot 10^{-6}$     | $2,2 \cdot 10^{-6}$   | $-2,3 \cdot 10^{-6}$ |
| 3              | $3,0 \cdot 10^{-6}$      | $-2,32 \cdot 10^{-6}$ | $21,5 \cdot 10^{-6}$ |

У відповідності з підходами до розв'язання ОЗ синтезу, описаними автором у роботах [61, 66], допустимі значення ексцентриситетів крильчаток і диску визначали наступним чином.

1. Нехай  $\Delta = [\Delta_i]_{1 \times n}$  – вектор, координатами якого є добутки мас дисків і їх залишкових ексцентриситетів, тобто дисбаланси, де  $n$  – кількість дисків, а  $Y = [y_i]_{1 \times n}$  – вектор значень прогинів ротора. Тоді справедливим є рівняння

$$Y = \omega^2 AY + \omega^2 A'\Delta,$$

де  $A'$  – матриця податливостей  $\alpha_{ij}$ , визначена експериментально;

$A$  – матриця, складена із добутків  $\alpha_{ij}M_j$ , де  $M_j$  – маси дисків.

Звідси  $Y = \omega^2 (E - \omega^2 A)^{-1} \cdot A'\Delta$ , де  $E$  – одинична матриця.

2. Вирази для реакцій опор ротора мають вигляд

$$R_i = \sum_{j=1}^3 b_{ij} (M_j y_j + \Delta_j) \omega_j^2, \quad i=1,2,$$

де  $b_{ij}$  – відомі величини, виражені через відстані від площин посадки дисків до площин відповідних опор.

3. Допустимі значення ексцентриситетів крильчаток і дисків можна знайти, розв'язавши задачу векторної оптимізації, де критеріями оптимальності є  $\min(-\Delta_i)$ ,  $i=1,2,3$ , а обмеженнями згідно ТУ для реакцій опор служать нерівності  $|R_i| < 300H$ ,  $i=1,2$ , значення ж прогинів обмежені величиною  $|y_i| < 0,1$  мм. В якості цільової функції доцільно вибрати

$$F = \min_{\{\Delta_i\}_{i=1}^3} \left( -\prod_{i=1}^3 \Delta_i \right),$$

тоді критерієм оптимальності є об'єм паралелепіпеда, утвореного дисбаланси. При побудові областей допустимих дисбалансів, що розширюються від базисної точки (коли номінальні значення дисбалансів  $\Delta_0 = [0,0,0]^T$ ) в тривимірному просторі, досить перевірити обмеження лише на частотах обертання, близьких до критичних (19500 об/хв). Обчислення виконувались у пакеті прикладних програм MATLAB. Програми і функції для

реалізації оптимізаційної задачі синтезу допустимих дисбалансів для ротора ТНА представлені в додатку А.5.

Розв'язок ОЗ  $\min(-\Delta_i) \forall i=1,2,3$  показав, що значення допустимих залишкових ексцентриситетів у кожному перерізі не повинні перевищувати  $|e_i| \leq 0,8$  мкм, тобто допустимий дисбаланс не повинен перевищувати  $|\Delta_i| \leq 0,4$  г·мм при звичайній точності балансувальних верстатів 0,5 г·мм (рис. 3.30).

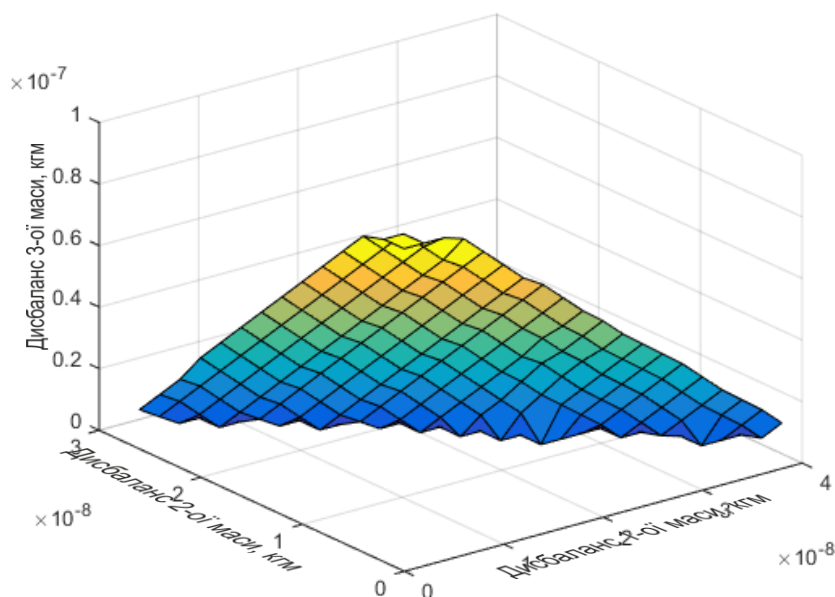


Рис. 3.30. Область працездатності, обмежена допустимими дисбалансами

Дотриматись таких значень ексцентриситетів при існуючому балансувальному обладнанні та технології балансування нереально, і до того ж можливе наступне розбалансування при експлуатації. Фактично це означає, що в даній конструкції агрегату поставлена задача про низькочастотне балансування у двох площинах корекції не має розв'язків на практиці і слід шукати принципово інший шлях зниження віброактивності виробу, а саме припустити, що ротор не можна вважати жорстким, а отже і не можна балансувати його на низьких обертах без урахування гнучкості ротора. Далі були проведені динамічні випробування ротора, які значно складніше статичних, але набагато точніше і інформативніше за них. Результати, які стосуються динамічних випробувань ротора ТНА-150 є предметом розгляду наступного пункту.

3.3.3. Динамічні випробування ротора. Для проведення динамічних випробувань ротора ТНА була створена розгінна дослідницька установка (рис. 3.31), що може розігнати ротор до 18000 об/хв. Розгінна установка є системою, що складається з електродвигуна потужністю 11,5 кВт, мультиплікатора з передавальним числом 1:12, і макетної установки ТНА-150, а саме турбоагрегата, на ротор якого, замість штатних, встановлені макетні диски і крильчатки. Зовнішній вигляд установки представлений на рис. 3.32. Для врахування ваги лопаток діаметри макетних дисків були збільшені. У дисках просверлені отвори для кріплення корегувальних вантажів у вигляді рівноважних болтів. Вал ТНА-150 був препарований тензорезисторами, датчиками переміщень і вібрацій згідно зі схемою препарування, представленою на рис. 3.33.

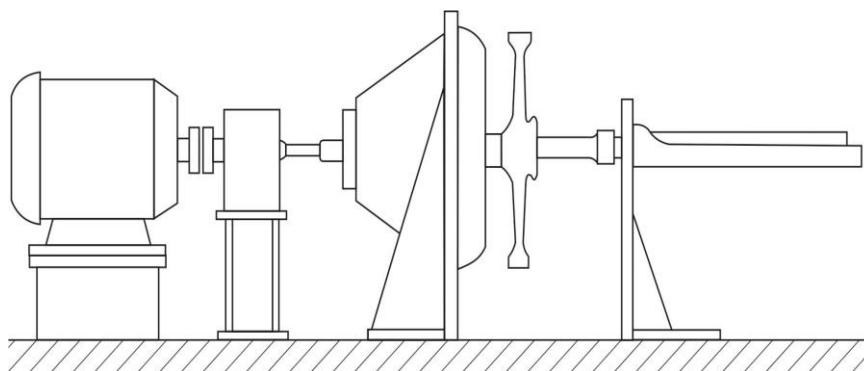


Рис. 3.31. Схема розгінної установки

Крутний момент від електродвигуна за допомогою втулково-пальцевої муфти передавався мультиплікатору, швидкохідний вал якого з'єднувався з ротором ТНА шліцьовій муфтою. Вимірювання частоти обертання здійснювалось датчиком типу ДТЕ-1, який з'єднувався з показником кількості обертів на хвилину.

Для виводів тензорезисторів використовувався дріт марки МГТФ перерізом  $0,14 \text{ мм}^2$ . Ці виводи через наскрізні отвори у стінках вала прокладались по його внутрішній поверхні і виводились через торець вала, розташований біля його 3-го перерізу.

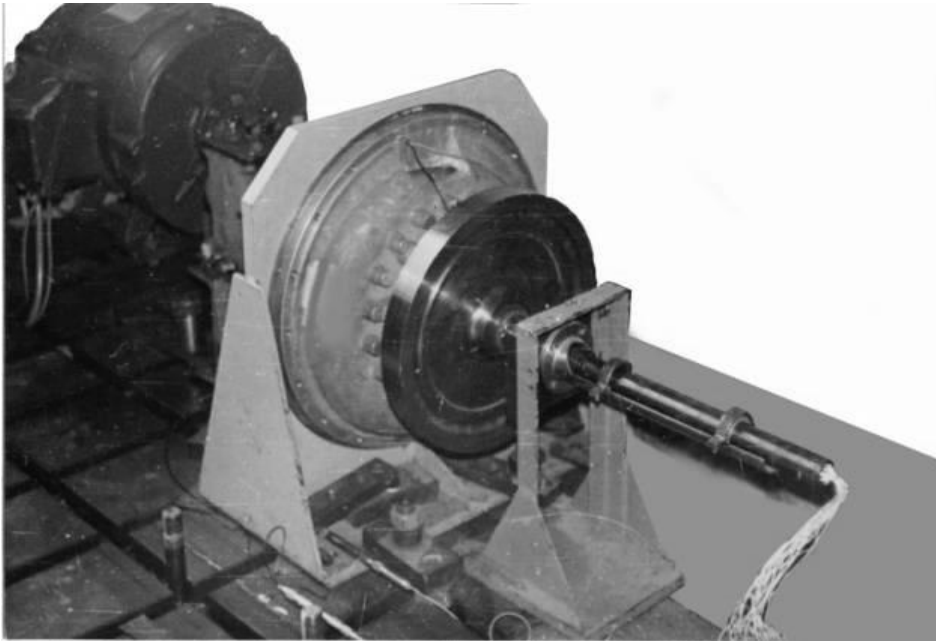


Рис. 3.32. Зовнішній вигляд макетного ТНА-150

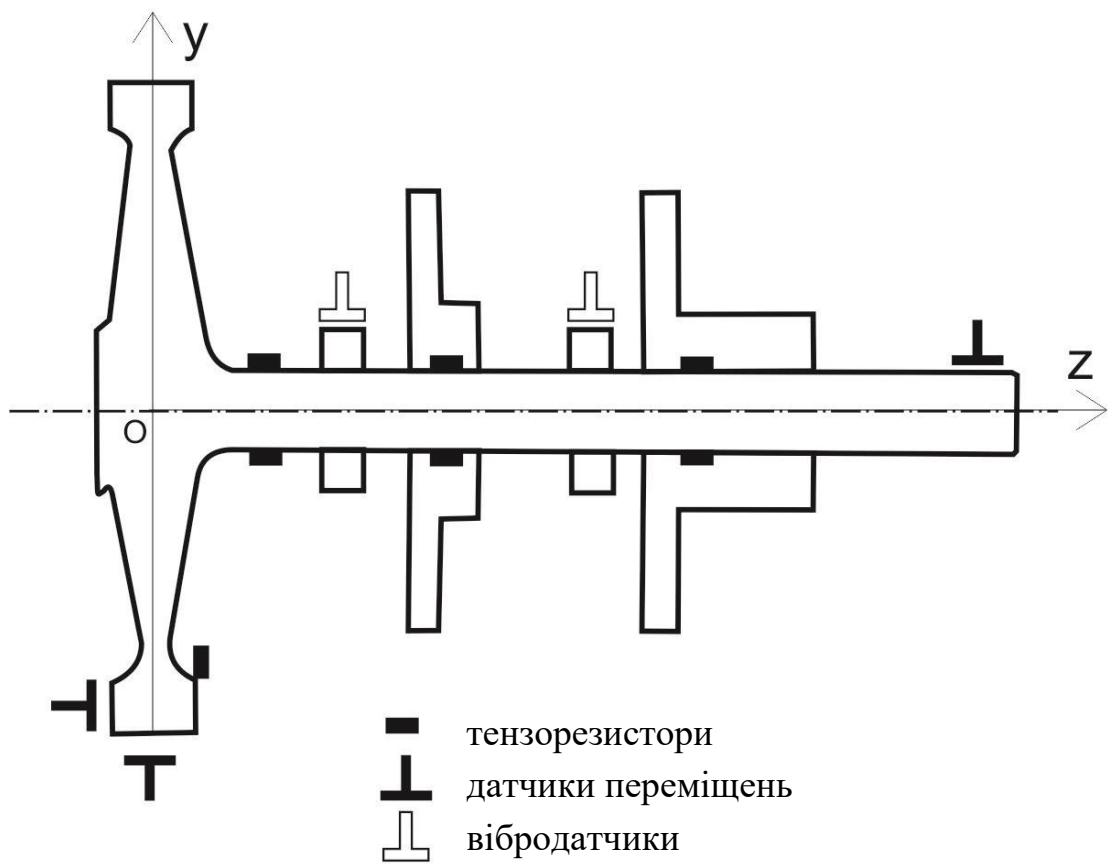


Рис. 3.33. Схема препарування ротора ТНА-150



Для захисту від пошкоджень агресивними рідинами тензорезистори після препарування покривались захисним шаром епоксидного компаунду. Для забезпечення надійної роботи тензометрів отвори, крізь які виводяться дроти, ущільнювалися повстю і герметизувальним компаундом.

Тензорезистори за допомогою ртутного струмознімача підключали до апаратури реєстрації. Вимірювання опору кожного з резисторів і сигнали від вібродатчиків після посилення їх на СДМ-132 реєстрували світлопроневим осцилографом та комп'ютером. Для реєстрації частоти обертання використовували індуктивний датчик, встановлений на кронштейні у головки струмознімача.

Зміна зазору між осердям датчика і штирком у головці струмознімача, при проходженні останнього поза датчиком, змінює величину наведеної в котушці ЕРС, що виражається зміною кривизни лінії від сигналу датчика. Оскільки головка струмознімача обертається зі швидкістю обертання ротора, то на осцилографі фактично записується сигнал з частотою обертання самого ротора.

Крім звичайного тарування тензоапаратури, проведеної на тарувальному пристосуванні до тензостанції, що встановлює залежність між відносною деформацією волокон, на яких закріплений тензодатчик і відхиленням променю осцилографу, конструкція ТНА-150 допускає проведення спеціального тарування, що встановлює однозначну пряму залежність між показами тензодатчиків (відхиленням їх промінів на стрічці осцилографа) і переміщеннями перерізів ротора. Таке тарування не лише більш зручніше і точніше, але дозволяє за показами тензорезисторів знаходити переміщення вала, не пов'язані з деформаціями, наприклад, переміщення кінця консолі при прикладанні сили й відстані від неї.

Це пряме тарування відбувається наступним чином. Навантажуючи вал у деякому перерізі, одночасно реєструють відхилення сигналу вимірювального напівмоста, що знаходяться в тому та інших перерізах вала від його положення в умовах ненавантаженості вала. Одночасно з цим записують покази індикаторів, що реєструють переміщення перерізів. Таким чином виникає можливість встановити залежності між показами тензорезисторів і переміщеннями перерізів вала. Ці залежності добре описуються лінійними законами.

*Визначення кривої прогину ротора від власної ваги.* Під час випробувань ротор розганяли до 18000 об/хв, потім живлення двигуна відключали і ротор вільно обертася до повної зупинки. Записи тензометрів і вібродатчиків проводили у всьому діапазоні частот обертання, починаючи від 2000 об/хв при розгоні, а на деяких режимах – при витримці постійної частоти і на вибігу.

Використовуючи принцип незалежності дії сил і спосіб накладання, можна знайти криву прогину ротора від власної ваги. Для цього за знайденими коефіцієнтами впливу будували прогини ротора від дії кожної з трьох приведених мас окремо, а далі склали отримані ординати всіх трьох кривих. Результати диференціювання кривої прогину представлені в табл. 3.13.

Отримані експериментально значення прогинів служать базою для розв'язання наступної ОЗ (див. п. 3.3.6).

3.3.4. Ідентифікація дисбалансів і пружно-інерційних характеристик ротора. Оскільки балансування всього ротора на низькооберткових верстатах у двох площинах корекції не приводило до бажаних результатів, було вирішено балансувати цей ротор на експлуатаційних обертах у трьох площинах корекції, де зосереджені найбільші маси, а саме площинах двох дисків компресора 2 і 3 і диску турбіни 1 (рис. 3.26). Балансування мало на меті виявити а потім компенсувати дисбаланси, які тим чи іншим чином розподілені по довжині ротора. Для цього спочатку вимірюють деформації по всій довжині ротора, або в деяких місцях, де можуть зосереджуватись найбільші дисбаланси. Частіше всього в цих місцях вимірюють прогини ротора, за якими розраховують ексцентриситети і відповідні їм значення дисбалансів, а потім і зрівноважувальні вантажі.

Задача полягала у ідентифікації за результатами вимірянних у трьох перерізах прогинів ротора величини і місця розташування ексцентриситетів (дисбалансів) кожної з мас для подальшої установки компенсувальних вантажів, що їх врівноважують.

Таблиця 3.13

Проекції прогину ротора на осі Оу і Ох та їх похідні

| Θ,<br>об/хв | Переріз 1                   |                             |                                    |                                    |                                     |                                     |                         |                         | Переріз 2                   |                             |                                    |                                    |                                     |                                     | Переріз 3               |                         |                             |                             |                                    |                                    |                                     |                                     |                         |                         |
|-------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------|-------------------------|
|             | $y \cdot 10^{-6} \text{ м}$ | $x \cdot 10^{-6} \text{ м}$ | $y'' \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ | $x'' \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ | $y''' \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2}$ | $x''' \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2}$ | $y^{IV} \text{ м}^{-3}$ | $x^{IV} \text{ м}^{-3}$ | $y \cdot 10^{-6} \text{ м}$ | $x \cdot 10^{-6} \text{ м}$ | $y'' \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ | $x'' \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ | $y''' \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2}$ | $x''' \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2}$ | $y^{IV} \text{ м}^{-3}$ | $x^{IV} \text{ м}^{-3}$ | $y \cdot 10^{-6} \text{ м}$ | $x \cdot 10^{-6} \text{ м}$ | $y'' \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ | $x'' \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ | $y''' \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2}$ | $x''' \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2}$ | $y^{IV} \text{ м}^{-3}$ | $x^{IV} \text{ м}^{-3}$ |
| 14100       | -38                         | 3                           | 132,86                             | -96,44                             | 6,67                                | -11,26                              | -0,06                   | 0,007                   | 8                           | -10                         | -180,21                            | 237,64                             | 0                                   | 22,225                              | 0,039                   | 0,0097                  | -15                         | 5                           | 90,71                              | 34,95                              | -3,85                               | 6                                   | -0,8                    | 0                       |
| 15000       | -42                         | 5                           | 161,13                             | -75,25                             | 10,01                               | -6,6                                | -0,09                   | 0,08                    | 12                          | -15                         | -32,68                             | 108,78                             | 0                                   | 17,78                               | 0,058                   | 0,0054                  | -13                         | 6                           | 83,13                              | 17,32                              | -5,78                               | 12                                  | -0,8                    | 0,44                    |
| 15600       | -42                         | 5                           | 138,41                             | -29,02                             | 7,505                               | -2,33                               | -0,06                   | 0,04                    | 12                          | -12                         | -86,61                             | 48,68                              | 0,215                               | 14,225                              | 0,081                   | 0,0043                  | -16                         | 8                           | 86,94                              | 34,58                              | -4,82                               | 12                                  | -0,8                    | 0,32                    |
| 16000       | -44                         | 4                           | 161,09                             | -36,82                             | 10,01                               | -3,15                               | -0,09                   | 0,03                    | 22                          | -2                          | -141,23                            | 40,51                              | 0,275                               | 3,115                               | 0,141                   | 0                       | -22                         | 2                           | 80,31                              | 57,88                              | -4,82                               | 0,5                                 | -0,8                    | 0                       |

Відомі інтегро-диференціальні залежності теорії згину дали можливість описати рівняння руху ротора, в результаті чого для кожного з трьох перерізів ротора в проекціях на дві взаємно перпендикулярні площини отримані рівняння системи (2.14), які пов'язують невідомі розподіли жорсткостей  $EI$ , мас  $m$  і проекції  $e_y$  і  $e_x$  ексцентриситетів  $e$  з прогинами  $y$  вала ротора [63].

$$\alpha_0 K''_{zz}(z, \omega_j) + 2\alpha_1 K'(z, \omega_j) + \alpha_2 K(z, \omega_j) - e_y \omega_j^2 = \omega_j^2 y,$$

де  $\alpha_i = \alpha_i(Z) = \frac{1}{m} \cdot \frac{d^{(i)} EJ}{dz^i}$ ,  $i=0,1,2$ ,  $K(z, \omega) = y'' / [1 + (y')^2]^{3/2}$  – кривизна пружної лінії

ротора;

$Z$  – координата перерізу ротора, що відраховується вздовж осі обертання від т. О (рис. 3.33).

Шуканими невідомими є коефіцієнти  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, e_x, e_y$ .

Використовуючи отримані вимірюванням прогинів значення проекцій прогинів  $y_j, j = \overline{1,4}$  вала ротора на чотирьох різних некритичних частотах обертання  $n_1=14100$  об/хв,  $n_2=15000$  об/хв,  $n_3=15600$  об/хв,  $n_4=16000$  об/хв і чотири перші похідні  $y_j, y_j', y_j'', y_j''', y_j^{IV}, j = \overline{1,4}$  (табл. 3.13), складали по дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь типу (2.14) для кожного із розрахункових перерізів 1,2,3, в яких ідентифікували ексцентриситети, жорсткості і маси. Матричні рівняння розглянутих лінійних дискретних ОЗ мають наступний вигляд.

Для 1-го перерізу (вісь ОУ)

$$\begin{bmatrix} -6 \cdot 10^{-8} & 13,34 \cdot 10^{-6} & 132,86 \cdot 10^{-6} & -218 \cdot 10^4 \\ -9 \cdot 10^{-8} & 20,02 \cdot 10^{-6} & 161,13 \cdot 10^{-6} & -246 \cdot 10^4 \\ -6 \cdot 10^{-8} & 15,01 \cdot 10^{-6} & 138,41 \cdot 10^{-6} & -267 \cdot 10^4 \\ -9 \cdot 10^{-8} & 20,02 \cdot 10^{-6} & 161,09 \cdot 10^{-6} & -280 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8285 \\ -10363 \\ -11209 \\ -12352 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 1,4 \cdot 10^{15}.$$

Для 1-го перерізу (вісь ОХ)

$$\begin{bmatrix} 0,7 \cdot 10^{-8} & -22,52 \cdot 10^{-6} & -96,44 \cdot 10^{-6} & -218 \cdot 10^4 \\ 8 \cdot 10^{-8} & -13,2 \cdot 10^{-6} & -73,25 \cdot 10^{-6} & -246 \cdot 10^4 \\ 4 \cdot 10^{-8} & -4,66 \cdot 10^{-6} & -29,02 \cdot 10^{-6} & -267 \cdot 10^4 \\ 3 \cdot 10^{-8} & -6,3 \cdot 10^{-6} & -36,82 \cdot 10^{-6} & -280 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 654,1 \\ 1233,7 \\ 1334,4 \\ 1122,9 \end{bmatrix}, \quad \text{cond}(\mathbf{A}) = 5 \cdot 10^{14}.$$

Для 2-го перерізу (вісь OY)

$$\begin{bmatrix} 3,9 \cdot 10^{-8} & 0,1 \cdot 10^{-6} & -180,2 \cdot 10^{-6} & -218 \cdot 10^4 \\ 5,8 \cdot 10^{-8} & 0,1 \cdot 10^{-6} & -32,7 \cdot 10^{-6} & -246 \cdot 10^4 \\ 8,1 \cdot 10^{-8} & 0,43 \cdot 10^{-6} & -86,6 \cdot 10^{-6} & -267 \cdot 10^4 \\ 14,1 \cdot 10^{-8} & 0,55 \cdot 10^{-6} & -141,2 \cdot 10^{-6} & -280 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1744,2 \\ 2960,9 \\ 3202,5 \\ 6176,2 \end{bmatrix}, \quad \text{cond}(\mathbf{A}) = 1,7 \cdot 10^{14}.$$

Для 2-го перерізу (вісь OX)

$$\begin{bmatrix} 0,97 \cdot 10^{-8} & 44,45 \cdot 10^{-6} & 267,6 \cdot 10^{-6} & -218 \cdot 10^4 \\ 0,54 \cdot 10^{-8} & 35,56 \cdot 10^{-6} & 108,8 \cdot 10^{-6} & -246 \cdot 10^4 \\ 0,43 \cdot 10^{-8} & 28,45 \cdot 10^{-6} & 48,7 \cdot 10^{-6} & -267 \cdot 10^4 \\ 0,1 \cdot 10^{-8} & -16,23 \cdot 10^{-6} & 40,5 \cdot 10^{-6} & -280 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2180,2 \\ -3701,1 \\ -3202,5 \\ -561,50 \end{bmatrix}, \quad \text{cond}(\mathbf{A}) = 6,4 \cdot 10^{15}.$$

Для 3-го перерізу (вісь OY)

$$\begin{bmatrix} -80 \cdot 10^{-8} & -7,7 \cdot 10^{-6} & -90,71 \cdot 10^{-6} & -218 \cdot 10^4 \\ -80 \cdot 10^{-8} & -11,56 \cdot 10^{-6} & -83,13 \cdot 10^{-6} & -246 \cdot 10^4 \\ -80 \cdot 10^{-8} & -9,64 \cdot 10^{-6} & -86,94 \cdot 10^{-6} & -267 \cdot 10^4 \\ -80 \cdot 10^{-8} & -9,64 \cdot 10^{-6} & -80,31 \cdot 10^{-6} & -280 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3270 \\ -3198 \\ -4272 \\ -6160 \end{bmatrix}, \quad \text{cond}(\mathbf{A}) = 2,1 \cdot 10^{14}.$$

Для 3-го перерізу (вісь OX)

$$\begin{bmatrix} 10 \cdot 10^{-8} & 12 \cdot 10^{-6} & 34,95 \cdot 10^{-6} & -218 \cdot 10^4 \\ 44 \cdot 10^{-8} & 24 \cdot 10^{-6} & 17,32 \cdot 10^{-6} & -246 \cdot 10^4 \\ 32 \cdot 10^{-8} & 24 \cdot 10^{-6} & 34,58 \cdot 10^{-6} & -267 \cdot 10^4 \\ 10 \cdot 10^{-8} & 21 \cdot 10^{-6} & 57,98 \cdot 10^{-6} & -280 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1090,1 \\ 1480,4 \\ 2135,0 \\ 561,50 \end{bmatrix}, \quad \text{cond}(\mathbf{A}) = 3,5 \cdot 10^3.$$

Число обумовленості матриці складених систем рівнянь є дуже великим, і відповідні матриці є погано обумовленими. Очевидним є той факт, що отримані розв'язки вказаних вище систем не можуть задовольняти інженерні потреби. Проте, цю обумовленість можна назвати «уявною». Дійсно, при аналізі матриці  $\mathbf{A}$  стає зрозумілим, що така погана обумовленість викликана не лише близькістю системи до виродженої, але і величезною різницею у порядку коефіцієнтів, тобто різницею значень норм рядків матриці. Застосуємо масштабування (нормування) коефіцієнтів, для чого будемо вважати, що шукані невідомі наступні:  $-\alpha_0' = \alpha_0 \cdot 10^{-11}$ ,  $\text{см}^4/\text{с}^2$ ,  $\alpha_1' = \alpha_1 \cdot 10^{-9}$ ,  $\text{см}^3/\text{с}^2$ ,  $\alpha_2' = \alpha_2 \cdot 10^{-8}$ ,  $\text{см}^2/\text{с}^2$ ,  $-e_y' = e_y \cdot 10^2$ ,  $\text{см}$ , а  $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cdot 10^{-3}$ . Тоді для 1-го перерізу (вісь  $Oy$ ) масштабована еквівалентна СЛАР в матричному вигляді має вигляд

$$\begin{bmatrix} 6,0 & 13,34 & 13,286 & 21,8020 \\ 9,0 & 20,02 & 16,113 & 24,6740 \\ 6,0 & 15,01 & 13,841 & 26,6874 \\ 9,0 & 20,02 & 16,109 & 28,0735 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,2847 \\ -10,3631 \\ -11,2087 \\ -12,3524 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 217.$$

Аналогічним чином масштабуванням коефіцієнтів СЛАР (їх одиниць вимірювання), вдалося покращити обумовленість матриць систем рівнянь, складених для перерізів 1,2,3 і осей  $Ox$  та  $Oy$ . Результати нормування представлені у табл. 3.14.

Таблиця 3.14

## Результати масштабування коефіцієнтів систем рівнянь

| № перерізу | вісь | Значення числа обумовленості $\text{cond}(\mathbf{A})$ |                     |
|------------|------|--|---------------------|
|            |      | До масштабування                                       | Після масштабування |
| 1          | OY   | $1,4 \cdot 10^{15}$                                    | 217                 |
|            | OX   | $5,0 \cdot 10^{14}$                                    | 502                 |
| 2          | OY   | $1,7 \cdot 10^{14}$                                    | 25                  |
|            | OX   | $6,4 \cdot 10^{15}$                                    | 103                 |
| 3          | OY   | $2,1 \cdot 10^{14}$                                    | 176                 |
|            | OX   | $3,5 \cdot 10^3$                                       | 3453                |

Отримані матриці є все ще погано обумовленими і тому відповідні СЛАР розв'язувались із застосуванням запропонованих у розділі 2 статистичних методів забезпечення стійкості із залученням додаткових вимірювань, а також із застосуванням методів лінійної фільтрації ОНК.

Оцінимо відносну похибку елементів вектора вільних членів  $Y$ . Елементом вектора  $Y$  є  $\omega_i^2 \cdot y_i$ ,  $i=1,2,3,4$ . З теорії похибок відомо, що відносна похибка добутку  $\delta(\omega^2 \cdot y) = \delta\omega^2 + \delta y$ , а  $\delta(\omega^2) = 2\delta\omega$ . Враховуючи, що похибка вимірювання частоти обертання складає близько 100 об/хв=10,47 рад/с ( $\delta\omega=0,0071$ ), а похибка вимірювання прогину – 1 мкм ( $\delta y=0,026$ ), відносна похибка першого елементу дорівнює 4%. Отже, при розв'язанні вказаної задачі без застосування регуляризаційних прийомів можлива похибка визначення невідомих може бути збільшена у  $cond(A)$  разів і скласти сотні відсотків.

Розглянемо СЛАР, складену для 1-го перерізу (вісь  $Oy$ ). За допомогою сингулярного розкладання матриці  $A = USV^T$  були одержані її сингулярні значення  $S = [\sigma_i]_{n \times 1}$ . Розташовані за зменшенням, їх значення дорівнюють відповідно  $\sigma_1=69,9$ ,  $\sigma_2=4,5$ ,  $\sigma_3=1,3$ ,  $\sigma_4=0,3$ . Оскільки виконується нерівність  $0 < \sigma_{\min} < 1$ , коефіцієнт підсилення абсолютної похибки відповідно до (2.10) дорівнює  $q = 1/\sigma_{\min} = 3,3$  і матриця  $A$  є погано обумовленою щодо абсолютної похибки.

Аналіз спектру матриці Фішера показав, що її власні числа дорівнюють відповідно  $\lambda_1=56195$ ,  $\lambda_2=156$ ,  $\lambda_3=36$ ,  $\lambda_4=0,5$ . При  $q=3,3$  і  $\lambda_{\min}=0,5$  слід очікувати ситуацію, коли зміщення оцінки в результаті введення фільтра ОНК навіть для найменшої компоненти буде більшим за дисперсію ОНК. В цьому разі доцільно провести багатократні вимірювання і використати ОНК і не застосовувати додаткові методи регуляризації. Як і очікувалось, для даної задачі ОНК при 20-кратних вимірюваннях виявилась найкращою оцінкою.

Для 1-го перерізу (вісь  $Ox$ ) система (2.58) після масштабування одиниць вимірювання невідомих має вигляд

$$\begin{bmatrix} 7,0000 & -22,5200 & -96,4400 & -21,8020 \\ 64,5614 & -10,6526 & -59,1140 & -19,9124 \\ 25,0877 & -2,9227 & -18,2011 & -16,7382 \\ 14,6053 & -3,0671 & -17,9255 & -13,6674 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6518 \\ 0,5312 \\ 0,4047 \\ 0,3190 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 502.$$

Наступним етапом розв'язання стало застосування розробленого у підрозділі 2.2 методу масштабування шляхом пошуку вектору  $\mathbf{K} = [k_i]_{1 \times n}$ , при якому досягається  $\min_{\mathbf{K}} \text{cond}(\mathbf{A}')$ , де  $\mathbf{A}'$  – матриця еквівалентної СЛАР, рядки якої сформовані як  $\mathbf{A}'(j,:) = \mathbf{A}(j:)k_j, j = \overline{1, n}$ . Для цього був знайдений масштабувальний вектор  $\mathbf{K} = [1; 0,99; 3,83; 3,46]^T$  і отримана еквівалентна СЛАР у вигляді

$$\begin{bmatrix} 0,7000 & -0,2252 & -0,9644 & -0,2180 \\ 7,8881 & -0,1301 & -0,7222 & -0,2433 \\ 15,3359 & -0,1787 & -1,1126 & -1,0233 \\ 10,3722 & -0,2178 & -1,2730 & -0,9706 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,2847 \\ -10,2182 \\ -42,9739 \\ -42,7075 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 178.$$

У результаті застосування методу оптимізації число обумовленості зменшилось до  $\text{cond}(\mathbf{A}) = 178$ , тобто на 65%.

Розташовані за зменшенням, сингулярні значення дорівнюють відповідно  $\sigma_1=251,9$ ,  $\sigma_2=49,2$ ,  $\sigma_3=6,2$ ,  $\sigma_4=1,4$ . Оскільки виконується нерівність  $\sigma_{\min} > 0$ , коефіцієнт підсилення абсолютної похибки  $q = 1/\sigma_{\min} < 0$  і насправді матриця  $\mathbf{A}$  добре обумовлена щодо абсолютної похибки. В даному випадку велике число обумовленості не є індикатором поганої обумовленості.

Дійсно, спектр матриці Фішера містить власні числа  $\lambda_1=209885$ ,  $\lambda_2=8188$ ,  $\lambda_3=293$ ,  $\lambda_4=0,6$ . Оскільки спектр не містить власних чисел, значно менших від нуля, застосування фільтрації головних компонент за рахунок зменшення впливу



компонент з найбільшою дисперсією є недоцільним. Як засіб згладжування вхідних даних був застосований МНК у вигляді усереднення значень 20-кратних вимірювань.

Аналогічні дослідження і розрахунки були проведені для 2-го перерізу (вісь ОУ). В матричному вигляді задача має вигляд

$$\begin{bmatrix} 3,9000 & 1,0000 & -18,0210 & -2,1802 \\ 5,8000 & 1,0000 & -3,2680 & -2,4674 \\ 8,1000 & 4,3000 & -8,6610 & -2,6687 \\ 14,1000 & 5,5000 & -14,1230 & -2,8074 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,7442 \\ 2,9609 \\ 3,2025 \\ 6,1762 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 25.$$

Для підвищення точності розрахунків і забезпечення заданої точності розв'язку був застосований статистичний метод забезпечення стійкості математичних моделей [90, 272].

З метою визначення кількості необхідних повторних вимірювань для вектора вільних членів  $\mathbf{Y}$ , застосуємо розроблений у п. 2.2 алгоритм забезпечення заданої точності на прикладі СЛАР для 2-го перерізу (вісь ОУ). Спочатку задаємось довірчою імовірністю  $P=0,95$  і допустимою абсолютною похибкою розв'язку  $\|\Delta\mathbf{X}_{don}\|$ . Наприклад, при допустимій похибці 5% кожного елемента вектора  $\mathbf{X}$ ,  $\|\Delta\mathbf{Y}_{don}\|=15,64$  см. Перед початком алгоритму було здійснено  $k=10$  вимірювань вектора  $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1,6969 & 1,7374 & 1,7142 & 1,7358 & 1,7416 & 1,7593 & 1,7579 & 1,7056 & 1,7181 & 1,7634 \\ 2,9637 & 2,9938 & 2,8924 & 2,9709 & 2,9575 & 2,9233 & 2,9476 & 2,9926 & 2,8883 & 2,9267 \\ 3,1988 & 3,2382 & 3,1862 & 3,2132 & 3,2184 & 3,2297 & 3,1975 & 3,2402 & 3,2874 & 3,1824 \\ 6,1582 & 6,1290 & 6,1733 & 6,2289 & 6,1835 & 6,3288 & 6,1767 & 6,1944 & 6,1662 & 6,1417 \end{bmatrix}.$$

Результат використання алгоритму продемонстровано на рис. 3.34. Вже на третьому кроці вдалось знайти необхідну кількість вимірювань величини, необхідну для забезпечення заданої точності.

У результаті роботи алгоритму виявилось, що для отримання бажаної точності розв'язків СЛАР необхідно провести 435 випробувань. Для порівняння, використання наближеного розрахунку з використанням залежності  $\sqrt{k}$  дає результат  $k=616$  вимірювань, тобто на 41,5% більше. Програма реалізації алгоритму представлена в додатку А.6.

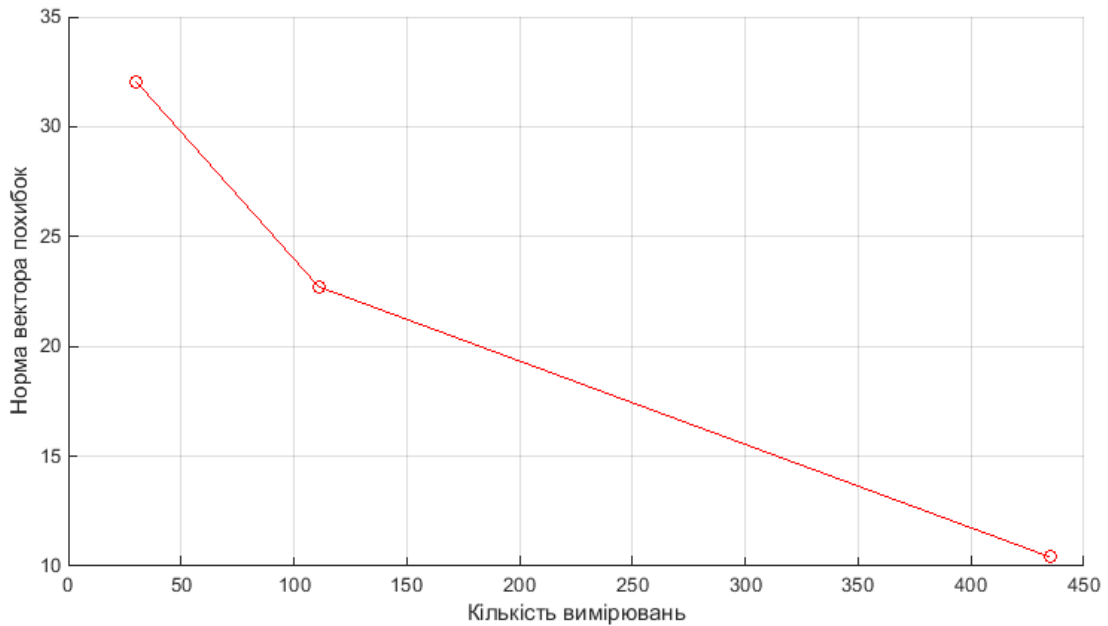


Рис. 3.34. Ілюстрація результатів роботи алгоритму пошуку необхідної кількості вимірювань для досягнення заданої точності ОНК

Наступним етапом стало застосування масштабування шляхом пошуку масштабувального вектору  $\mathbf{K} = [k_i]_{1 \times n}$ , при якому досягається  $\min_{\mathbf{K}} \text{cond}(\mathbf{A}')$ , де  $\mathbf{A}'(j,:) = \mathbf{A}(j,:)k_j, j = \overline{1, n}$ . Для цього був знайдений вектор  $\mathbf{K} = [1; 3,46; 4,48; 3,07]$  і отримана еквівалентна СЛАР у вигляді

$$\begin{bmatrix} 3,9000 & 1,0000 & -18,0210 & -2,1802 \\ 20,0654 & 3,4596 & -11,3058 & -8,5361 \\ 36,2720 & 19,2555 & -38,7841 & -11,9507 \\ 43,2792 & 16,8819 & -43,3497 & -8,6170 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,7442 \\ 10,2433 \\ 14,3408 \\ 18,9574 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 19,6.$$

У результаті число обумовленості зменшилось до  $cond(\mathbf{A}) = 19,6$ , тобто на 22%. Сингулярні числа матриці дорівнюють відповідно  $\sigma_1=90,6$ ,  $\sigma_2=12,2$ ,  $\sigma_3=5,9$ ,  $\sigma_4=4,6$ . Оскільки сингулярні числа, менші від нуля, відсутні, то коефіцієнт підсилення абсолютної похибки  $q = 1/\sigma_{\min} < 0$  і насправді матриця  $\mathbf{A}$  добре обумовлена. Це підтверджують власні числа із спектру матриці Фішера  $\lambda_1=9099$ ,  $\lambda_2=1098$ ,  $\lambda_3=28$ ,  $\lambda_4=9$ , які значно більші від нуля. Очевидно, що розв'язки розглянутої задачі є стійкими і задача не потребує жодних заходів щодо регуляризації. Застосування МНК у вигляді осереднення вимірних значень елементів вектора вільних членів може бути рекомендовано для згладжування вхідних даних, що і було здійснено.

Для 2-го перерізу (вісь ОХ) дискретна ОЗ (2.45) має вигляд

$$\begin{bmatrix} 9,7000 & 4,4450 & 26,7640 & -2,1802 \\ 5,4000 & 3,5560 & 10,8780 & -2,4674 \\ 4,3000 & 2,8450 & 4,8680 & -2,6687 \\ 1,0000 & 1,6230 & 4,0510 & -2,8074 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,1802 \\ -3,7011 \\ -3,2025 \\ -0,5615 \end{bmatrix}, \quad cond(\mathbf{A}) = 118.$$

Після масштабування за критерієм мінімуму числа обумовленості з використанням розрахованого масштабувального вектору  $\mathbf{K} = [1; 2,89; 3,13; 1,96]$  і отримана еквівалентна СЛАР у вигляді

$$\begin{bmatrix} 9,7000 & 4,4450 & 26,7640 & -2,1800 \\ 15,6347 & 10,2958 & 31,4953 & -6,3117 \\ 13,4760 & 8,9161 & 15,2561 & -6,8319 \\ 1,9578 & 3,1775 & 7,9311 & -4,2680 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,1802 \\ -10,7159 \\ -10,0364 \\ -1,0993 \end{bmatrix}, \quad cond(\mathbf{A}) = 76.$$

При цьому число обумовленості зменшилось з 118 до 76, тобто на 55%. Значення сингулярних чисел дорівнюють відповідно  $\sigma_1=51,7$ ,  $\sigma_2=9,3$ ,  $\sigma_3=3,1$ ,  $\sigma_4=0,7$ . Оскільки виконується нерівність  $0 < \sigma_{\min} < 1$ , матриця  $\hat{\mathbf{A}}$  є погано обумовленою з коефіцієнтом підсилення похибки  $q = 1/\sigma_{\min} = 1,43$ .

Власні числа матриці Фішера дорівнюють відповідно  $\lambda_1=7904$ ,  $\lambda_2=465$ ,  $\lambda_3=32$ ,  $\lambda_4=0,6$ . Для розв'язання розглянутої задачі доцільним є використання МНК при 20-кратних вимірюваннях вектора прогинів  $\mathbf{Y}$  для згладжування даних.

Для 3-го перерізу (вісь ОУ) система рівнянь (2.45) є наступною

$$\begin{bmatrix} -8,0000 & -7,7000 & 9,0710 & -2,1802 \\ -8,0000 & -11,5600 & 8,3130 & -2,4674 \\ -8,0000 & -9,6400 & 8,6940 & -2,6687 \\ -8,0000 & -9,6400 & 8,0310 & -2,8074 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,1802 \\ -3,7011 \\ -3,2025 \\ -0,5615 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 176.$$

Після масштабування за допомогою знайденого вектору  $\mathbf{K} = [1; 0,81; 1,63; 1,06]$  число обумовленості  $\text{cond}(\mathbf{A})$  зменшилось з 176 до 152, тобто на 14%. Отримана еквівалентна СЛАР має вигляд

$$\begin{bmatrix} -8,0000 & -7,7000 & 9,0710 & -2,1806 \\ -6,4718 & -9,3518 & 6,7250 & -1,9956 \\ -13,0739 & -15,7540 & 14,2080 & -4,3625 \\ -8,4580 & -10,1919 & 8,4908 & -2,9688 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,1802 \\ -2,9941 \\ -5,2336 \\ -0,5936 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 152.$$

Сингулярні числа матриці дорівнюють  $\sigma_1=35,8$ ,  $\sigma_2=2,2$ ,  $\sigma_3=0,5$ ,  $\sigma_4=0,2$ . Коефіцієнт підсилення абсолютної похибки розв'язку  $q=1/\sigma_{\min}=5$ . Власні числа матриці Фішера дорівнюють  $\lambda_1=5584$ ,  $\lambda_2=56$ ,  $\lambda_3=2,3$ ,  $\lambda_4=0,3$ . Значення найменшого власного числа  $\lambda_{\min}=0,3$  означає, що найстарша компонента ОНК вносить дисперсію, що порівнювана з дисперсією інших компонент, отже зменшення впливу цієї компоненти може викликати значне зміщення оцінки, що призведе до більшої похибки, ніж похибка ОНК. Отже, не зважаючи на присутність  $\lambda_{\min}<0$ , з огляду на невелике підсилення абсолютної похибки, для розв'язання розглянутої задачі доцільним є використання МНК.

Для 3-го перерізу (вісь ОХ) маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 1,0000 & 1,2000 & 3,4950 & 2,1802 \\ 4,4000 & 2,4000 & 1,7320 & 2,4674 \\ 3,2000 & 2,4000 & 3,4580 & 2,6687 \\ 1,0000 & 2,1000 & 5,7980 & 2,8074 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0901 \\ 1,4804 \\ 2,1350 \\ 0,5615 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 3453.$$

Застосування масштабування з використанням оптимального вектору,  $\mathbf{K} = [1; 2,11; 2,51; 1,69]$  виявилось малоефективним, оскільки число обумовленості  $\text{cond}(\mathbf{A})$  зменшилось з 3453 до 3125, тобто на 10%. Отримана еквівалентна СЛАР має вигляд

$$\begin{bmatrix} 1,0000 & 1,2000 & 3,4950 & -2,1802 \\ 9,2757 & 5,0595 & 3,6512 & -5,2015 \\ 8,0297 & 6,0223 & 8,6771 & -6,6967 \\ 1,6897 & 3,5485 & 9,7972 & -4,7437 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ e_x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0901 \\ 3,1209 \\ 5,3573 \\ 0,9487 \end{bmatrix}, \text{cond}(\mathbf{A}) = 3125.$$

Сингулярні числа дорівнюють  $\sigma_1=21,8$ ,  $\sigma_2=7,2$ ,  $\sigma_3=0,4$ ,  $\sigma_4=0,007$ . Коефіцієнт підсилення абсолютної похибки  $q=1/\sigma_{\min}=143$ . В спектрі матриці Фішера з власними числами  $\lambda_1=832$ ,  $\lambda_2=175$ ,  $\lambda_3=1,7$ ,  $\lambda_4=5,8 \cdot 10^{-5}$ , маємо  $\lambda_4 \ll 0$ . Отже, найстарша компонента вносить найбільшу дисперсію і можна рекомендувати застосування лінійної фільтрації ОНК. Сумарне відхилення ОНК склало  $\text{tr}(\Omega)/\|\hat{\mathbf{x}}\| = 0,017$ , тобто похибка ОНК є прийнятною. Порівняння різних методів регуляризації показало, що найефективнішими виявились оцінки за МНК при 20-ти кратних вимірюваннях. Непогані результати за точністю показала усічена оцінка і оптимальний фільтр (результати одного порядку), але похибка зміщення його стійких оцінок виявилась у 2-3 рази більша за похибку ОНК.

З метою зменшення кількості систем рівнянь, що підлягають розв'язанню, був запропонований інший метод ідентифікації невідомих  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, e_x, e_y$  в кожному із трьох перерізів. Аналізуючи сумісно СЛАР, які складені для осей ОХ і ОУ відповідно в перерізі 1, видно, що із 8 рівнянь шукають лише 5 невідомих, оскільки для обох СЛАР спільними невідомими є

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ . Цей факт дає змогу спростити розрахунки ексцентриситетів, дисбалансів і кути їх розташування за рахунок розв'язання однієї СЛАР, складеної із двох СЛАР стандартними лінійними перетвореннями. Наприклад, додавши відповідні матриці лівої і правої частини двох СЛАР для перерізу 1 і утворивши 5-те рівняння додаванням рівнянь, отримаємо наступну матричну систему р  $cond(\mathbf{A}) = 3,1 \cdot 10^{14}$

$$\begin{bmatrix} -5,3 \cdot 10^{-8} & -9,18 \cdot 10^{-6} & 36,42 \cdot 10^{-6} & -2,1802 \cdot 10^6 & -2,1802 \cdot 10^6 \\ -1,0 \cdot 10^{-8} & 6,82 \cdot 10^{-6} & 87,88 \cdot 10^{-6} & -2,4674 \cdot 10^6 & -2,4674 \cdot 10^6 \\ -2,0 \cdot 10^{-8} & 10,35 \cdot 10^{-6} & 109,39 \cdot 10^{-6} & -2,6687 \cdot 10^6 & -2,6687 \cdot 10^6 \\ -5,9 \cdot 10^{-8} & 13,72 \cdot 10^{-6} & 124,27 \cdot 10^{-6} & -2,8073 \cdot 10^6 & -2,8073 \cdot 10^6 \\ -8,3 \cdot 10^{-8} & -2,50 \cdot 10^{-6} & 64,65 \cdot 10^{-6} & -2,1802 \cdot 10^6 & -2,8074 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7631 \\ -9129 \\ -9874 \\ -11229 \\ -11698 \end{bmatrix},$$

Після масштабування маємо наступну СЛАР

$$\begin{bmatrix} -5,3000 & -9,1799 & 0,3642 & -2,1802 & -2,1802 \\ -1,0000 & 6,8199 & 0,8788 & -2,4674 & -2,4674 \\ -2,0000 & 10,3499 & 1,0939 & -2,6687 & -2,6687 \\ -5,9999 & 13,7199 & 1,2427 & -2,8073 & -2,8073 \\ -8,3000 & -2,5000 & 0,6465 & -2,1802 & -2,8074 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ e'_x \\ e'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7631 \\ -0,9129 \\ -0,9874 \\ -1,1229 \\ -1,1698 \end{bmatrix}, cond(\mathbf{A}) = 724.$$

Оптимізація СЛАР за критерієм мінімуму числа обумовленості з використанням вектору  $\mathbf{K} = [1; 2,94; 2,64; 1,19; 1,19]$  дозволила зменшити число обумовленості до  $cond(\mathbf{A}) = 564$ , тобто на 28%, і перетворити СЛАР до наступного вигляду

$$\begin{bmatrix} -5,3000 & -9,1799 & 0,3642 & -2,1802 & -2,1802 \\ -2,9435 & 20,0748 & 2,5868 & -7,2628 & -7,2628 \\ -5,2832 & 27,3407 & 2,8896 & -7,0498 & -7,0498 \\ -7,1679 & 16,3906 & 1,4846 & -3,3538 & -3,3538 \\ -9,9081 & -2,9844 & 0,7718 & -2,6025 & -3,3512 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ e'_x \\ e'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7631 \\ -2,6873 \\ -2,6084 \\ -1,3415 \\ -1,3964 \end{bmatrix}, cond(\mathbf{A}) = 564.$$

Аналогічно утворюють дві СЛАР з 5 рівнянь для перерізів 2 і 3 відповідно. При такому підході розв'язанню підлягають не 6 систем рівнянь, а лише 3.

Результати розв'язання задачі ідентифікації коефіцієнтів  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $e_x$ ,  $e_y$  наведені в таблиці 3.15.

Таблиця 3.15

## Результати розв'язання ОЗ ідентифікації

| № перерізу | $e_x$ , м            | $e_y$ , м             | $\alpha_0$ , м <sup>4</sup> /с <sup>2</sup> | $\alpha_1$ , м <sup>3</sup> /с <sup>2</sup> |
|------------|----------------------|-----------------------|---|---|
| 1          | $-5 \cdot 10^{-6}$   | $-5,84 \cdot 10^{-6}$ | 185,65                                      | -270,37                                     |
| 2          | $-9 \cdot 10^{-6}$   | $1,7 \cdot 10^{-6}$   | 710,65                                      | -247,18                                     |
| 3          | $-6,2 \cdot 10^{-6}$ | $30 \cdot 10^{-6}$    | 280,83                                      | -680,00                                     |

Ідентифіковані значення  $\alpha_0$  і  $\alpha_1$  дали змогу більш точно, ніж при статичних випробуваннях, визначити значення жорсткостей [66]. Для цього у кожному з 3-х перерізів знайшли значення приведених мас  $m_i$  і жорсткостей  $EJ_i$ ,  $i=1,2,3$  вала ротора у відповідності з формулами:

$$m(z) = M \cdot \exp\left(\int_0^z \frac{\alpha_1}{\alpha_0} dz\right), \quad EJ(z) = m(z) \cdot \alpha_0(z),$$

де  $M$  – маса ротора.

Відповідно до формул

$$D_i = M_i \sqrt{e_{xi}^2 + e_{yi}^2}, \quad \varphi_i = \arctg(e_{yi}^2 / e_{xi}^2) \quad i=1,2,3$$

визначали величини дисбалансів ротора і кути, що складаються ними з віссю ОХ обраної системи координат. Результати розрахунків представлені в таблиці 3.16. І, нарешті, використовуючи ідентифіковані дані про ексцентриситети, компенсували їх.

За ідентифікованими жорсткостями і масами був зроблений розрахунок критичних частот ротора, приведених до прийнятої динамічної моделі. Для цього за відомими значеннями  $EI$  для ділянок ротора за допомогою інтеграла

Мора розрахували значення коефіцієнтів впливу, а потім з виразу (3.18) знайшли  $\omega_1=1732$  1/с и  $\omega_2=2625$  1/с, що відповідає  $n_1=16500$  об/хв,  $n_2=25080$  об/хв. Різниця між першою критичною частотою обертання, розрахованою за ідентифікованими масами і жорсткостями, і критичною частотою ротора, виміряною при роботі ТНА, становить 400 об/хв тобто 2,49% від 16100 об/хв.

Таблиця 3.16

Результати розв'язання задачі ідентифікації ексцентриситетів ротора ТНА

| Ідентифіковані величини                         | Переріз 1 | Переріз 2 | Переріз 3 |
|---|-----------|-----------|-----------|
| Жорсткість $EJ_i, \text{Н}\cdot\text{м}^2$      | 414,7     | 1594      | 23998     |
| Приведена маса $m_i \cdot 10^{-3}, \text{кг/м}$ | 2,2       | 2,0       | 8,3       |
| Дисбаланс $D_i, \text{г}\cdot\text{мм}$         | 2,37      | 2,48      | 3,06      |
| Кут з віссю Ох $\varphi_i, \text{град.}$        | 95°       | 170°      | 102°3'    |

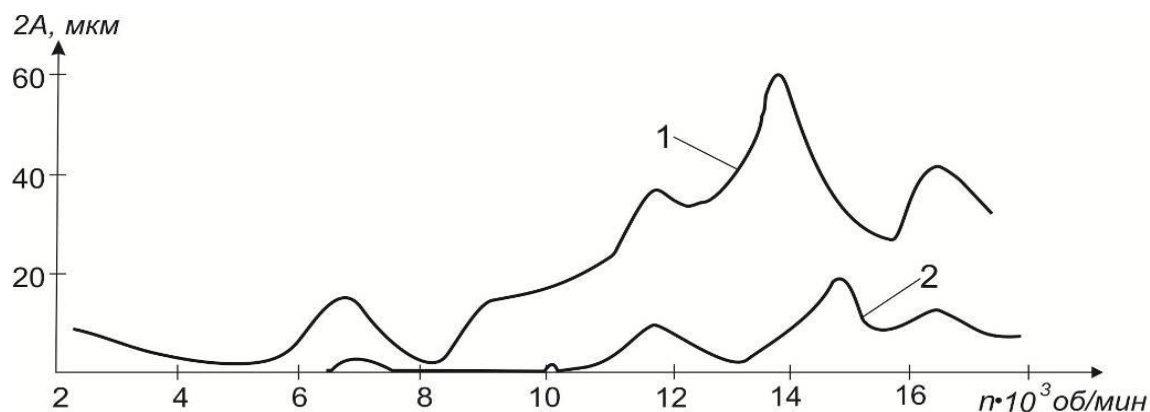
Для порівняння, різниця між дійсною критичною швидкістю ротора і отриманою в результаті розв'язання визначника вікового рівняння, складеного на основі статичних коефіцієнтів впливу, становить 3400 об/хв., тобто 21% від 16100 об/хв. Підвищення точності розрахунків у 8,4 рази стало можливим завдяки розв'язанню ОЗ із застосуванням методів забезпечення стійкості розв'язків.

3.3.5. Результати дослідження динаміки турбонасосного агрегату після балансування на робочих частотах. Після здійснення балансування ротора установкою коригувальних мас у спеціальні місця на дисках проводився контрольний запуск на прохід від 0 до 18000 об/хв з осцилографуванням показів тензорезисторів і вібродатчиків. Одержані залежності прогинів від частоти обертання в кожному з перерізів 1, 2, 3 до і після балансування ротора представлені на рис. 3.35.

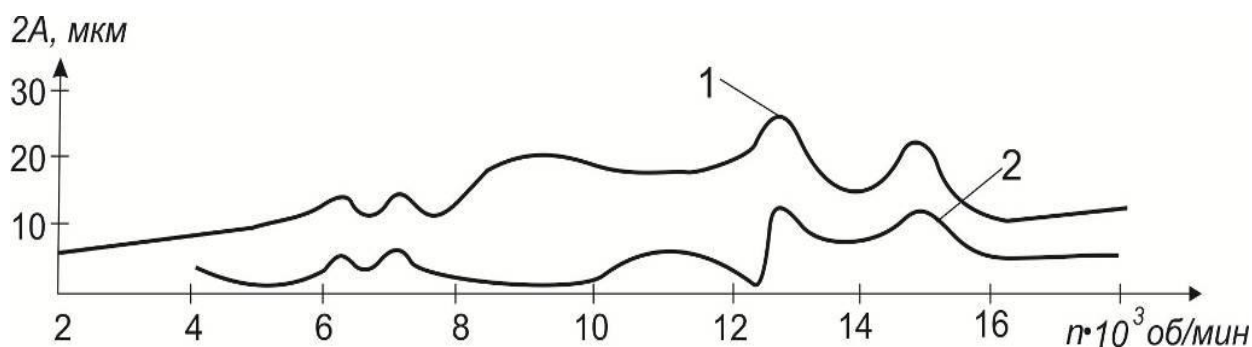
Аналіз кривих показує, що у всіх перерізах до 8000 об/хв. статичні прогини вала ротора майже не проявляються. Починаючи з частоти обертання близько 8100 об/хв. помітне зростання цих прогинів. Вони досягають свого максимального значення на частоті обертання близько 16100 об/хв, потім – зменшуються.



Вібраційні характеристики досліджуваного ТНА до і після балансування, побудовані за показами перетворювачів на опорах приводу (а) і турбіни (б) представлені на рис. 3.36. Тут  $A$  – амплітуда коливань, а  $2A$  – розмах. Як показують графіки, характер коливань опор різний: при 6800 об/хв. проявляється резонанс на опорі турбіни, а при 11700 об/хв – на опорі біля приводу.



а)



б)

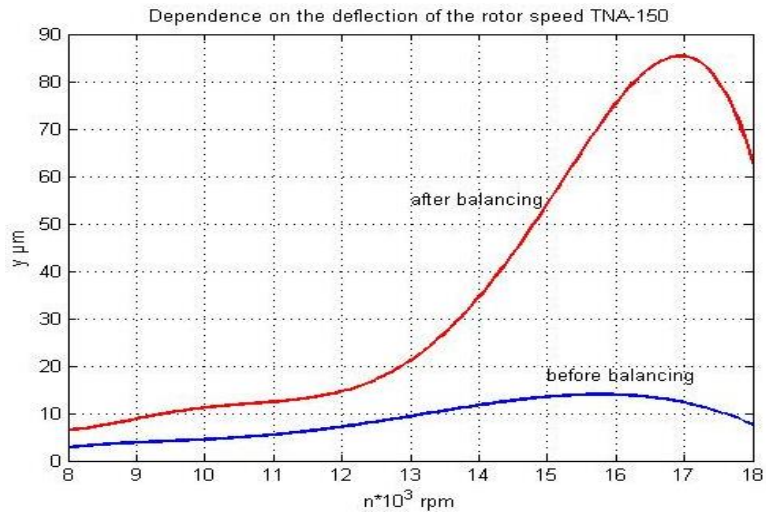
Рис. 3.35. Вібраційні характеристики ТНА-150:

1 – до балансування;

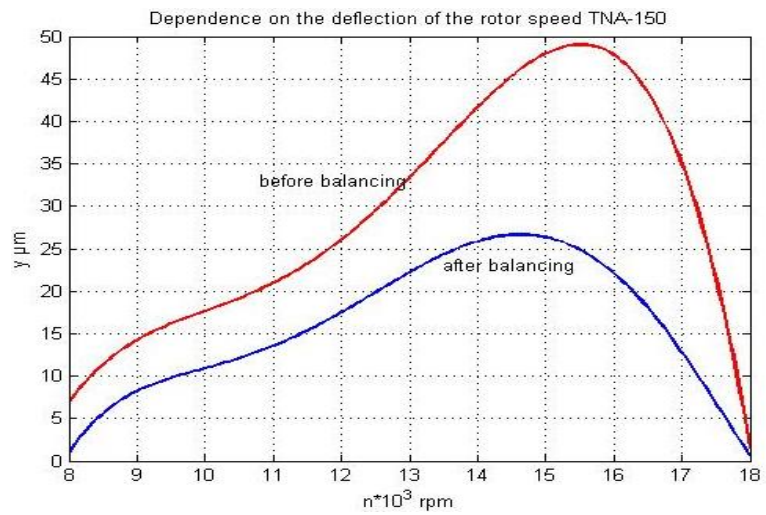
2 – після балансування

Цей висновок впливає з того, що на цих частотах спостерігається ріст амплітуди коливань однієї з опор, в той час, як на іншій опорі не спостерігаються її значні зміни.

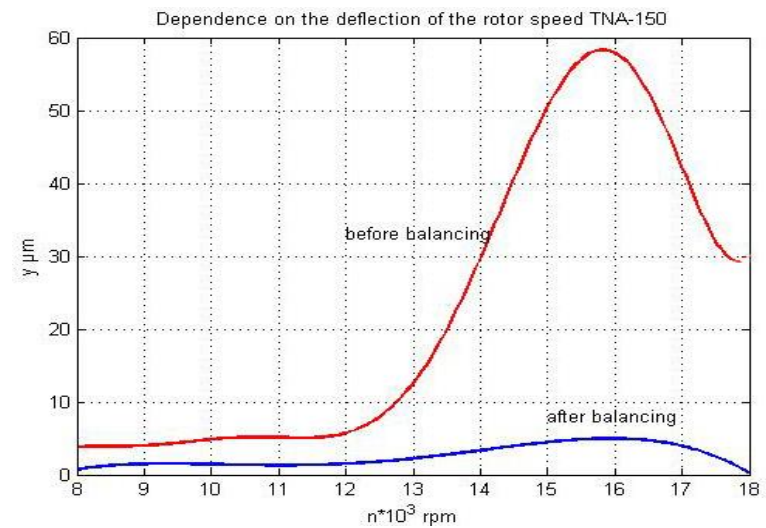
Рух ротора агрегату в системі своїх опор і приєднаних мас у діапазоні 2000-18000 об/хв має наступні особливості:



Переріз 1



Переріз 2



Переріз 3

Рис. 3.36. Залежність прогинів вала ротора ТНА-150 від частоти обертання до і після балансування

1. Перше підвищення коливань опор спостерігається поблизу 6300 об/хв. При цьому їх коливання майже синфазне до резонансу. У переміщенні ротора основну частину займає його переміщення разом з опорами і при цьому прогин вала ротора практично відсутній.

2. При збільшенні швидкості до 13700 об/хв знову спостерігаються інтенсивні коливання обох опор, причому в цьому випадку вони коливаються в протифазі, а прогин вала ротора ще не досяг свого максимального значення.

3. Останній резонанс має місце при 16100 об/хв. Тут спостерігаються максимальні прогини вала ротора, хоча вібрації опор знизилися. Рух опор синфазний. На зазначеній частоті і знаходиться, власне, критична частота обертання ротора.

Увімкнення двох тензодатчиків, які лежать протилежно, у вимірювальній напівміст, дало можливість виключити розтягувальні, стискувальні і температурні напруження та похибки і вимірювати лише подвійну амплітуду напружень вигину. Результати аналіз отриманих тензо- і віброграм показали, що у місцях резонансів мають місце і максимуми напружень. При частоті обертання більше 4000-5000 об/хв тензодатчики фіксують напруження на валу не тільки з частотою першої роторної гармоніки, але і з частотою другої, що може бути викликано, наприклад, маятниковими коливаннями цапфи вала в підшипнику, зворотною прецесією, приводом тощо.

Обчислення показали, що максимальні статичні і динамічні напруження отримані при запуску і роботі ТНА-150 до проведеного балансування склали  $\sigma_{ст} = 64$  МПа на 16100 об/хв, після балансування –  $\sigma_{ст} = 17,6$  МПа на 15300 об/хв. Динамічні напруження до балансування по першій роторній гармоніці склали  $\sigma_{дин} = \pm 26,8$  МПа на 10800 об/хв., по другій –  $\sigma_{дин} = \pm 34,8$  МПа на 15100 об/хв.

Після балансування максимальні напруження склали по першій роторній гармоніці  $\sigma_{дин} = \pm 14,8$  МПа на 16200 об/хв. по другій –  $\sigma_{дин} = \pm 10,8$  МПа на 14700 об/хв.

В результаті зрівноваження максимальні прогини вала ротора в діапазоні 2000-18000 об/хв. знижені приблизно в 6 разів, амплітуди вібрацій опор – у 4 рази, статичні напруження в матеріалі вала – у 3,5 рази, а динамічні – у 3 рази (рис. 3.36).

### 3.4. Висновки до розділу

1. Проведені дослідження динаміки і балансування ротора багатоступінчатого компресора газотурбінного авіаційного двигуна дозволили встановити, що найбільш прийнятні і стійкі розв'язки ОЗ ідентифікації ексцентриситетів і пружно-інерційних характеристик роторів турбомашин одержуються при застосуванні відносно нескладних розрахункових моделей роторів. В цьому разі «огрублення» моделі покращує стійкість розв'язків, а одержані в результаті експериментів «точні» (з мінімальними похибками) еквівалентні даній розрахунковій схемі, значення параметрів: жорсткостей, мас, прогинів тощо суттєво підвищують точність моделі. Показано, що десятимасовий ротор може бути представлений навіть одномасовою моделлю і давати в розв'язанні задачі ідентифікації достатньо точні результати, якщо в неї будуть підставлені точні дані параметрів моделі, еквівалентні даній розрахунковій схемі.

2. З достатньою точністю ідентифіковано ексцентриситети ротора для п'яти- і десятимасової моделі ротора компресора. Продемонстровано ефективність застосування статистичних методів підвищення стійкості розв'язків дискретних лінійних ОЗ в задачах ідентифікації ексцентриситетів і пружно-інерційних характеристик ротора компресора авіадвигуна АИ-20, а саме методів лінійної фільтрації оцінок за МНК з використанням методу головних компонент. Найкращу стійкість забезпечив метод усічених оцінок за МНК, який рекомендовано для застосування у розв'язанні подібних задач. Розраховані значення ексцентриситетів дисків ротора дали змогу провести його динамічне балансування, завдяки чому вдалось знизити максимальні прогини ротора компресора АИ-20 у 2,5 рази.

3. З застосуванням методу пробних параметрів ідентифіковано АЧХ ГТД, значення жорсткостей опор ротора компресора і пояснено причини всіх резонансів, визначено форми коливань ротора.

4. Розвинуто теорію експериментального дослідження міцності машин і апаратури апроксимацією емпіричної полімодальної щільності розподілу ймовірностей сумішшю унімодальних законів, науково обґрунтованому вибору кроку побудови гістограм розподілів і розробки методу призначення допустимих значень вимірних параметрів з певною надійністю, що дає можливість одержати більш точні значення вимірних параметрів з гарантованою надійністю.

5. Встановлено, що для виконання умов допустимих вібрацій, ексцентриситети основних мас ротора турбонасосного агрегату повинні не перевищувати 0,0008 мм, а допустимий дисбаланс не повинен перевищувати 0,4 г·мм, що не може бути реалізованим на практиці, тобто в існуючій технології задача балансування ротора ТНА як жорсткого в двох площинах корекції не має розв'язку.

6. Поставлена і розв'язана ОЗ ідентифікації ексцентриситетів, жорсткостей, мас, приведених до математичної моделі опису ротора ТНА з огляду на припущення, що ротор деформується в роботі, тобто вимагає балансування на робочих частотах і в трьох площинах корекції. Для збільшення точності ідентифікації за рахунок забезпечення стійкості розв'язків були застосовані методи масштабування і оптимізації коефіцієнтів, статистичні методи підвищення стійкості розв'язків лінійних дискретних обернених задач: МНК, усічена оцінка за МНК, оптимальна і квазіоптимальна фільтрована оцінка за МНК.

7. Ідентифіковано амплітудно-частотну характеристику ТНА і досліджено його динаміку. Ідентифіковані значення і фазові кути розташування ексцентриситетів дали змогу провести балансування на робочій частоті обертання у трьох площинах корекції, в результаті якої вібрації знизилися приблизно у 6 разів, амплітуди вібрацій опор – у 4 рази, статичні напруження в матеріалі вала – у 3,5 рази, а динамічні – у 3 рази.

## РОЗДІЛ 4.

### ОЦІНЮВАННЯ І ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МІЦНОСТІ ГЕРМЕТИЗОВАНИХ КОНСТРУКЦІЙ ЕЛЕКТРОННИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ МІЦНОСТІ

У розділі розширено область застосування ОЗ для визначення ФМХ недостатньо вивчених матеріалів, які працюють у широкому діапазоні зміни температур та різних видах навантажень. Побудовано математичну модель їх взаємодії з елементами модулів, складовими частинами яких вони є, обґрунтовано визначальні чинники, які спричиняють їх руйнування. Показано, що задачі забезпечення міцності механічних конструкцій можна розглядати як ОЗ синтезу, наголошено на основні проблеми і шляхи розв'язання вказаних задач.

#### 4.1. Математична модель конструкції виробу «керамічний резистор-компаунд»

Дефектація зруйнованих конструкцій «керамічний резистор-компаунд» (на прикладі герметизованих виробів, описаних у п. 1.5.3) і аналіз умов випробувань та їх експлуатації, при яких відбуваються поломки, дозволили зробити припущення, що причини дефектів є або наслідком існуючої технології складання, або вони закладені в самій конструкції, тобто визначаються невдалим сполученням міцнісних властивостей з'єднувальних елементів, яке проявляється у певних умовах експлуатації.

З цих причин в першу чергу було досліджено вплив низки технологічних операцій, таких як формовка, обрізка, лудіння, припайка виводів, на зміну міцності конструкції [41]. Проведені експериментальні дослідження і статистична обробка їх результатів дали можливість зробити висновок про те, що хоча деякі із операцій і знижують міцність елементів, це зниження:

- по-перше, з імовірністю 0,99 можна вважати несуттєвим;

- по-друге, воно несуттєве у порівнянні з існуючим розкидом міцнісних характеристик резисторів, що постачаються.

Наступне припущення полягало в тому, що поломки керамічного виробу, як правило, виникають від навантажень зі сторони компаунда. В процесі герметизації і випробувань при коливаннях температури відбувається природній стиск або розтяг відповідних матеріалів. Внаслідок існування сил адгезії на поверхні контакту і різниці у ФМХ з'єднувальних матеріалів на границі їх розділу виникає контактний тиск, що викликає появу додаткових напружень. Перевищення цими напруженнями допустимих для заданих матеріалів значень і може привести до механічних пошкоджень елементів конструкції.

Щоб позбутися вказаних ефектів необхідно було забезпечити в конструкції «керамічний резистор-компаунд» виконання умов міцності в матеріалах. Для цього потрібно визначити такі первинні чинники, які впливають на величини напружень в матеріалах, і знайти множину їх значень (область працездатності в просторі первинних факторів), що забезпечують виконання умов міцності.

Розв'язання задачі забезпечення міцності конструкції «кераміка-компаунд» передбачає виконання умов міцності для кожної із  $n$  складових частин названої конструкції

$$\sigma_{\max i} \leq [\sigma_i], \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.1)$$

де  $\sigma_{\max}$  – максимальні експлуатаційні напруження в матеріалі конструкції;

$[\sigma]$  – допустиме напруження в цьому матеріалі.

Тут перш за все необхідно визначити первинні чинники, що суттєво впливають на один із показників якості – міцність, і встановити функціональні залежності між ними і характеристиками міцності – напруженнями в матеріалах сполучених елементів.

Герметизація конструкцій відбувається заливкою полімерним матеріалом (компаундом). До заливки керамічний виріб і компаунд розігрівають до температури полімеризації. При цьому вони розширюються незалежно один від

одного. Після заливки компаундом вироби поміщають у термостат і витримують до кінця процесу полімеризації. Під час цього процесу через хімічну усадку компаунда вже виникають контактні тиски і напруження (залишкові напруження). Однак, як показано в роботах [46, 47], в області високоеластичного стану внутрішні напруження мають незначну величину і майже не залежать від температури, оскільки в цій області модуль пружності компаунда є малим, а релаксаційні процеси проходять із значною швидкістю. В області температури з'єднування існує перехідна зона із тенденцією до збільшення напружень при зниженні температури. Це явище пояснюється підвищенням модуля пружності компаунда. При цьому в області склоподібного стану спостерігається близька до лінійної залежність величини внутрішніх напружень від температури. В цій області температур доцільно в подальшому досліджувати вплив вказаного фактора на міцність елементів конструкції.

По завершенні процесу полімеризації готові вироби охолоджуються разом із термостатом до температури навколишнього середовища (нормальної температури). Зворотній процес є неможливим через дію сил зчеплення між керамікою і компаундом. Внаслідок різниці їх ФМХ матеріалів на границі матеріалів виникає контактний тиск, що зумовлює появу напружень в матеріалах конструкцій.

Розрахунок напружень у елементах, які мають форму тіл обертання, може бути приведений до розрахунку напружень у осесиметричній задачі для сполучних циліндрів. Встановлено, що якщо товщина стінки деталі менше однієї десятої середнього радіусу, то такий циліндр можна розглядати як оболонку, навантажену зовнішнім тиском.

Розглянемо циліндричний елемент, оточений нерівномірним шаром компаунда. Уявно виділимо навколо резистора, що розглядається, компаундний циліндр із зовнішнім радіусом, що дорівнює мінімальній відстані від осі резистора до корпусу виробу (рис. 4.1). Тоді очевидно, що розрахункова схема може бути приведена до осесиметричної задачі взаємодії двох циліндричних тіл (рис. 4.2).



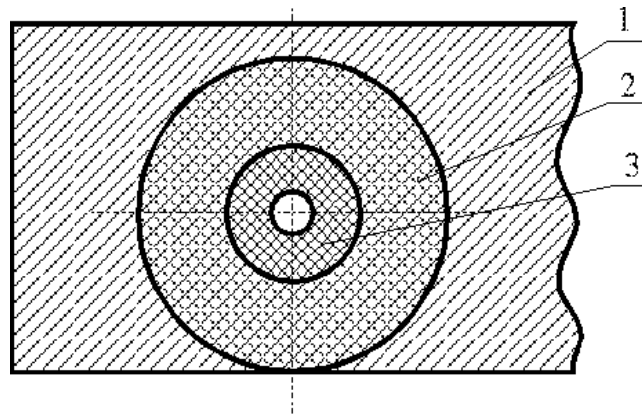


Рис. 4.1. Поперечний переріз керамічного виробу, заполімеризованого компаундом:

- 1 – компаунд;
- 2 – виокремлений компаундний циліндр;
- 3 – керамічний виріб.

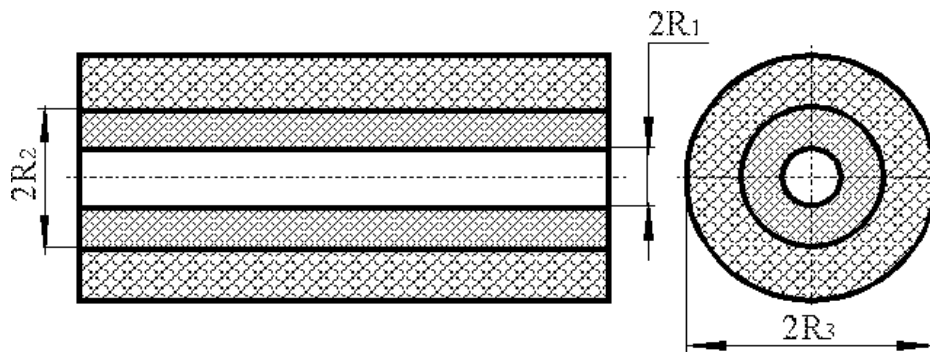


Рис. 4.2. Керамічний виріб, оточений рівномірним шаром компаунда

При розв'язанні цієї задачі можна очікувати появу стискувальних і розтягувальних навантажень від виниклих контактних тисків (рис. 4.3). Формули для розрахунку контактних тисків і напружень у матеріалах резистора і компаунда при усталеній температурі отримані в роботі [205] і мають вигляд, приведений у таблиці 4.1. Аналіз цих формул показує, що при необмеженому збільшенні зовнішнього шару компаундного циліндра отримуємо

$$\lim_{R_3 \rightarrow \infty} P_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)t}{\frac{[(1 + \mu_1)R_1^2 + (1 - 2\mu_1)R_2^2]}{E_1(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{1 + \mu_2}{E_2}} = K = const.$$

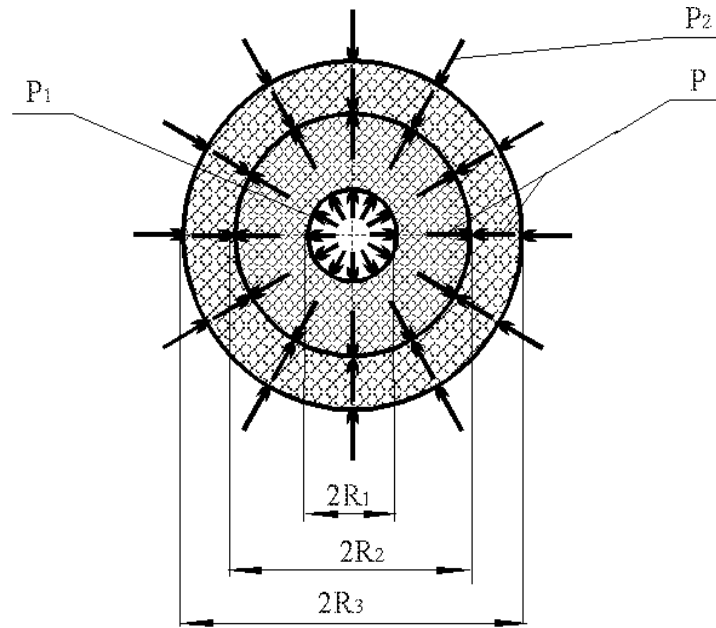


Рис. 4.3. Схема навантаження керамічного виробу і герметика

Таблиця 4.1.

Контактний тиск і напруження в елементах конструкцій кераміка-компаннд

| Формули   | Номери формул |
|---|---------------|
| $P_1 = \frac{\left[ (1 + \mu_1) \alpha_1 - (1 + \mu_2) \alpha_2 \right] \Delta t}{\frac{\left[ (1 + \mu_1) R_1^2 + (1 - \mu_1) R_2^2 \right]}{E_1 (R_2^2 - R_1^2)} + \frac{\left[ (1 + \mu_2) R_3^2 + (1 - \mu_2) R_2^2 \right]}{E_2 (R_3^2 - R_2^2)}}$ | 4.2           |
| $\sigma_{r_1} = \frac{P_1 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{R_1^2}{r^2} - 1 \right)$   | 4.3           |
| $\sigma_{t_1} = \frac{P_1 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{R_1^2}{r^2} + 1 \right)$   | 4.4           |
| $\sigma_{r_1} = -\frac{P_1 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$   | 4.5           |
| $\sigma_{r_2} = -\frac{P_1 R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \left( \frac{R_3^2}{R_2^2} - 1 \right)$  | 4.6           |
| $\sigma_{t_2} = -\frac{P_1 R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \left( \frac{R_3^2}{R_2^2} + 1 \right)$  | 4.7           |
| $\sigma_{r_2} = -\frac{P_1 R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$   | 4.8           |

Звідси видно, що при значенні поточного радіуса  $R$ , що у чотири рази перевищує  $R_2$ , напруження в компаунді складають лише  $1/16$  від максимального значення. Отже, в таких випадках точність розрахунків становить  $5...6\%$ , а тому можна вважати, що компаундний циліндр має нескінченну товщину. Тоді можна не враховувати форму контуру і розраховувати на міцність резистори, заполімеризовані в компаунді довільної форми, лише б товщина компаунда була б в 3 і більше разів більшою зовнішнього радіусу резистора. На рис. 4.4 представлено залежність напружень в компаунді від величини його зовнішнього радіуса  $R_3$  при  $R_2 = \text{const}$ .

Із рис. 4.4 також випливає, що при вказаних співвідношеннях товщини компаунда і радіуса виробу можна обмежитись розглядом осесиметричної задачі, оскільки підвищення тиску від компаунда, розташованого за зоною виділеного циліндра, буде несуттєвим у порівнянні з максимальним, знайденим при розв'язанні симетричної задачі, і в інженерних розрахунках може не враховуватись. Таким чином, очевидно, що розташування виробу подалі від стінок та інших деталей так, що мінімальна товщина компаунда перевищувала б  $3R_2$ , забезпечує майже рівномірний її стиск.

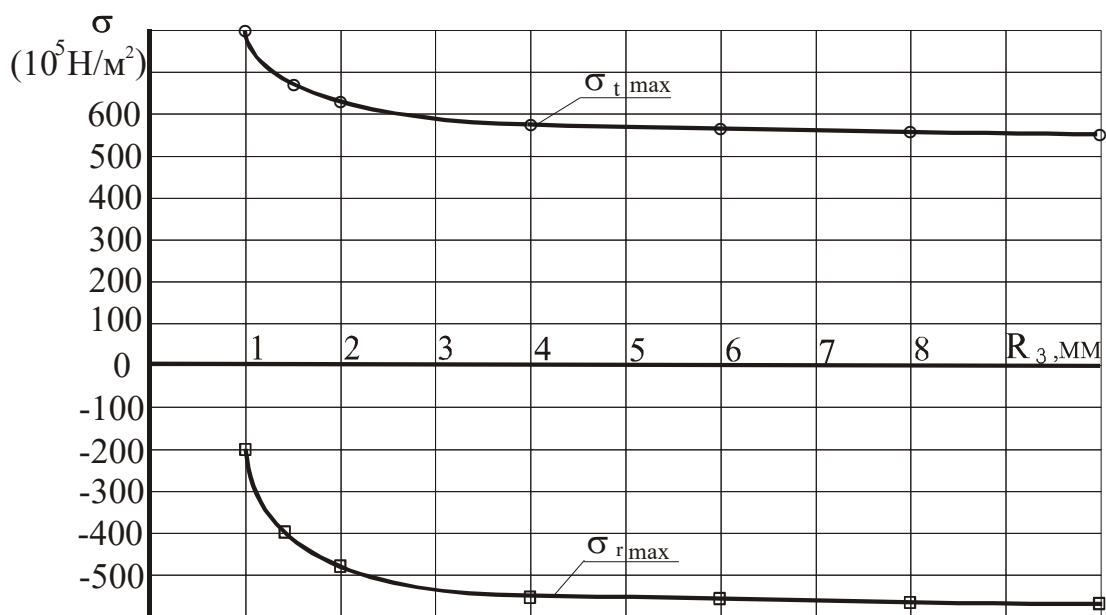


Рис. 4.4. Залежність напружень в компаунді від величини його зовнішнього радіуса  $R_3$  при  $R_2 = \text{const}$

Аналіз приведених формул показує також, що первинними факторами, які впливають на величину виниклих в конструкції резистор-компаунд напружень, є ФМХ з'єднувальних матеріалів і геометричні розміри конструкції. В рамках наведеної фізичної моделі уточнення вимагають ФМХ матеріалу компаунда і кераміки.

#### 4.2. Визначення реальних фізико-механічних характеристик компаунда

Проведений аналіз показав, що розкид значень ФМХ компаундів при виробництві може досягати 300% і залежить від багатьох чинників, як наприклад, місце виготовлення складових компаунда. Деякі результати проведених експериментальних досліджень з визначення ФМХ різних партій компаунду при стандартному випробуванні на розтяг представлені в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Експериментальні значення ФМХ компаундів

| Компаунд | Границя міцності $\sigma_b$ , Н/мм <sup>2</sup> | Модуль Юнга, Н/мм <sup>2</sup>      | Коефіцієнт Пуассона $\mu$ |
|----------|---|-------------------------------------|---------------------------|
| ЭК-242   | 9,7 – 25  | $0,34 \cdot 10^4 - 1,8 \cdot 10^4$  | 0,22 – 0,45               |
| ЭК-242-1 | 73 – 256  | $1,2 \cdot 10^4 - 2,7 \cdot 10^4$   | 0,25 – 0,45               |
| ЭК-93    | 93 – 280  | $0,62 \cdot 10^4 - 1,35 \cdot 10^4$ | 0,24 – 0,45               |
| ЭЗК-25   | 85 – 430  | $0,9 \cdot 10^4 - 1,56 \cdot 10^4$  | 0,23 – 0,45               |

Крім того, характеристики компаундів у температурному діапазоні від  $-60^\circ\text{C}$  до  $-20^\circ\text{C}$  взагалі є невідомими, хоча вказані вироби експлуатуються за таких температур, і саме за від'ємних температур спостерігаються максимальні напруження.

Існуючі методи визначення ФМХ матеріалів мають низку недоліків, що суттєво звужують область їх застосування [278].

Ведучи мову про статичні методи [196], можна відмітити, що оскільки досліджувані матеріали як правило є крихкими, то, по-перше, виникають труднощі щодо дотримання співвісності при закріпленні зразків у випробувальних машинах, і, по-друге, руйнування цих зразків відбувається при малих відносних деформаціях, що значно знижує точність вимірювань. Крім того, результати такого експерименту суттєво залежать від виду навантаження, розміру зразків, способів їх виготовлення тощо.

Динамічні методи [4] можуть бути застосовані лише для матеріалів із слабким поглинанням коливань, залежать від температурних умов, за яких проводиться експеримент, а також вимагають для своєї реалізації знання швидкості поширення в матеріалі пружних хвиль, визначення якої само по собі є складною задачею.

Крім того, відомі як статичні, так і динамічні методи дають можливість визначати ФМХ в основному однорідних матеріалів, у яких значення цих характеристик практично не залежать від виду напруженого стану матеріалу в конкретному виробі. Розглянутий же компаунд як матеріал-герметик існує лише у певних конструкціях, як наприклад мікромодуль, і його ФМХ будуть відрізнятися від характеристик цього ж компаунда у іншій конструкції.

Специфіка полімерних компаундів, що застосовуються при герметизації, описана у розділі 1. Однак, оскільки наведена тут модель цілком придатна для розрахунків на міцність з цих матеріалів [196], то перспективним виявляються методи визначення ФМХ, що базуються на їх ідентифікації на основі розв'язання ОЗ міцності.

Далі на основі викладеного методу параметричної ідентифікації і методу пробних параметрів, розроблено розрахунково-експериментальний метод і засіб визначення характеристик машинобудівних матеріалів, що мають значний розкид у широкому діапазоні температур, який дозволяє одночасно ідентифікувати КЛТР, модуль пружності і коефіцієнт Пуассона компаунда.

Ідея метода полягає в тому, що досліджуваний матеріал з'єднують з іншими пробними матеріалами, характеристики яких добре вивчені і

відрізняються від відповідних характеристик досліджуваного матеріалу. При цьому форми деталей, що сполучаються, мають бути такими, щоб пружно-деформований стан у досліджуваних зразках і в реальних конструкціях описувались одними і тими ж рівняннями. Для визначення ФМХ пропонується вважати значення цих параметрів, які ідентифікуються, невідомими у розрахунковій моделі. Значення же тих параметрів пробних конструкцій, які можуть бути виміряні достатньо точно експериментальними способами в реальних умовах функціонування виробів, а також характеристики пробних матеріалів і геометричні розміри конструкцій пропонується підставляти в ту ж модель в якості вхідної інформації. Виготовляючи певну кількість пробних зразків зі значеннями ФМХ, що задаються таким чином, щоб вимірювальні величини деформації відрізнялись, можна на базі прийнятої розрахункової моделі записати таку кількість лінійно-незалежних рівнянь відносно ідентифікованих параметрів, яка необхідна для їх визначення.

Розглянемо ідентифікацію вказаних ФМХ компаунда, який герметизує виріб і оточує його рівномірним шаром, за наведеною у п. 4.1. розрахунковою моделлю.

Для реалізації метода було виготовлено двохшарові циліндричні конструкції «пробний матеріал-компаунд», вибираючи в якості пробного матеріалу, характеристики якого добре вивчені і відмінні від аналогічних характеристик компаунда. В цих конструкціях на границі розділу матеріалів при перепаді температури виникає контактний тиск. Коректність застосування схеми двошарових складових циліндрів і формул (4.2)...(4.8) для розрахунку вказаних конструкцій забезпечувалась спеціальним вибором розмірів. Параметрами, які входять у вибрану математичну модель і можуть бути точно виміряні експериментальними методами, є виниклі під дією контактного тиску деформації на зовнішній поверхні пробного циліндра, значення яких пов'язані зі значеннями напружень законом Гука. Співвідношення закону Гука, а також формули (4.2)...(4.8) дають змогу для відомих радіальних розмірів конструкцій

за визначеними експериментально значеннями деформацій знайти величину контактної тиску.

Таким чином, контактний тиск можна вважати таким параметром конструкції, що визначається експериментально і значення якого можуть бути підставлені у розрахункову модель в якості вхідної інформації у вигляді

$$P_1 = -\varepsilon_r \left( \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1 + \mu_1}{E_1} + \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1 - 2\mu_1}{E_1} \right)^{-1}, \quad (4.9)$$

де  $\varepsilon_r$  – окружна відносна деформація поверхні контакту [226]. Останнє співвідношення можна легко отримати зі співвідношень (4.3 – 4.5) підстановкою до узагальненого закону Гука.

Дослідимо вираз (4.2) для контактної тиску і перетворимо його до вигляду, зручного для визначення ідентифікованих параметрів. Аналіз виразу, що стоїть у правій частині виразу (4.2) показує, що його знаменник відмінний від нуля, оскільки між радіальними розмірами досліджуваної конструкції завжди зберігається співвідношення  $R_1 < R_2 < R_3$ , а значення коефіцієнта Пуассона для довільних матеріалів лежить у межах  $0 < \mu < 0,5$ .

Перетворимо праву частину співвідношення (4.2) до вигляду

$$P_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)t}{\frac{1 - 2\mu_1}{E_1} - \frac{1 - 2\mu_2}{E_2} + \frac{2 - \mu_1}{E_1} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{2 - \mu_2}{E_2} \cdot \frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}}. \quad (4.10)$$

Після введення нових змінних  $\chi_1 = (1 - 2\mu_2)E_2$ ,  $\chi_2 = (2 - \mu_2)E_2$ , що виражаються через ідентифіковані параметри  $E_2$ ,  $\mu_2$ , перетворимо співвідношення (4.10) до такого вигляду, щоб всі параметри, які вимагають визначення, розташовувались в лівій частині отриманого рівняння. Виконавши перетворення і ввівши додаткові позначення, отримаємо

$$P_1 B \chi_2 - P_1 \chi_1 + \alpha_2 t = -(E + CD)P_1 + \alpha_1 t, \quad (4.11)$$

де  $B = R_3^2 / (R_3^2 - R_2^2)$ ,  $C = (2 - \mu_1) / E_1$ ,  $D = R_1^2 / (R_2^2 - R_1^2)$ ,  $E = (1 - 2\mu_2) / E_1$ . Рівняння (4.11) є лінійним рівнянням відносно невідомих  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\alpha_2$ . Для їх визначення необхідно записати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь типу 4.11. З цією метою спочатку припустимо, що виготовлено три зразки з різними наборами значень всієї сукупності первинних факторів і виміряні відповідні їм значення контактних тисків. Це дає можливість записати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} P_{1i} B_i \chi_2 - P_{1i} \chi_1 + \alpha_2 t = -(E_i + C_i D_i) P_{1i} + \alpha_1 t, \\ i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (4.12)$$

де індекси коефіцієнтів  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  і контактного тиску  $P_{1ki}$  відповідають номеру вектора параметрів  $\mathbf{X}_i = [\alpha_{1i}, \mu_{1i}, E_{1i}, R_{1i}, R_{2i}, R_{3i}] \forall i = 1, 2, 3$   $i$ -го пробного зразка.

Розв'язок дискретної лінійної ОЗ (4.12) дозволяє знайти характеристики досліджуваного матеріалу, які ідентифікуються.

Однак при реалізації методу пробних параметрів для того, щоб домогтися різних значень контактних тисків, не обов'язково задавати різноманітні значення всього вектора параметрів  $\mathbf{X}_i$ . Для цього достатньо змінювати один або декілька параметрів у різних сполученнях. Далі будуть досліджені такі параметри або їх сполучення, зміна яких, по-перше, найбільш просто реалізується, а по-друге, забезпечить існування, єдиність і стійкість розв'язку системи рівнянь (4.12).

Умовою існування і єдиність розв'язку вказаної системи є відмінність від нуля її визначника  $\Delta$  [265, 286], що дорівнює

$$\Delta = \alpha_2 t [P_{11} P_{12} (B_2 - B_3) + P_{11} P_{13} (B_1 - B_3) + P_{12} P_{13} (B_3 - B_2)]. \quad (4.13)$$

Аналіз (4.13) показує, що така умова не може бути виконана, наприклад, якщо в трьох досліджуваних зразках будуть одночасно однакові радіуси поверхонь контакту і зовнішні радіуси компаунда. Цей висновок відразу



виключає із розгляду такий простий випадок, як використання в трьох зразках різних пробних матеріалів зі збереженням радіальних розмірів конструкції, або зміни контактного тиску лише за рахунок зміни внутрішнього діаметра циліндра із пробного матеріалу. Подальше дослідження системи (4.12) показує, що зміна лише зовнішнього радіуса компаундного циліндра зі збереженням в трьох зразках однакових значень решти координат вектора параметрів приводить до того, що система має тривіальний розв'язок і рівняння тотожні.

Всі задачі ідентифікації нерозривно пов'язані з різноманітними алгоритмами підвищення стійкості їх розв'язків [281, 126]. Для забезпечення стійкості розв'язку СЛАР (4.12), і, відповідно, досягнення заданої точності, необхідно наближати кути між прямими, що описуються рівняннями СЛАР, до  $90^\circ$ , зменшуючи тим самим її обумовленість. З аналізу (4.12) очевидно, що найефективнішим способом підвищення стійкості розв'язків цієї СЛАР є зміна геометричних розмірів пристосувань, що входять у рівняння системи.

Приведемо найбільш прийнятні для реалізації методу пробних параметрів варіанти підвищення стійкості розв'язків СЛАР (4.12) шляхом підбору таких значень її елементів, які б забезпечували найкращу обумовленість.

1. В трьох досліджуваних зразках змінюються лише значення радіуса поверхні контакту. В цьому випадку для обчислення ідентифікованих характеристик необхідно в (4.12) покласти  $C_i = C$ ,  $E_i = E$ ,  $\alpha_{i1} = \alpha_1$ ,  $B_i = R_3^2 / (R_3^2 - R_{2i}^2)$ ,  $D_i = R_1^2 / (R_i^2 - R_1^2)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ . При цьому обов'язково виконання умов  $R_2 \neq 0$ .

2. В трьох досліджуваних зразках змінюються одночасно лише значення внутрішнього і зовнішнього радіусів складного циліндра. Для реалізації цього варіанта необхідно в (4.12) покласти  $C_i = C$ ,  $E_i = E$ ,  $\alpha_{i1} = \alpha_1$ ,  $B_i = R_{3i}^2 / (R_{3i}^2 - R_2^2)$ ,  $D_i = R_{1i}^2 / (R_2^2 - R_{1i}^2)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ .

Очевидно, що для розглянутих двох варіантів СЛАР (4.12) буде погано обумовлена, тобто похибка результатів розв'язання задачі ідентифікації буде набагато більше похибки значень вхідних даних (параметрів моделі).

Застосуємо запропонований у розділі 2 статистичний метод підвищення стійкості розв'язків погано обумовлених систем, який базується на тому, що вхідні параметри, які визначаються експериментально, розглядаються як випадкові величини, розподілені за певними імовірнісними законами.

За математичне сподівання цих величин приймається їх істинне значення з огляду на припущення, що похибка вимірювання містить лише випадкову складову і не містить систематичної складової, а за середнє квадратичне відхилення – величина  $\Delta/3$ , де  $\Delta$  – точність вимірювального приладу. Тоді шукані характеристики теж є випадковими величинами, розподіленими за деякими законами.

Для перевірки ефективності методу був проведений наступний чисельний експеримент.

Представимо СЛАР (4.12) у вигляді матричного рівняння  $\mathbf{AX}=\mathbf{Y}$  типу (2.19), де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} P_1 B_1 - P_1 \Delta t \\ P_2 B_2 - P_2 \Delta t \\ P_3 B_3 - P_3 \Delta t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix},$$

де  $\mathbf{Y}$  – вектор відомих з елементами  $y_i = -(E_i - C_i D_i) P_i + \alpha_{ii} \Delta t$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ ;

$\mathbf{X} = [\chi_1 \ \chi_2 \ \alpha_2]^T$  – вектор невідомих.

На основі заданих точних значень  $\mu_2, E_2, \alpha_2$ , а отже, і відповідних їм значень  $\chi_1, \chi_2, \alpha_2$  була розв'язана пряма задача для перепаду температур  $\Delta t = 40^\circ \text{C}$ , в результаті чого визначені точні значення правої частини СЛАР (4.12)  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , в якій матриця  $\mathbf{A}$  з числом обумовленості  $\text{cond}(\mathbf{A})=230$  передбачалась заданою без похибок

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7,20 & 6,72 & 40,0 \\ -5,87 & 4,34 & 40,0 \\ -4,78 & 3,56 & 40,0 \end{bmatrix}.$$

Методом масштабування (див. розділ 2) вдалося знайти вектор коефіцієнтів  $\mathbf{K}=[1,000; 1,773; 1,465]^T$ , при якому досягається  $\min_{\mathbf{K}} \text{cond}(\mathbf{A}')$ , де  $\mathbf{A}'$  – матриця еквівалентної СЛАР, рядки якої отримують як  $\mathbf{A}'(j,:) = \mathbf{A}(j,:)k_j, j = \overline{1, n}$ . Розв'язок оптимізаційної задачі  $\min_{\mathbf{K}} \{f_1(\mathbf{K}), f_2(\mathbf{K}), \dots, f_k(\mathbf{K})\}, k \geq 2$ , де  $f(\mathbf{K}) = \text{cond}(\mathbf{A}')$  шукали в математичному пакеті прикладних програм MATLAB, використовуючи квазі-Ньютонівський метод зі змішаною процедурою квадратичного і кубічного пошуку. Масштабування зменшує обумовленість до  $\text{cond}(\mathbf{A})=212$ , тобто на 8%. Відповідна програма представлена у додатку Б.1.

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -7,20 & 6,72 & 40,0 \\ -10,4 & 7,69 & 70,93 \\ -7,01 & 5,21 & 58,61 \end{bmatrix}.$$

Як показали розрахунки, при відносній точності вимірювань 0,1 правої частини системи рівнянь (4.12) розкид значень шуканих величин досягав 2687%, при точності 0,01 – 428%, при точності 0,001 – 44%. В той же час значення ФМХ, ідентифіковані за допомогою статистичного методу підвищення стійкості розв'язків, відрізнялись від «істинних» значень не більше 439% при точності вимірювань 0,1, на 20% при точності вимірювань 0,01 і на 2,8% при точності вимірювань 0,001.

Одержані результати свідчать про ефективність застосування статистичного методу підвищення стійкості за рахунок збільшення кількості вимірювань для ОЗ ідентифікації і про достатню точність запропонованого методу пробних параметрів.

Для практичної реалізації методу пробних параметрів для визначення ФМХ компаундів необхідно, як було вказано раніше, забезпечити коректність застосування розрахункової схеми двошарових складових циліндрів. Це передбачає виконання наступних умов: циліндри в складовій конструкції мають

бути товстостінними; складовий двошаровий циліндр має бути достатньо довгим для того, щоб у місці, де будуть відбуватися деформації, не позначався вплив крайових ефектів.

Для практичної реалізації методу було розроблено і виготовлено спеціальне пристосування (рис. 4.5). Основними елементами пристосування є пустотілий керамічний циліндр (пробний елемент), пустотілий сталевий циліндр, розрізаний по двом діаметрально протилежним твірним, циліндрична опорна пластина з двома коаксіальними циліндричними проточками, призначеними для фіксації пробного і сталевого циліндрів.

Було виготовлено п'ять таких пристосувань, що різняться один від одного діаметром циліндрів і відповідними розмірами поверхнею опорних пластин, які фіксують. Розміри діаметрів циліндрів різних пристосувань наведені в таблиці 4.3.

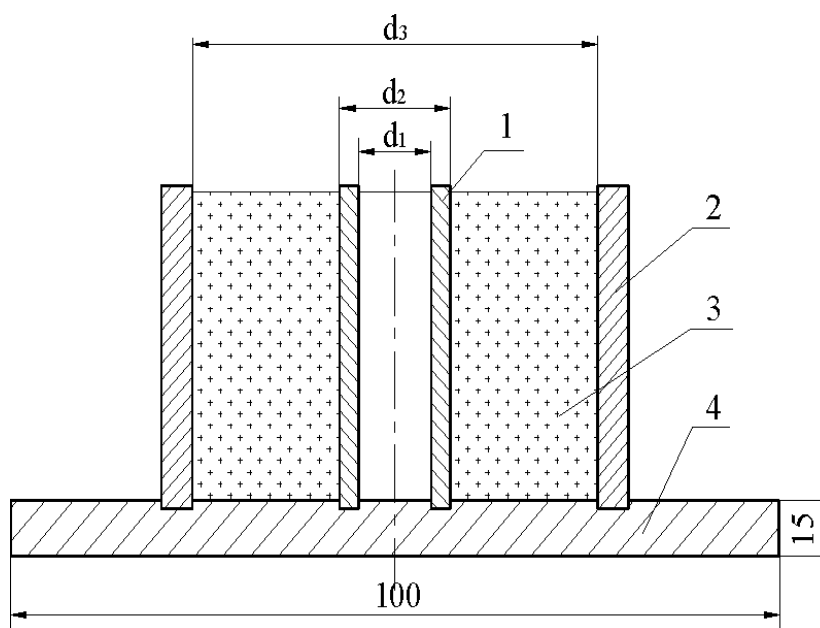


Рис. 4.5. Схема пристосування для визначення ФМХ компаунда:

- 1 – пустотілий мідний циліндр;
- 2 – пустотілий сталевий циліндр;
- 3 – компаунд;
- 4 – опорна пластина.

Таблиця 4.3

Розміри діаметрів циліндрів пристосувань  
для визначення ФМХ компаунда

| № пристосування | Діаметри, мм   |                |                |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|
|                 | d <sub>1</sub> | d <sub>2</sub> | d <sub>3</sub> |
| 1               | 10             | 10,4           | 40             |
| 2               | 20             | 20,4           | 40             |
| 3               | 30             | 30,4           | 60             |
| 4               | 14             | 14,4           | 40             |
| 5               | 16             | 16,4           | 40             |

Після перевірки стійкості розв'язків одержаної задачі з використанням розроблених у розділі 2 методів виявилось, що найбільшу стійкість мають розв'язки задач, складених для перших трьох варіантів пристосувань.

Перед складанням внутрішні поверхні сталених напівциліндрів і опорної пластини покривали тонким шаром КЛТ-30, а пробні циліндри препарували тензорезисторами за схемою, приведеною на рис. 4.6. Номер кожного тензорезистора містить дві цифри, перша із яких – номер варіанта пристосування, а друга – номер тензорезистора. Тензорезистори 1.1...1.4, 2.1...2.4, 3.1...3.4, вказані на рис. 4.13, призначені для вимірювання осьових, а тензорезистори 1.5...1.8, 2.5...2.8, 3.5...3.8 – окружних відносних деформацій поверхні контакту.

Після закінчення препарування і полімеризації КЛТ-30 циліндри і напівциліндри встановлювали в опорні пластини, напівциліндри зтягували за допомогою хомутив, стики зварювали шаром КЛТ-30.

Для визначення залежності між величиною вихідного струму підсилювача і величиною деформації деталі, яка реєструється тензорезистором, проводили статичне тарування. Тарування проводилось на обладнанні УТС-12-1. Для цього між опорами балка піддавалась чистому згину і, отже, мала постійну відносну деформацію поверхні волокон, що дало можливість монтувати тензорезистори по всій довжині. Відносна деформація зовнішніх волокон визначались за формулою

$$\eta = \frac{4hy}{b^2}, \quad (4.14)$$

де  $h$  – товщина балки;

$b$  – ділянка чистого згину;

$y$  – прогин балки.

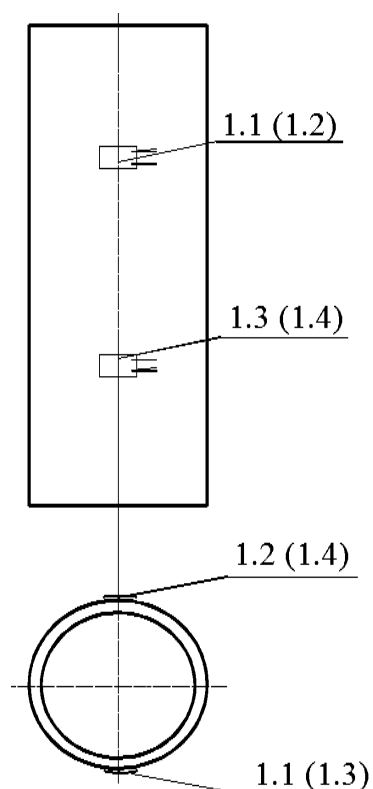


Рис. 4.6. Препарування мідного циліндра тензорезисторами 1.1, 1.2, 1.3, 1.4

На тарувальну балку наклеювали 10 тензорезисторів, взятих з тієї ж партії, що і робочі тензорезистори. Тензорезистор, наклеєний на тарувальну балку, вмикали в одне з плечей напівмоста станції. Тарування тензорезисторів з апаратурою проводили після попереднього балансування мостів і фазування вихідних пристроїв реєстраційних приладів. При навантаженні тарувальної балки визначали залежність відхилення променю гальванометра світлопроменевого осцилографа від деформації балки. Величину деформації визначали за формулою (4.14), вимірюючи прогин балки мікронним індикатором годинникового типу. За результатами тарування будували графік

залежності вихідного струму підсилювача (відхилення променю осцилографа) від відносної деформації.

Для врахування температурних похибок тензорезистори підключались до вимірювальної апаратури, зібраний комплект апаратури поміщали в термостат і реєстрували покази тензорезисторів через кожні  $10^{\circ}\text{C}$ . Для зменшення впливу з'єднувальних дротів тензорезистори підключали до підсилювача за трьохточковою схемою. Після п'ятикратних вимірювань на кожній температурі вільну порожнину між стальними і пробними циліндрами заливали компаундом. В кінці процесу полімеризації компаунда знімали опорну пластину і стальні напівциліндри, знову поміщали зразки в термостат і реєстрували покази тензорезисторів за тих же температур, що і в процесі термотарування. Значення деяких ФМХ компаунда та кераміки обчислені при різних температурах наведені на рис. 4.7.

Кожне зареєстроване значення  $\varepsilon_{\Sigma}$  відносної деформації є алгебраїчною сумою удаваної деформації  $\varepsilon_T$  від дії температури, тобто результату температурного тарування, і деформації  $\varepsilon$  від дії навантаження, тобто компаунда.

У відповідності з викладеними у розділі 2 рекомендаціями щодо забезпечення стійкості розв'язку в якості розрахункових приймались осереднені значення деформації, чим забезпечувалось застосування МНК для задачі 4.12. За виміряними значеннями деформацій за формулою (4.9) визначали величину контактного тиску, а далі – значення КЛТР, модуля пружності і коефіцієнта Пуассона компаунда.

Середні значення ФМХ компаунда ЄЗК-25, а також довідкові значення аналогічних характеристик кераміки резисторів ОМЛТ-0,125 наведені в таблицях 4.4 і 4.5.

Аналіз результатів досліджень показав, що значення ідентифікованих характеристик у різних діапазонах температур відрізняються один від одного не більше, ніж на 1%, що засвідчує достовірність розробленої методики, а відтак – отриманих результатів.

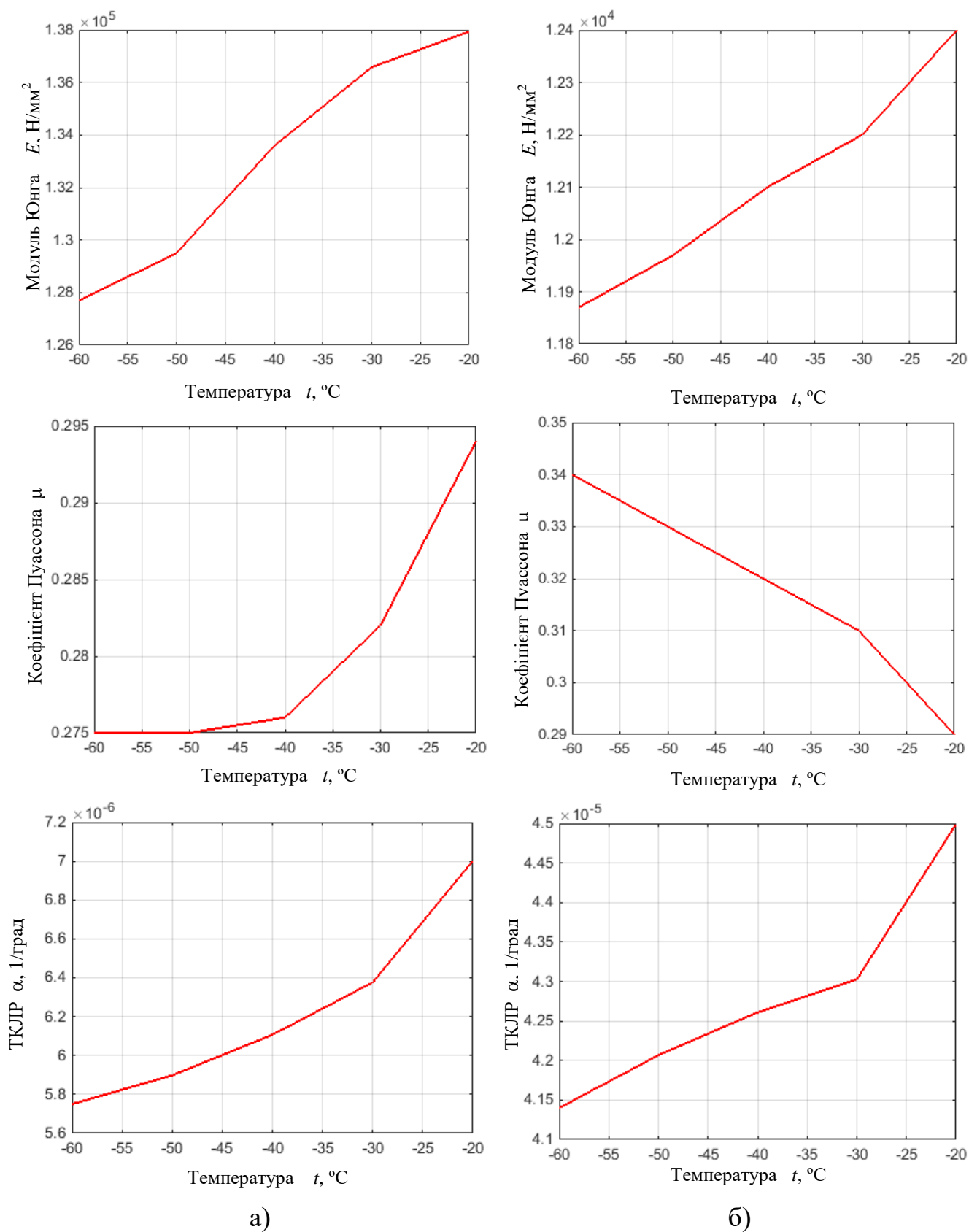


Рис. 4.7. Значення деяких ФМХ, обчислені при від'ємних температурах:

а) кераміки;

б) компаунду.



Таблиця 4.4

## Значення ФМХ кераміки резисторів

| Температурний діапазон | Модуль Юнга<br>$E, \text{Н/мм}^2 \cdot 10^4$ | Коефіцієнт Пуассона<br>$\mu$ | Температурний коефіцієнт лінійного розширення<br>$\alpha, 1/\text{град} \cdot 10^{-6}$ |
|------------------------|--|------------------------------|--|
| -20°C...-30°C          | 13,794                                       | 0,294                        | 7,002  |
| -30°C...-40°C          | 13,658                                       | 0,282                        | 6,376  |
| -40°C...-50°C          | 13,358                                       | 0,276                        | 6,107  |
| -50°C...-60°C          | 12,950                                       | 0,276                        | 5,898  |

Таблиця 4.5

## Обчислені значення ФМХ компаунда

| Температурний діапазон | Модуль Юнга<br>$E, \text{Н/мм}^2 \cdot 10^4$ | Коефіцієнт Пуассона<br>$\mu$ | Температурний коефіцієнт лінійного розширення<br>$\alpha, 1/\text{град} \cdot 10^{-6}$ |
|------------------------|--|------------------------------|--|
| -20°C...-30°C          | 1,24   | 0,29                         | 44,99  |
| -30°C...-40°C          | 1,21   | 0,31                         | 43,03  |
| -40°C...-50°C          | 1,21   | 0,32                         | 42,61  |
| -50°C...-60°C          | 1,20   | 0,33                         | 42,07  |

4.3. Визначення допустимих напружень у кераміці шляхом статистичної обробки результатів експериментів з полімодальним законом розподілу ймовірностей

З метою обґрунтування регламентованих значень вихідних характеристик необхідно визначити допустимі напруження в досліджуваних матеріалах. Для цього встановлювали зусилля в момент руйнування керамічних підкладок виробів і спеціальних зразків, виготовлених із компаунда, при розтягувальних (стискувальних) навантаженнях.

Для визначення таких зусиль був спроектований прилад, який дає можливість проводити плавне збільшення розтягувальних зусиль у діапазоні 0...200 Н. Принцип його дії аналогічний до дії розривних машин з механічним навантаженням зразка і тензометричним силовимірювачем. Для вимірювання діючого на зразок навантаження служить тензометричний динамометр. Прилад монтується на універсальній машині типу УММ-5. Захвати приладу для випробувань керамічних виробів являють собою порожні корпуси, зворотні конусам їх вивідних ковпачків, що забезпечує установку резисторів без передачі деформацій на підкладку. Застосування в конструкції самоцетрованих захватів забезпечує центральний розтяг виробів і зразків компаунда при випробуваннях.

Методика подальшої обробки результатів експериментів мала на меті встановлення реальних характеристик міцності кераміки партії резисторів. Для побудови нормалізованої гістограми були виміряні зусилля руйнування кераміки 50-ти виробів. У відповідності з п. 3.2.4 знайдено оптимальний крок гістограми 5 Н. На рис. 4.8 по осі абсцис з цим кроком відкладені значення руйнувальних для кераміки зусиль, а по осі ординат – відношення  $n_i/nh$ , де  $n_i$  – кількість значень, що містяться в  $i$ -му інтервалі розбиття по осі абсцис,  $n=50$ . Емпірична щільність розподілу виміряних значень руйнуючих зусиль виявилась двомодальною.

Подальші дії з обробки отриманих статистичних матеріалів проводилися на базі розробленого у п. 3.2.3 методу декомпозиції суміші імовірнісних розподілів. Для визначення параметрів шуканого двомодального закону розподілу шляхом декомпозиції суміші нормальних законів типу (3.11) вибираємо вузли інтерполяції. Їх координати разом зі значеннями функції в них при  $k=2$  приведені в таблицях 4.6 та 4.7. Гістограму та апроксимувальну криву вказаного розподілу представлено на рис. 4.9.

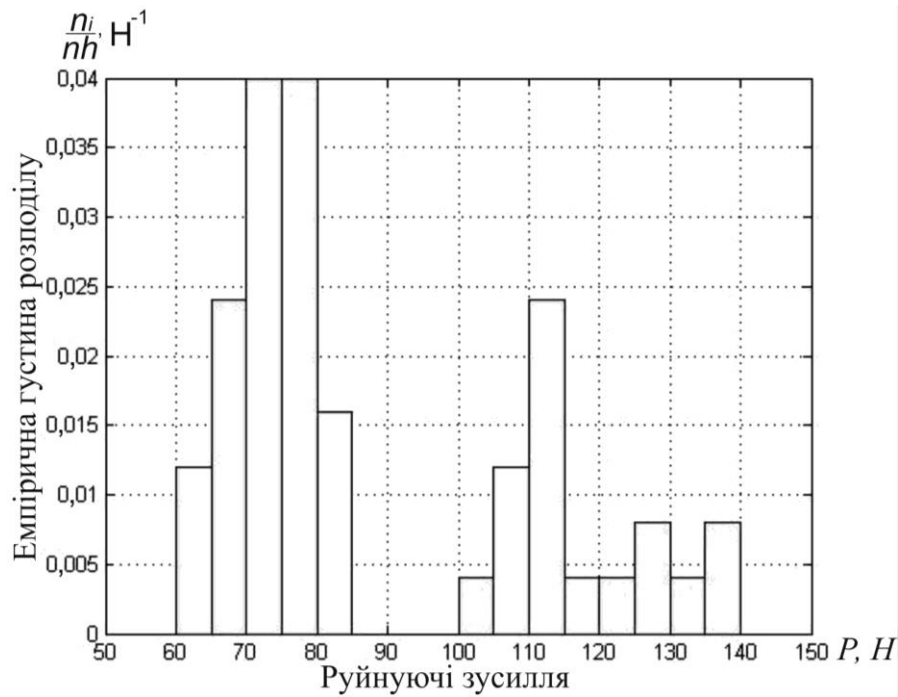


Рис. 4.8. Гістограма розподілу руйнівальних зусиль кераміки виробів

Таблиця 4.6

## Вузли інтерполяції і значення функції

|                  |       |      |       |       |       |
|------------------|-------|------|-------|-------|-------|
| $x_i, Н$         | 66    | 74   | 84    | 114   | 124   |
| $f(x_i), Н^{-1}$ | 0,018 | 0,04 | 0,012 | 0,024 | 0,004 |

Таблиця 4.7.

## Значення параметрів закону розподілу

|            |            |               |               |          |          |
|------------|------------|---------------|---------------|----------|----------|
| $\mu_1, Н$ | $\mu_2, Н$ | $\sigma_1, Н$ | $\sigma_2, Н$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ |
| 74         | 114        | 6,6           | 5,7           | 0,66     | 0,34     |

В результаті розв'язання системи (3.11) при  $k=2$  були отримані параметри закону, представлені в таблиці 4.6. Графіки цього закону і його складових наведені на рис. 4.7.

Застосовуючи розроблений метод екстремальних характеристик для призначення допустимих значень параметра з певною надійністю, для подальшої обробки розглядалась ліва підвибірка виробів, руйнівальні зусилля яких підпорядковуються нормальному закону розподілу з параметрами  $\mu_1=74Н$ ,

$\sigma_1=6,6\text{Н}$ , тобто найменш міцних виробів. В цьому разі можлива помилка піде в запас міцності виробів.

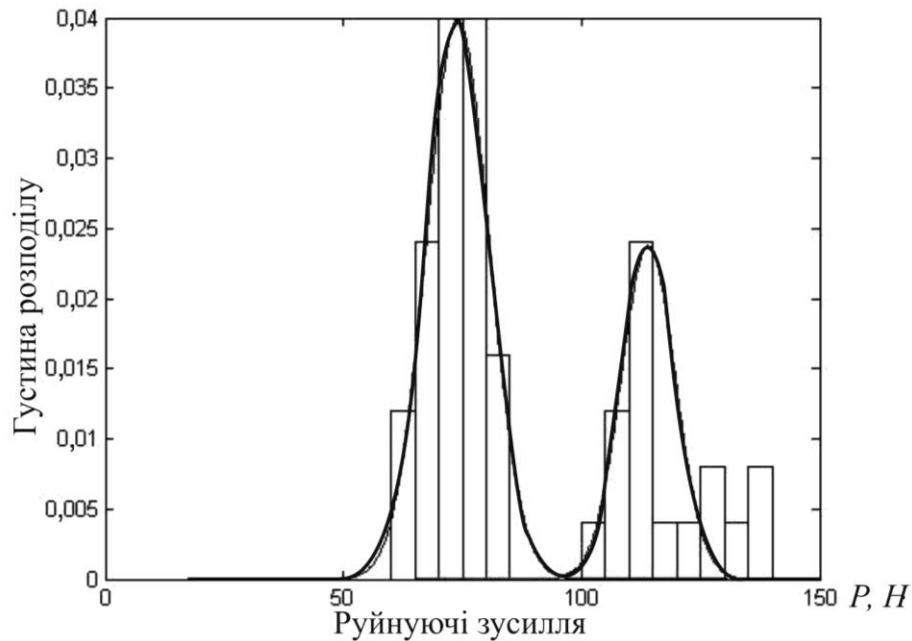


Рис. 4.9. Суміш щільності розподілу керамічних виробів

Нехай імовірність того, що вказані зусилля лежать на симетричній відносно  $\mu_1$  ділянці довжиною  $2\delta$  дорівнює  $\gamma=0,995$ , тобто

$$P\{|P_{руй} - \mu_1| < \delta\} = \gamma.$$

Тоді відношення  $\delta/\sigma_1$  є аргументом функції Лапласа, що дорівнює  $\gamma/2$  [37]. За таблицею знаходимо  $\gamma/2=2,8$ , звідки  $\delta=6,6 \cdot 2,8=18,48$  Н. Це означає, що з імовірністю 0,995 за граничне значення руйнівального навантаження можна прийняти наступне  $P_{зр} = 74 - 18,48 = 55,52$  Н.

Аналогічно були отримані значення навантажень, що руйнують кераміку при стискуванні і відповідні характеристики компаунда, а також обчислені значення граничних напружень у матеріалах. Результати розрахунків наведені в таблиці 4.8.

Таблиця 4.8.

## Граничні навантаження і напруження

| Тип резистора або<br>компаунда | Граничні зусилля і напруження |                    |               |                    |
|--------------------------------|-------------------------------|--------------------|---------------|--------------------|
|                                | На розтяг                     |                    | На стиск      |                    |
|                                | Зусилля,<br>Н                 | Напруження,<br>МПа | Зусилля,<br>Н | Напруження,<br>МПа |
| Резистор ОМЛТ-0,125            | 56                            | 68,72              | 821           | 500                |
| Компаунд ЭЗК-25                |                               | 108,00             |               | 110                |

## 4.4. Формалізація оберненої задачі параметричного синтезу

Досліджувана МС або технологічний процес її виробництва буде надалі розглядатись як деякий об'єкт, що характеризується наборами вхідних і внутрішніх конструкторських і вихідних характеристик (показників якості), що ними формуються. В залежності від суті задачі, що розглядається, в якості первинних конструктивних і технологічних факторів об'єктів, які для простоти в подальшому будуть називатись первинними, можуть розглядатись динамічні характеристики, параметри елементів конструкцій і МС, ФМХ матеріалів, розмірно-геометричні і функціонально-фізичні параметри складових частин виробів, що складаються тощо. Крім того, до первинних факторів можуть бути віднесені режими технологічних операцій, наприклад, режими полімеризації компаундів, зусилля запресування, температура і час пайки тощо. До вихідних же належать характеристики, що дозволяють обґрунтовано давати висновок про відповідність виробу пред'явленим до нього вимогам. Наприклад, у задачах забезпечення міцності вихідними характеристиками є напруження в матеріалах елементів конструкції, в задачах зменшення віброактивності роторів – допустимі напруження і зусилля на опори, в задачах забезпечення функціонування виробів – контрольовані параметри об'єктів.

Запропонована в подальшому в роботі загальна постановка задачі забезпечення заданих вимог на вихідні динамічні та міцнісні характеристики МС була отримана на основі формалізації, на перший погляд, різнорідних практичних задач, описаних у підрозділі 1.5, в яких, проте, була виявлена деяка спільність. Так, були розглянуті наступні ОЗ:

- міцності герметизованих конструкцій у складі електронних систем: мікроскладань і дискових конденсаторів. Критерієм працездатності конструкції є виконання умов міцності;

- проектування механічної конструкції резонатора для забезпечення стабільності потужності сигналу ЛВ авіаційної техніки. Параметри конструкції знаходять розв'язанням ОЗ синтезу допусків; критерієм працездатності є виконання ТУ на вихідну характеристику.

Будь-яку МС можна подати як систему з  $n$  вхідними параметрами  $x_i, i=1,2,\dots,n$  і  $m$  вихідними параметрами  $Y_i, i=1,2,\dots,m$ . Така система характеризується вектором вхідних  $\mathbf{X}=[x_i]_{n \times 1}$  і вектором вихідних  $\mathbf{Y}=[y_i]_{m \times 1}$  параметрів.

Створення будь-якої нової машини, механізму, технологічної, та інших систем і процесів починається із задання технічних умов на вихідні параметри, які називають *умовами працездатності*. Ці умови (міцності, стійкості, жорсткості тощо) виражаються у вигляді номінальних значень вихідних параметрів  $\mathbf{Y}_0=[Y_{0i}]_{m \times 1}$  і допусків на їх значення у вигляді

$$Y_{0i} - \delta_i \leq Y_i \leq Y_{0i} + \delta_i, \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad (4.15)$$

або у вигляді нерівностей типу

$$[y_i] \leq Y_i \leq [Y_i], \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.16)$$

Якщо критерієм працездатності є міцність, як частковий випадок система (4.16)

може мати вигляд умов міцності  $\sigma_{екв} \leq [\sigma]$ .

Умови працездатності утворюють область допустимих значень  $D_y$ , геометричним відображенням якої у прямокутній декартовій системі координат простору вихідних параметрів  $\mathbb{R}^m$  є паралелепіпед допусків

$$\mathbf{P}_m = \left\{ \mathbf{Y} = [Y_i]_{1 \times m} \in \mathbb{R}^m \mid [y_i] \leq Y_i \leq [Y_i], i = \overline{1, m} \right\}.$$

Часто, обмеження встановлюються і на вхідні параметри системи із ТУ або нормативної документації, наприклад обмеження типу

$$[x_i] \leq X_i \leq [X_i], i = \overline{1, n}. \quad (4.17)$$

Ці допуски в прямокутній декартовій системі координат простору вхідних параметрів  $\mathbb{R}^n$  утворюють паралелепіпед допусків

$$\mathbf{P}_n = \left\{ \mathbf{X} [X_i]_{1 \times n} \in \mathbb{R}^n \mid [x_i] \leq X_i \leq [X_i], i = \overline{1, n} \right\},$$

який ще називають брусом допусків [1].

А далі перед розробниками стоїть задача спроектувати, сконструювати, виготовити і довести об'єкт, який виконує задані функції, щоб його вихідні параметри відповідали б умовам працездатності, чим буде забезпечений необхідний рівень якості. Іншими словами, необхідно знайти область працездатності  $D_x = \{x \in \mathbb{R}^n\}$ , тобто множину точок простору вхідних параметрів досліджуваної системи  $\mathbb{R}^n$ , в яких виконуються умови працездатності (4.15).

Задача побудови області працездатності, вибору номінальних значень вхідних параметрів  $\mathbf{X}_0 = [x_{0i}]_{n \times 1}$  і допусків на них носить назву задачі параметричного синтезу [2, 178]. Відомі на сьогодні методи параметричного синтезу, описані, наприклад, у роботах [1, 2, 178], для генерування точок простору вхідних параметрів  $\mathbb{R}^n$  і перевірки їх належності до області працездатності  $D_x$  застосовують метод Монте-Карло. Але навіть використовуючи найсучасніші комп'ютери такий підхід викликає значні

труднощі через відсутність інформації про закономірності випадкових процесів, варіації параметрів і величезний обсяг необхідних при цьому обчислень для розв'язання таких задач зі стохастичними критеріями. Тому на сьогодні розвиток теорії параметричного синтезу ведеться в сторону пошуку методів і алгоритмів зменшення необхідних обчислень, таких як ефективний вибір розміру сітки представлення області працездатності [1] або розпаралелювання обчислень на багатопроцесорних комп'ютерах. Заслуговує також на увагу метод, розроблений у роботі [146], але його застосування обмежене припущенням про нормальний закон розподілу допусків.

На відміну від відомих робіт, тут пропонується формалізувати і розв'язати задачу параметричного синтезу допусків як ОЗ забезпечення працездатності МС. Розв'язання даної складної задачі має здійснюватись з використанням сучасних підходів до розв'язання ОЗ і параметричного синтезу.

Нехай в загальному випадку зв'язок між вихідними і вхідними характеристиками МС задається системою функціональних залежностей

$$Y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, m}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m. \quad (4.18)$$

Задача параметричного синтезу полягає у виборі номінальних вхідних параметрів  $\mathbf{X}_0$ , які забезпечують максимум імовірності умов працездатності протягом заданого часу

$$\mathbf{X}_0 = \arg \max P \{ \mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t) \in D_x, \forall t \in [0, T] \}, \quad (4.19)$$

де  $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t)$  – випадковий процес зміни вхідних параметрів;

$t$  – момент часу;

$T$  – максимальна тривалість експлуатації технічної системи [1, 2].

Труднощі розв'язання задачі (4.19) полягають у тому, що закони зміни  $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t)$ , а також інформація про область  $D_x$ , є невідомою, а перевірка  $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t) \in D_x$  є неможливою. З цієї причини цю перевірку замінюють на



перевірку умов працездатності (4.16) обчисленням вихідних параметрів (4.18) по кожному окремо взятому вектору вхідних параметрів [1, 2, 114]. Для моделювання використовують метод Монте-Карло. В такому вигляді задача є прямою.

На відміну від прямої задачі в даній роботі ставиться задача визначення області  $D_x$  шляхом розв'язання ОЗ, тобто необхідно знайти таку область  $D_x$ , для якої виконується  $\forall x \in D_x, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{X}), \forall y \in D_y$ . Іншими словами, необхідно знайти таку область  $D_x, x \in \mathbf{R}^n$ , яка є відображенням області  $D_y, y \in \mathbf{R}^m$ . При цьому функціональні залежності типу (4.16) можуть бути як детермінованими, так і стохастичними. Розв'язання цієї задачі передбачає визначення множини значень (області) в просторі вхідних параметрів у вигляді допусків. Цією обставиною задача відрізняється від традиційно розв'язуваних у багатьох галузях техніки точкових ОЗ, в яких за наперед відомим вектором параметрів на виході визначається лише один вектор первинних факторів чи (або) параметрів.

Проаналізуємо відмінні особливості наведеної постановки задачі. Вона формалізує в загальному вигляді проблему забезпечення вимог ТУ на вихідні характеристики МС або технологічні процеси їх виготовлення за рахунок відповідного вибору первинних факторів. Така постановка вказаної проблеми, можливо, мала на увазі як визначальна, наприклад, у задачах теорії точності. Але в самому формулюванні задачі вона була визначена в термінах похибок або допусків. Запропоноване формулювання, на наш погляд, має ряд переваг.

По-перше, вона дає змогу розглядати задачу вибору номінальних значень первинних факторів МС, виходячи із обмежень, що накладаються на її вихідні характеристики, і задачу призначення допусків на її первинні фактори в їх взаємозв'язку. Це дозволить у подальшому ставити і розв'язувати задачу синтезу конструктивних варіантів МС, що мають оптимальну чутливість до виробничих і експлуатаційних відхилень її первинних факторів, тобто пов'язати безпосередньо вибір базового варіанта об'єкта з особливостями його практичної реалізації.

По-друге, задання області працездатності в природному вигляді нерівностей на вихідні характеристики об'єкта виключає внесення додаткових похибок переходу від рівняння зв'язку вихідних характеристик об'єкта з його первинними факторами до рівнянь допусків.

Крім того, розв'язання задачі у вказаній постановці дає можливість вирішувати і принципові питання, наприклад, вияснити, чи можливо взагалі в даній конструкції або застосовуючи даний технологічний процес досягти бажаного результату по всіх або низці вихідних характеристик. Це еквівалентно встановленню існування в просторі первинних факторів таких областей, в яких забезпечується виконання умов працездатності. Якщо таких областей не існує або вони лежать поза розумними з погляду конструктора або технолога межами, то це означає неспроможність даної конструкції об'єкта або технологічного процесу здійснити вимоги ТУ і необхідність пошуку принципово нових конструктивних або технологічних рішень.

Визначення вказаних областей на етапі проектування, виготовлення і доведення об'єкта дає можливість призначати допуски на первинні фактори як виробу в цілому, так і його окремих частин, а також вказувати правила його складання з заданими вихідними характеристиками. На етапі ж виробництва при виникненні недопустимих відхилень вихідних характеристик пошук розв'язку розглянутої задачі здійснюється на обмеженій підмножині простору первинних факторів, що визначаються ТУ. Якщо в цьому випадку знайдені підобласті, які лежать у вказаній обмеженій області, то розв'язок задачі, з врахуванням статистичної природи параметрів, дозволяє прогнозувати рівень браку продукції і визначати умови, забезпечення яких необхідне для виконання ТУ на вихідні характеристики.

Отже, розглянутий підхід дає змогу формалізувати велику кількість важливих частинних задач конструкторського і (або) технологічного забезпечення вимог ТУ на вихідні характеристики об'єктів, а також є вихідним формулюванням вказаної проблеми, що відбиває реальні процеси проектування, створення і експлуатації виробів.

#### 4.5. Етапи розв'язання обернених задач параметричного синтезу

Побудова порівняно нескладної ефективної математичної моделі міцності або динаміки з достатньо точними ідентифікованими параметрами, приведеними до цієї моделі, дає змогу перейти далі безпосередньо до поставленої задачі, розв'язання якої пропонується проводити за наступними етапами.

4.5.1. Врахування функціональних і параметричних обмежень. Встановлені і уточнені залежності між вихідними характеристиками об'єкта і його первинними факторами (4.18) дозволяють записати систему нерівностей, розв'язання якої і становить основну мету поставленої задачі. Для цього слід вибрати граничні значення  $[y_i]$  і  $[Y_i]$ ,  $i = \overline{1, m}$ , що регламентують якість роботи МС, або безпосередньо із ТУ, або з міркувань забезпечення тих чи інших властивостей даного об'єкта або його елементів. Тоді система функціональних обмежень буде мати вигляд

$$[y_i] \leq f_i(x_1, x_2, \dots, x_l) \leq [Y_i], \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.20)$$

Крім того, необхідно по можливості із виробничих, фізичних та інших міркувань вказати найширші межі множин можливих значень первинних факторів. Доповнена система обмежень набуде вигляду

$$\begin{cases} [y_i] \leq f_i(x_1, x_2, \dots, x_l) \leq [Y_i], \quad i = \overline{1, m}, \\ [x_j] \leq x_j \leq [X_j], \quad j = \overline{1, k}, \quad k \leq l, \end{cases} \quad (4.21)$$

де  $x \in \mathbb{R}^l$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ . Для деяких первинних факторів необхідно враховувати такі можливості їх практичної реалізації, як, наприклад, цілочисельність значень. В цьому випадку складають додаткові обмеження типу  $x_i = \overline{1, L}$ .

Через природність обмеження значень первинних факторів досліджуваного об'єкта в загальному випадку двосторонніми межами, пропонується розв'язок задачі шукати у вигляді областей (4.17). Геометрично

це означає вписування в криволінійну область  $l$ -мірного простору первинних факторів  $\mathbb{R}^l$ , що визначається системою нерівностей (4.17),  $l$ -мірного паралелепіпеду (4.16). Така задача, загалом, має неєдиний розв'язок, оскільки таких паралелепіпедів у вказану область може бути вписано незліченна безліч. При цьому кожен паралелепіпед може бути повністю визначений заданням номінальної точки  $\mathbf{X}_0 = [x_{0i}]_{1 \times n}$ , яка наперед лежить у шуканій області, і, в загальному випадку, набором значень нижніх  $\delta = [\delta_i]_{1 \times n}$  і верхніх  $\Omega = [\Omega_i]_{1 \times n}$  відхилень від їх номінальних значень, тобто вибраної технології. При цьому номінальна точка може лежати всередині або на границі поля допуску, і мають місце очевидні співвідношення

$$x_{i0} - \delta_i \leq x_{i0} \leq x_{i0} + \Omega_i, \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} \delta_{2i-1} = x_{i0} - [x_i] \\ \delta_{2i} = [x_i] - x_{i0}, \quad i = \overline{1, l} \end{cases} \quad (4.23)$$

4.5.2. Врахування техніко-економічних вимог. Далеко не кожен розв'язок сформульованої задачі може бути практично реалізований через різноманітні конструктивні, технологічні або економічні міркування. Ці міркування можуть бути аналітично сформульовані у вигляді деяких критеріїв оптимальності (цільових функцій) економічного, виробничого або іншого змісту. Обрані цільові функції мають містити в якості аргументів відхилення первинних факторів від їх номінальних значень

$$F_i = F_i(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n), \quad i = \overline{1, L}, \quad F \in \mathbf{R}^L, \quad \delta, \Omega \in \mathbf{R}^n. \quad (4.24)$$

Очевидно, що зі всіх вказаних раніше паралелепіпедів найбільш прийнятними для практичної реалізації в реальному об'єкті є ті, для яких такі критерії можуть бути оптимізовані.

Можливі різні критерії оптимізації допусків. Основним із них є мінімізована функція вартості. Неприйнятність такого критерію при розв'язанні

більшості практичних задач пояснюється тим, що для його запису необхідно попередньо встановлювати залежність вартості формування кожного із первинних факторів від можливих поточних значень допусків. Тоді в якості часткових критеріїв оптимальності, будемо розглядати допуски на значення первинних факторів, тобто задача мінімізації вартості замінюється рівнозначною задачею максимізації допусків

$$\max(\delta_i), \max(\Omega_i), \forall i = \overline{1, l}. \quad (4.25)$$

Отже, поставлена задача забезпечення заданого рівня якості (міцності як частинний випадок) МС була зведена до задачі багатокритеріальної (векторної) оптимізації, в якій вимагається визначити такі максимальні відхилення первинних факторів від заданих номінальних значень, при яких в області (4.17) виконується система обмежень (4.16).

4.5.3. Оптимізація допусків. Загальна методика проектувального розрахунку на міцність на основі розв'язання обернених задач синтезу. Сформулювавши техніко-економічні міркування у вигляді критеріїв оптимальності, в загальному випадку виду (4.25), ми прийшли до необхідності розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації за наявності обмежень (4.21).

Якщо  $\mathbf{X}_0$  лежить в центрі інтервалу допусків і  $\delta_i = \Omega_i, \forall i = \overline{1, l}$ , поставлена задача зводиться до задачі умовної багатокритеріальної оптимізації, в якій вимагається визначити такі допустимі максимальні відхилення  $\{\delta_i\}_{i=1}^n$  первинних факторів від номінальних значень, заданих вектором  $\mathbf{X}_0$ , щоб в отриманому паралелепіпеді

$$\mathbf{P}_l = \mathbf{X} = x_{i \times l} \in \mathbb{R}^l : x_{i0} - \delta_i < x_i \leq x_{i0} + \delta_i, i = \overline{1, l} \quad (4.26)$$

виконувалась система обмежень (4.15).

Відомо декілька різних підходів до розв'язання таких задач: введення узагальнюючого критерію, функціонально залежного від всіх часткових критеріїв [23]; багатокрокова оптимізація з окремими критеріями на кожному етапі при введенні обмежень на інші критерії [136]; оптимізація з одночасним врахуванням всієї безлічі критеріїв [168, 256, 282]. Будь-який з них може бути використаний в залежності від сутності розв'язуваної практичної задачі, виду цільових функцій тощо. Конкретний метод оптимізації також вибирається стосовно розв'язуваної задачі із числа відомих і достатньо детально розроблених алгоритмів. Ці питання не входять в область дослідження даної роботи. В ній при розв'язанні практичних задач було використано два методи.

1. Введення одного узагальнюючого критерію оптимальності, що отримується згортою часткових критеріїв (скаляризації), а задача умовної оптимізації зводилась до задачі безумовної оптимізації методом штрафних функцій. В якості методу однокритеріальної безумовної оптимізації був використаний адаптований алгоритм прямого пошуку [212, 220]. Розглянута задача оптимізації може бути розв'язана, наприклад, максимізуючи згортки

$$\begin{aligned} \max_{\{\delta_i\}_{i=1}^n} \left( \sum_{i=1}^n w_i \delta_i \right), \\ \min_i (w_i \delta_i) \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (4.27)$$

де  $\mathbf{W} = [w_i]_{1 \times l}$  – вектор вагових коефіцієнтів, отриманий будь-яким методом, наприклад методом парних порівнянь експертних оцінок.

Не обмежуючи сутності, можна відмітити, що всі алгоритми однокритеріальної безумовної оптимізації при наявності штрафів в цільовій функції зводяться до руху з обмеженим кроком від точки, яка свідомо лежить у шуканій області, за деяким оптимальним з погляду заданого критерію напрямом з постійною перевіркою виконання обмежень і визначень значень функції штрафу. Оскільки в розглянутій задачі аргументами цільової функції є відхилення первинних факторів від їх номінальних значень і перевірку обмежень (4.17) необхідно здійснювати в областях, визначених цими

відхиленнями і заданою номінальною точкою, то такі алгоритми зводяться до побудови областей в просторі первинних факторів, що оптимальним чином розширюються, в яких забезпечується виконання систем обмежень (4.16) і 4.17).

2. Унікаючи скаляризації (4.27), задачу оптимізації (4.25) можна звести до оптимізації цільової функції

$$\max_{\{\delta_i\}_{i=1}^n} \left( \prod_{i=1}^n \delta_i \right), \quad (4.28)$$

тоді критерієм оптимальності є максимальний об'єм паралелепіпеда, утвореного допусками.

Необхідно відзначити, що часто немалі труднощі при реалізації такого алгоритму викликає перевірка виконання обмежень (4.16), (4.17) у областях, побудова яких виконується на кожному кроці ітераційного процесу оптимізації. Для такої перевірки поки що не вдається відшукати універсальний прийом, однак можна привести деякі міркування з цього приводу. В тих випадках, коли частинні похідні по всіх координатах  $x_i$ ,  $i = \overline{1, l}$  правих частин (4.18) зберігають знак, достатньо перевірити виконання умов (4.21) у вершинах паралелепіпеду. Якщо ж ці похідні змінюють знаки, то слід спробувати розбити дані області на підобласті, в яких знаки похідних зберігаються. Однак це не завжди можливо здійснити. З цієї причини інколи зручніше залучити один із методів випадкової перевірки на множині рівномірно розподіленій в області послідовності точок, що використовують для своєї реалізації датчики випадкових чисел, з обчисленням значень правих частин (4.18) для кожного сполучення випадкових реалізацій первинних факторів.

У результаті проведених досліджень запропоновано загальну комплексну методику розв'язання задач міцності і динаміки МС у вигляді постановки і розв'язання ОЗ. У наступних розділах частково або повністю методика була застосована для різноманітних МС, при виробництві чи (або) експлуатації яких мали місце порушення їх вихідних параметрів, що супроводжувалось виходом з ладу або їх руйнуванням. Методика представлена на рис. 4.10 [68].



Рис. 4.10. Комплексна методика розв'язання оптимізаційних ОЗ синтезу конструкторських параметрів МС за критерієм міцності і віброактивності

Тут доцільно навести деякі міркування щодо можливості застосування інтервальної арифметики. Дійсно, той факт, що інтервальні обчислення дають можливість підрахувати допуски невідомих за відомими допусками коефіцієнтів системи рівнянь і вільних членів у лінійній задачі наводить на думку про перспективність такого методу. На перший погляд, може здатися, що головний недолік застосування інтервальної арифметики – занадто широкі інтервали шуканих величин – це добре. Насправді, природа виникнення допусків (похибок) у розв'язку рівняння (2.19) і допусків (4.22) різна. В



останньому виразі допуски, що максимізуються, характеризують допустимий розкид значень елементів вектора  $X$ . Натомість, ширина допустимих значень  $\Delta X$  у рівнянні (2.19) характеризує нестійкість розв'язку, і для підвищення ефективності і адекватності вибраної моделі цю ширину необхідно звужувати.

4.5.4. Синтез оптимальних конструкторських варіантів з урахуванням їх технологічності. Описані вище шляхи забезпечення якості об'єкта належать до ситуацій, коли базовий варіант об'єкта або заданий, або визначається однозначно, виходячи з матеріалів, деталей, вузлів, обладнання, що є у наявності, тощо. В таких випадках задача зводиться до визначення оптимальної технології виготовлення. Однак при проектуванні нових об'єктів часто є сенс проаналізувати ефективність різноманітних базових варіантів і вибрати з них оптимальний з погляду технології його виготовлення.

Міркування з вибору таких варіантів базуються на розгляді первинних факторів об'єкта як випадкових величин, що підпорядковуються в загальному випадку полімодальним законам розподілу. Дійсно, через різноманітні виробничі похибки первинні фактори мають певний розкид значень, що групуються в околі деяких точок. Іншими словами, як вказувалось вище, довільна вибірка цих значень розщеплюється на нормально розподілені підвибірки з різними математичними сподіваннями. Отже, з достатньою долею вірогідності можна вважати, що можливі номінальні значення кожного фактору вибираються з кінцевої множини вказаних математичних сподівань. Тому в якості номінальних рекомендується вибирати такі точки простору  $\mathbb{R}^l$ , в яких першою координатою є одне із значень математичних сподівань випадкової величини, яка описує розподіл першого первинного фактору, другою – другого і т. д. Комбінуючи значення математичних сподівань первинних факторів, ми отримуємо кінцевий набір номінальних точок. Розв'язання задачі оптимізації для кожної з визначених вказаним чином номінальних точок дає можливість встановити множину оптимальних областей в просторі первинних факторів.

Серед цих областей і вибирається оптимальна в сенсі визначених раніше критеріїв (4.25).

Таким чином може бути визначений відповідний заданому рівню якості (міцності, віброактивності тощо) базовий варіант МС, оптимальний з погляду технологічного виконання, тобто такий, що має оптимальну чутливість до варіації первинних факторів.

4.5.5. Структура інженерної методики оптимального забезпечення заданого рівня міцності механічних систем. Розглянутий підхід є природним відбиттям низки реальних ситуацій проектування, створення і експлуатації машин. Незважаючи на суттєві відмінності у фізичній суті причин і наслідків непрацездатності згадуваних у підрозділі 1.5 об'єктів, в роботі була поставлена в загальному вигляді і розв'язана задача забезпечення ТУ функціонування машин за рахунок синтезу області працездатності, завдяки чому стало можливим :

- ставити і розв'язувати задачу синтезу конструкторських варіантів, що мають оптимальну чутливість до виробничих і експлуатаційних відхилень їх первинних факторів, тобто пов'язати безпосередньо вибір базового варіанту вузла машини з особливостями його практичної реалізації;

- формалізувати значну кількість важливих різномірних задач проектування, конструювання, виробництва і випробувань машин незалежно від галузі призначення.

Проведені дослідження дають можливість реалізувати методику досягнення заданого рівня якості МС, виконуючи послідовно окремі її етапи.

#### *Етап 1. Постановка задач.*

Основною метою даного етапу є формулювання обмежень виду (4.15) або (4.16) на основні вихідні характеристики машини, що атестують якість її функціонування. Такими характеристиками можуть бути значення допустимих навантажень, напружень у матеріалі, амплітуди вібрацій і т. ін.

Для її досягнення на етапі проектування виходять з основних вимог до функціонального призначення машини, а при доведенні серійних виробів необхідний об'єктивний аналіз, класифікація і узагальнення причин, що приводять до відмов в умовах виробництва і (або) експлуатації. В результаті одержують умови працездатності машини у вигляді (4.15).

### *Етап 2. Побудова адекватних стійких математичних моделей*

Основною метою цього етапу є як побудова самої моделі (4.18), так і її уточнення за рахунок параметричної і статистичної ідентифікації, а також дослідження стійкості одержаних з її допомогою розв'язків.

Побудова моделі. В першу чергу необхідно на базі вивчення конструкції, технологічного процесу, досвіду серійного виробництва або побудови математичних моделей аналогічних об'єктів виділити ті первинні фактори, які головним чином визначають значення вихідних характеристик, що розглядаються. Це можна здійснити за допомогою методів параметричної чутливості, АПЕ та ін. Надалі в залежності від особливостей МС розробляється її математична модель (детермінована, стохастична або гібридна).

Уточнення моделі. На основі експериментальних досліджень на реальному об'єкті або його фізичній моделі необхідно уточнити параметри МС, які входять у її математичну модель.

В кожному конкретному випадку має розглядатись питання стійкості отриманих за допомогою моделі розв'язків ОЗ. Крім аналізу числа обумовленості, необхідно провести аналіз сингулярних чисел матриці дискретної лінійної ОЗ, спектральний аналіз матриці Фішера, а також обчислення похибок розв'язків.

### *Етап 3. Синтез оптимальних варіантів МС з врахуванням їх технологічності*

Цей етап передбачає вибір такого базового варіанта конструкції МС, при якому забезпечується її оптимальне технологічне виконання. Реалізація такого вибору вимагає виконання наступних процедур.

Врахування функціональних і параметричних обмежень. Тут необхідно записати функціональні і параметричні обмеження виду (4.21).

При цьому сформульовані в обмеження на вихідні характеристики МС записують з урахуванням уточнених за допомогою розроблених методів їх допустимих значень. Для первинних факторів з виробничих, фізичних та інших міркувань вказують найширші межі множини їх можливих значень.

Врахування техніко-економічних вимог. Метою цієї процедури є формулювання технологічних, конструктивних, економічних і т.п. вимог у вигляді критеріїв оптимальності. Одним із можливих варіантів служить вимога максимального розширення допусків на всі первинні фактори (4.25).

Вибір базових варіантів. Якщо базовий варіант об'єкта заданий або визначається однозначно, то слід перейти до реалізації етапу 4. В іншому випадку формування параметрів базових варіантів здійснюється у відповідності з вибором оптимального технологічного виконання кожного з базових варіантів.

Вибір оптимального технологічного виконання кожного з базових варіантів об'єкта. На цьому етапі розв'язується задача оптимізації допусків на первинні фактори, номінальні значення яких відповідають кожному з вибраних базових варіантів об'єкта.

Вибір оптимального базового варіанта. З множини побудованих областей значень первинних факторів вибирається оптимальна в сенсі критеріїв (4.25). Для цього можуть бути використані відомі методи умовної багатокритеріальної оптимізації типу (4.27) і (4.28).

*Етап 4. Перевірка можливості практичної реалізації базового варіанта.*

Якщо отриманий оптимальний базовий варіант машини може бути реалізований на базі існуючих матеріалів, обладнання, технології і т.п., то процес розв'язання задачі завершується. В іншому випадку слід допрацювати об'єкт і повернутись до етапу 3.

У підрозділах 4.6, 4.8 і 5.4 роботи показано застосування розробленої методології для забезпечення заданого рівня якості деяких реальних МС, характеристики якості яких формуються під впливом факторів механічної природи.

#### 4.6. Оптимізація допустимих значень фізико-механічних характеристик матеріалів і геометричних розмірів конструкції «керамічний резистор-компаунд»

Наступним етапом, згідно розробленої методики, є розв'язання оптимізаційної задачі синтезу області працездатності досліджуваної конструкції в просторі первинних факторів. Як вказувалось раніше, для забезпечення працездатності розглянутої конструкції «керамічний резистор-компаунд» необхідне виконання умов міцності в цих матеріалах. Найпростіше ця задача розв'язується при лінійному напруженому стані. Однак керамічні вироби, заполімеризовані компаундом, і сам компаунд перебувають у складному напруженому стані, тому висновок про їх міцність слід робити, використовуючи теорії або гіпотези міцності.

Враховуючи той факт, що компаунд і кераміка при низьких температурах ведуть себе як крихкі матеріали, за першою теорією міцності для внутрішнього і зовнішнього циліндрів умови міцності (4.1) запишуться відповідно у вигляді

$$\sigma_{екв1} = \frac{P_{1k} (R_1^2 + R_2^2)}{R_2^2 - R_1^2} \leq [\sigma_1], \quad \sigma_{екв2} = \frac{P_{1k} (R_2^2 + R_3^2)}{R_3^2 - R_2^2} \leq [\sigma_2], \quad (4.29)$$

де  $P_{ik}$  – контактний тиск, розрахований зі співвідношення (4.10);

$\sigma_{екв1}, \sigma_{екв2}$  – еквівалентні напруження в матеріалах внутрішнього і зовнішнього циліндрів відповідно;

$[\sigma_1], [\sigma_2]$  – допустимі значення напружень для кераміки і компаунду відповідно.

Допустимі напруження  $[\sigma_1], [\sigma_2]$  знаходяться, виходячи із отриманих експериментально граничних напружень  $\sigma_g$  з урахуванням коефіцієнта запасу міцності  $n=2$

$$[\sigma_1] = \sigma_{g1}/n, \quad [\sigma_2] = \sigma_{g2}/n. \quad (4.30)$$

Враховуючи співвідношення (4.29) і (4.30), обмеження типу (4.15) на вихідні характеристики конструкції мають вигляд

$$\begin{cases} \sigma_{екв1} \leq 34,36 \text{ МПа,} \\ \sigma_{екв2} \leq 54,00 \text{ МПа.} \end{cases} \quad (4.31),$$

Крім того, виходячи із ТУ, можна записати обмеження на первинні фактори моделі у вигляді системи нерівностей виду (4.17), вихідні дані для якої подані у таблиці 4.9.

Далі був проведений наступний чисельний експеримент. Перебором  $10^5$  значень  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  в інтервалах, вказаних у табл. 4.9, в результаті підстановки (4.10) у (4.31) були одержані розрахункові значення максимальних експлуатаційних напружень  $\sigma_{екв1}$  для кераміки виробів. Нормалізована гістограма розподілу максимальних експлуатаційних напружень і допустимих напружень для кераміки виробів представлена на рис. 4.11.

Таблиця 4.9

## Обмеження на первинні фактори моделі

| Значення параметрів | КЛТР  |   | Коефіцієнти Пуассона |         | Модулі пружності       |                        | Геометричні розміри конструкції |                         |                         |
|---------------------|---|---|----------------------|---------|------------------------|------------------------|---------------------------------|-------------------------|-------------------------|
|                     | $\alpha_1 \cdot 10^{-6}$ , град <sup>-1</sup> | $\alpha_2 \cdot 10^{-6}$ , град <sup>-1</sup> | $\mu_1$              | $\mu_2$ | $E_1 \cdot 10^5$ , МПа | $E_2 \cdot 10^5$ , МПа | $R_1 \cdot 10^{-3}$ , м         | $R_2 \cdot 10^{-3}$ , м | $R_3 \cdot 10^{-3}$ , м |
| min                 | 4   | 35  | 0,25                 | 0,31    | 1                      | 0,05                   | 0,19                            | 0,74                    | 1,1                     |
| max                 | 8   | 45  | 0,35                 | 0,35    | 1,5                    | 0,15                   | 0,21                            | 0,76                    | 2                       |

З рис. 4.11 видно, що існуючі допуски на параметри конструкції, представлені в таблиці 4.9, а саме геометричні розміри і ФМХ матеріалів, не можуть гарантувати міцність конструкції кераміка-композит, отже допуски на первинні параметри, задані у ТУ, є не обґрунтованими. Дійсно, багаторазове моделювання розв'язку прямої задачі показало, що при таких допусках у

кераміці будуть виникати напруження  $\sigma_{екв1}=7,5\dots73$  МПа, хоча допустимими є лише напруження  $\sigma_{екв1}<34,36$  МПа.

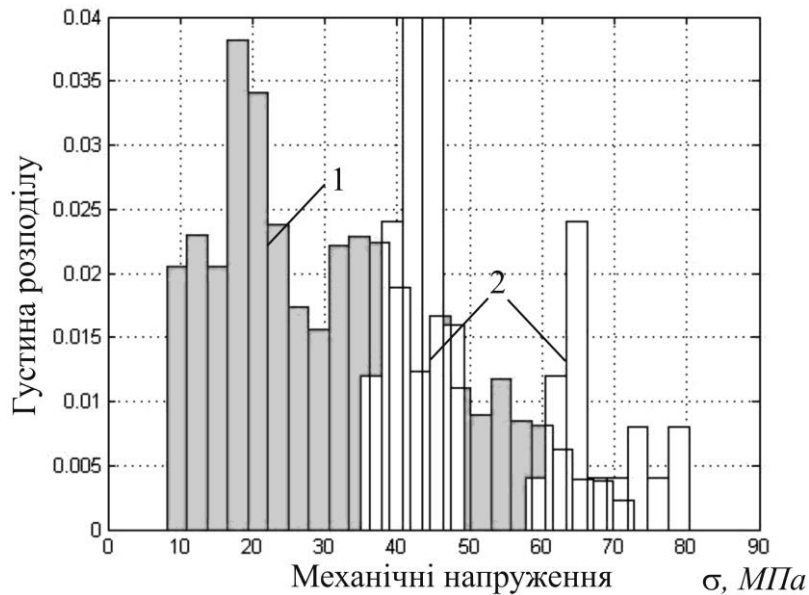


Рис. 4.11. Щільність розподілу імовірностей максимальних напружень для кераміки виробів:  
 1 – експлуатаційних напружень;  
 2 – допустимих напружень.

Одним із методів розв’язання оптимізаційних ОЗ синтезу допусків, що гарантують міцність конструкції, може бути перебір достатньо великої кількості значень  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  в інтервалах з таблиці 4.9 і відбір лише такої множини їх значень, яка б гарантувала, що криві розподілу максимальних експлуатаційних і допустимих напружень не перетнуться. На рис. 4.12 представлений розподіл експлуатаційних напружень, що не перевищують допустимі.

Такий спосіб оптимізації допусків був реалізований за допомогою пакету прикладних програм MATLAB, відповідні програми реалізації наведені у додатку Б.2. Програма перебирає з певним кроком значення кожного із первинних параметрів, взяті з допусками, за формулами (4.9) і (4.29) розраховуються

максимальні експлуатаційні напруження, і якщо вони не перевищують допустимі (4.31), формується масив даних векторів цих вхідних параметрів.

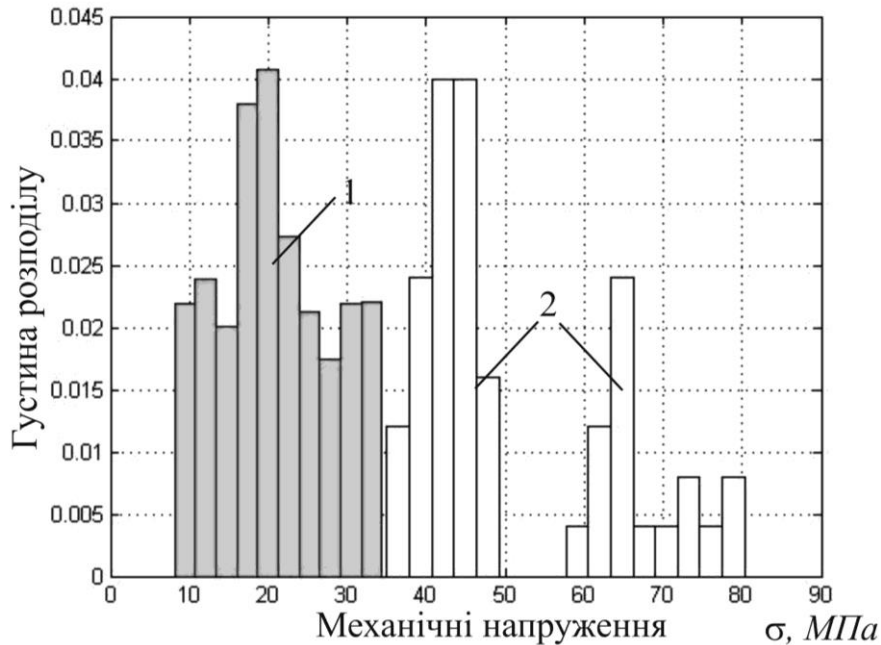


Рис. 4.12. Щільність розподілу максимальних напружень для кераміки, що гарантує виконання умов міцності (4.31):

- 1 – експлуатаційних напружень;
- 2 – допустимих напружень.

Одним із шляхів розрахунку допустимих значень розкиду геометричних розмірів і ФМХ, за яких виконується умова міцності (4.31) є наступний.

При постійній по радіусу температурі контактний тиск, а отже і  $\sigma_{екв}$  є скалярною функцією векторного аргументу  $\sigma_{екв1} = \sigma_{екв1}(\mathbf{X})$ ,  $\sigma_{екв2} = \sigma_{екв2}(\mathbf{X})$ , де  $\mathbf{X} = [\alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2, E_1, E_2, R_1, R_2, R_3]$ . Далі порівнюється значення  $\sigma_{екв1}$  і  $\sigma_{екв2}$  в точці  $\mathbf{X}_0 = [\alpha_{10}, \alpha_{20}, \mu_{10}, \mu_{20}, E_{10}, E_{20}, R_{10}, R_{20}, R_{30}]$ , координатами якої є номінальні значення відповідних параметрів, з допустимим контактним тиском  $[\sigma_1]$  і  $[\sigma_2]$ . У випадку, коли  $\sigma_{екв}(\mathbf{X}) > [\sigma]$ , можна відразу зробити висновок про недопустимість сумісного використання матеріалів кераміки і герметуку.



В іншому випадку поставлена задача може бути сформульована наступним чином. Необхідно визначити точку  $\mathbf{X}^*$ , в якій виконуються умови

$$\begin{cases} \sigma(\mathbf{X}_0) < \sigma(\mathbf{X}^*) \\ \sigma(\mathbf{X}^*) < [\sigma] \end{cases}$$

Для розв'язання цієї задачі необхідно дослідити поведінку функції  $\sigma(\mathbf{X})$  при зміні її значень від  $\sigma(\mathbf{X}_0)$  до  $[\sigma]$ . Аналіз показав, що в області зміни векторного аргументу  $\mathbf{X}$  градієнт функції  $\sigma(\mathbf{X})$  не змінює знаку, тобто сама функція не має екстремальних точок.

Введемо нове невідоме  $\lambda$ , виражене у відносних одиницях або у відсотках допустиме відхилення ФМХ матеріалів і геометричних розмірів виробу від номінальних значень. З його допомогою шукану точку  $\mathbf{X}^*$  можна знайти за формулою  $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}_0 + \text{sign}[\text{grad}(\sigma(\mathbf{X}_0))] \cdot \lambda \cdot \mathbf{X}_0$ . Враховуюче це співвідношення, отримаємо алгебраїчне рівняння з одним невідомим для визначення параметра

$$\sigma(\mathbf{X}_0 + \text{sign}[\text{grad}(\sigma(\mathbf{X}_0))] \cdot \lambda \cdot \mathbf{X}_0) = [\sigma]. \quad (4.32)$$

Для розв'язання цього рівняння можна використовувати ітераційний метод Ньютона-Рафсона, суть якого полягає у визначенні  $n$ -го наближення невідомого за формулою  $\lambda_{n+1} = \lambda_n - f(\lambda_n)/f'(\lambda_n)$ , де  $f(\lambda_n)$  – ліва частина рівняння (4.32).

Знайдена точка  $\mathbf{X}^*$  дає можливість записати допустимі значення розкиду ФМХ, за яких виконується умова міцності.

Більш загальною задачею призначення обґрунтованих допусків на ФМХ матеріалів керамічного виробу і компаунда і геометричні розміри

досліджуваної конструкції може бути сформульована згідно розробленого у підрозділі 4.4 підходу наступним чином.

Для визначення області працездатності досліджуваної конструкції при заданих номінальних значеннях первинних факторів  $\mathbf{X}_0 = [\alpha_{10}, \alpha_{20}, \mu_{10}, \mu_{20}, E_{10}, E_{20}, R_{10}, R_{20}, R_{30}]$  необхідно визначити такі допустимі відхилення  $\delta_i, i = \overline{1,9}$  факторів від номінальних значень, щоб у отриманому паралелепіпеді  $\mathbf{P}_9 = \{ \mathbf{X} = [x_i]_{1 \times 9} \in \mathbb{R}^9 : x_{i0} - \delta_i < x_i \leq x_{i0} + \delta_i, i = \overline{1,9} \}$  було забезпечено виконання умов (4.31).

Розв'язання задачі у наведеній постановці означає вписування у криволінійну область, задану нерівностями (4.31), паралелепіпеду. Але таких паралелепіпедів може бути вписано нескінченно багато. Для вибору конкретного паралелепіпеду необхідно накласти додаткову умову, для чого згідно розробленого підходу пропонується ввести критерій оптимальності або економічного, або виробничого, або будь-якого іншого змісту. Призначення критерію оптимальності дозволяє звести задачу визначення допусків до задачі оптимізації вибраної цільової функції при обмеженнях.

Оскільки, виходячи з міркувань економії, допуски на всі параметри бажано максимально розширити, то розглянута задача є багатокритеріальною [290, 314], а множина частинних критеріїв може бути сформульована у вигляді (4.25).

Таблиця 4.10.

Номінальні значення первинних факторів конструкції «кераміка-компаунд»

| КЛТР  |   | Коефіцієнти Пуассона |            | Модулі пружності             |                              | Геометричні розміри конструкції |                               |                               |
|---|---|----------------------|------------|------------------------------|------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $\alpha_{10} \cdot 10^{-6}$ ,<br>град <sup>-1</sup> | $\alpha_{20} \cdot 10^{-6}$ ,<br>град <sup>-1</sup> | $\mu_{10}$           | $\mu_{20}$ | $E_{10} \cdot 10^5$ ,<br>МПа | $E_{20} \cdot 10^5$ ,<br>МПа | $R_{10} \cdot 10^{-3}$ ,<br>м   | $R_{20} \cdot 10^{-3}$ ,<br>м | $R_{30} \cdot 10^{-3}$ ,<br>м |
| 6   | 40  | 0,292                | 0,330      | 1,31                         | 0,10                         | 0,20                            | 0,75                          | 1,55                          |

Для зведення даної багатокритеріальної задачі до однокритеріальної були використані лінійні згортки критеріїв виду  $\tilde{F}_1 = \sum_{i=1}^9 w_i \delta_i$  і  $\tilde{F}_2 = \min_i (w_i \delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$  [5, 313], де  $w_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^9 w_i = 1$  – нормовані додатні числа, що визначаються із виробничих або економічних міркувань (вагові коефіцієнти).

На початку значення вагових коефіцієнтів  $w_i$  встановлювались експертним шляхом за допомогою опитування експертів з виробництва досліджуваних конструкцій, і виявились наступними

$$W_1 = \{0,17; 0,17; 0,04; 0,04; 0,08; 0,08; 0,14; 0,14; 0,14\}.$$

Однак у роботах [180, 300] показано, що різні способи згортки критеріїв можуть приводити до результатів, які суттєво різняться, що свідчить про визначальне значення етапу формування глобального критерію при розв'язанні багатокритеріальних задач.

При розв'язанні задач багатокритеріального оцінювання і оптимізації необхідно враховувати нерівнозначність частинних критеріїв якості. У випадку великої кількості критеріїв задача безпосереднього визначення рангів критеріїв виявляється достатньо важкою і навіть такою, що немає розв'язку для експертів внаслідок обмеженості психіко-фізіологічних можливостей людини.

Однак при порівнянні двох альтернатив експерт зазвичай здатен адекватно визначити, в якій з них розглянута ознака (важливість) виражена сильніше, а також якісно (вербально) оцінити, на скільки значною є різниця між ознаками, що спостерігаються у двох альтернатив.

Тому у роботі пропонується визначати значимість рангів частинних критеріїв на основі їх попарного порівняння, причому використано апарат нечіткої логіки і проведено порівняння за допомогою шкали лінгвістичних оцінок (додаток Б.3).

У результаті проведених обчислень за допомогою шкали лінгвістичних оцінок думок експертів отримано наступний набір вагових коефіцієнтів

$$\mathbf{W}_2 = \{0,15; 0,15; 0,04; 0,04; 0,08; 0,08; 0,15; 0,15; 0,15\}.$$

В подальшому задача синтезу допусків зводиться до визначення таких значень  $\delta_i$ ,  $i = \overline{1,9}$ , за яких досягається максимум однієї із цільових функцій  $\tilde{F}_1$ ,  $\tilde{F}_2$ , а також  $\tilde{F}_3 = \prod_{i=1}^9 \delta_i$ , що відповідає максимізації паралелепіпеду допусків, за умови виконання обмежень (4.32 і табл. 4.9) при перепаді температури від  $-60^\circ\text{C}$  до  $+70^\circ\text{C}$ .

Перевірка виконання цих обмежень на кожному кроці оптимізаційного процесу відбувалась у вершинах побудованих паралелепіпедів, оскільки частинні похідні еквівалентних напружень по кожному із первинних факторів зберігають знаки. Реалізація оптимізаційного процесу відбувалась у математичному пакеті MATLAB і представлена в додатку Б.4. Для оптимізації використано метод послідовного квадратичного програмування (SQP). В цьому методі на кожній ітерації розв'язується підзадача квадратичного програмування (QP). Вигляд матриці Гессе для функції Лагранжа оновлюється на кожній ітерації за допомогою формули BFGS [288]. Лінійний пошук відбувається за допомогою функції корисності.

Для конструкції керамічного виробу, герметизованого компаундом ЭЗК-25, було визначено допуски на ФМХ матеріалів резистора і компаунда, а також геометричні розміри конструкції, номінальні значення яких наведені у таблиці 4.9.

Отримані в результаті максимізації цільових функцій  $\tilde{F}_1$ ,  $\tilde{F}_2$  і  $\tilde{F}_3$  значення допусків дали змогу визначити такі значення ФМХ матеріалів компаунда і резистора, а також геометричних розмірів конструкції, при яких виконуються умови міцності резистора і компаунда. Ці значення первинних факторів, отримані при різних наборах значень коефіцієнтів  $w_i$ , наведені у таблиці 4.11.

Таблиця 4.11

Порівняльні результати векторної оптимізації параметрів різними методами

| Первинні фактори                        | Критерій оптимальності   |        |  |        |   |       |
|---|--|--------|--|--------|---|-------|
|   | $\max_{\{\delta_i\}_{i=1}^9} \left( \sum_{i=1}^9 w_i \delta_i \right)$ |        | $\max_{\{\delta_i\}_{i=1}^9} \left( \min_i (w_i \delta_i) \right)$ |        | $\max_{\{\delta_i\}_{i=1}^9} \left( \prod_{i=1}^9 \delta_i \right)$ |       |
|   | Нижня і верхня границя множини значень                                 |        |  |        |   |       |
| $\alpha_1 \cdot 10^6, \text{град}^{-1}$ | 5,394  | 6,599  | 5,094  | 6,906  | 5,395   | 6,405 |
| $\alpha_2 \cdot 10^6, \text{град}^{-1}$ | 38,173   | 41,885 | 36,135   | 43,865 | 39,996  | 41,01 |
| $\mu_1$                                 | 0,242  | 0,342  | 0,242  | 0,342  | 0,242   | 0,302 |
| $\mu_2$                                 | 0,310  | 0,345  | 0,31   | 0,350  | 0,330   | 0,334 |
| $E_1 \cdot 10^5, \text{МПа}$            | 1,060  | 1,559  | 1,060  | 1,559  | 1,100   | 1,310 |
| $E_2 \cdot 10^5, \text{МПа}$            | 0,050  | 0,149  | 0,050  | 0,150  | 0,091   | 0,100 |
| $R_1 \cdot 10^{-3}, \text{м}$           | 0,196  | 0,204  | 0,191  | 0,209  | 0,199   | 0,202 |
| $R_2 \cdot 10^{-3}, \text{м}$           | 0,746  | 0,755  | 0,741  | 0,759  | 0,740   | 0,752 |
| $R_3 \cdot 10^{-3}, \text{м}$           | 1,528  | 1,987  | 1,101  | 1,999  | 1,549   | 1,641 |

Причому, в одному випадку значення  $w_i$  були встановлені опитуванням експертів ( $\mathbf{W}_1$ ), в іншому – за допомогою шкали лінгвістичних оцінок думок експертів ( $\mathbf{W}_2$ ), а в третьому – всі  $w_i$  приймалися однаковими і такими, що дорівнюють  $1/9$  для дослідження випадку, коли всі частинні критерії рівнозначні.

Оскільки у всіх методах оптимізації отримані близькі результати, можна зробити висновок про правомірність застосування скаляризації для розв'язання задачі векторної оптимізації.

Таким чином, були визначені допуски на ФМХ матеріалів і геометричні розміри осесиметричної конструкції «керамічний резистор-компаунд», які гарантують міцність елементів конструкції. Обчислення виконувались в пакеті прикладних програм MATLAB. Програми і функції для реалізації

оптимізаційної задачі синтезу допусків на ФМХ і геометричні розміри конструкції представлені в додатку Б 4.

Розроблені методи оптимізації допусків дозволяють вказати обґрунтовані допуски на первинні параметри моделі. На практиці це означає, що ідентифікувавши ФМХ партій керамічних виробів і компаундів, необхідно відібрати такі з них, ФМХ яких знаходяться у паралелепіпеді (4.26). Таким чином можна гарантовано забезпечити міцність конструкції герметизований елемент-компаунд [78, 188, 268, 269, 271].

Враховуючи, що ФМХ компаунду та інших специфічних матеріалів можуть мати значний розкид від партії до партії, в технологічному ланцюгу виробництва досліджуваних конструкцій має бути додана ще одна ланка, за допомогою якої визначають реальні ФМХ матеріалів.

Але постає питання, що робити з рештою партій, ФМХ яких знаходяться поза паралелепіпедом (4.26), тобто не увійшли у встановлені допуски? З метою підвищення економічної ефективності можна запропонувати наступні рекомендації.

Необхідно забезпечити селективне складання вузлів, яке полягає у наступному. Для зменшення витрат і збільшення економічної вигоди рекомендується вибирати партії матеріалів так, щоб гістограми розподілу максимальних експлуатаційних напружень і допустимих напружень не перетинались, але були як найближче одна до одної. Оскільки кожна конкретна модель дає власні розрахункові експлуатаційні напруження, то за ними можна підібрати відповідну до моделі партію матеріалів.

Для перевірки одержаних результатів за допомогою чисельного моделювання прямої задачі були одержані значення напружень кераміки і компаунда конструкції при допусках, взятих з ТУ (таблиця 4.9), і оптимізованих допусках, наведених у таблиці 4.13. На рис. 4.13 проілюстровані відповідні інтервали значень напружень.

Тут [12,8, 61,6] МПа – інтервал напружень кераміки, а [21,1, 80,7] МПа – інтервал напружень компаунда при значеннях первинних факторів

$X = [\alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2, E_1, E_2, R_1, R_2, R_3]$ , взятих з ТУ, а  $[28,2, 34,3]$  МПа – інтервал напружень кераміки, а  $[39,9, 54,0]$  МПа – інтервал напружень компаунда, одержані в результаті оптимізації допусків на первинні параметри. Програма для моделювання розв’язків прямої задачі розрахунку напружень в кераміці і компаунді в задачі забезпечення міцності конструкції «керамічний резистор-компаунд» представлені в додатку Б.5.

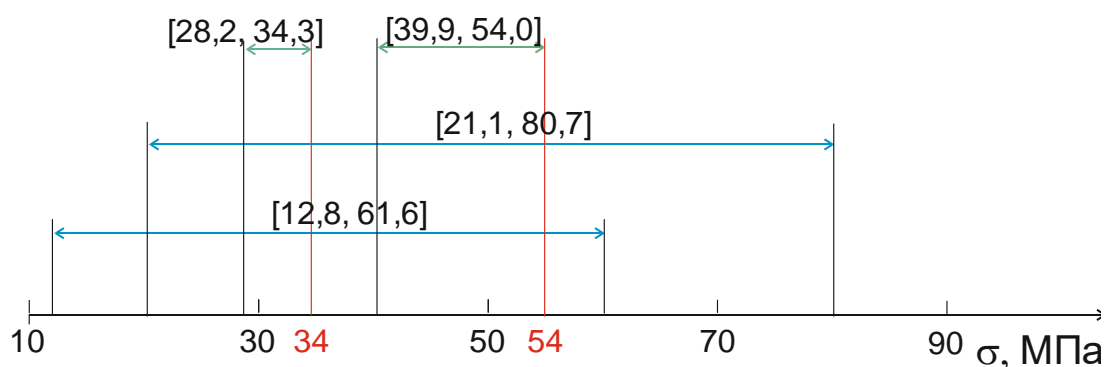


Рис. 4.13. Інтервали значень напружень кераміки і компаунда до і після оптимізації

Необхідно зауважити, що якщо б коефіцієнти в моделі (4.10) не уточнювалися за допомогою статистичної обробки полімодальних вимірних даних і ідентифікації ФМХ, то в результаті оптимізації допусків були б отримані хибні значення.

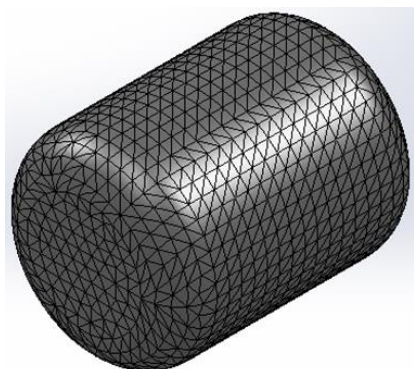


Рис. 4.14. Кінцево-елементна модель компаундованого керамічного елемента

В результаті комп’ютерного моделювання деформацій і напружень, що виникають у конструкціях «керамічний елемент-компаунд» з оптимальними параметрами у розглянутих межах температур, проведеного за допомогою скінченно-елементної моделі (рис. 4.14), отримано достатньо близькі результати (4.15). Похибка між змодельованими максимальними напруженнями кераміки і розрахованими у прямій задачі склала 8%, що є допустимим.

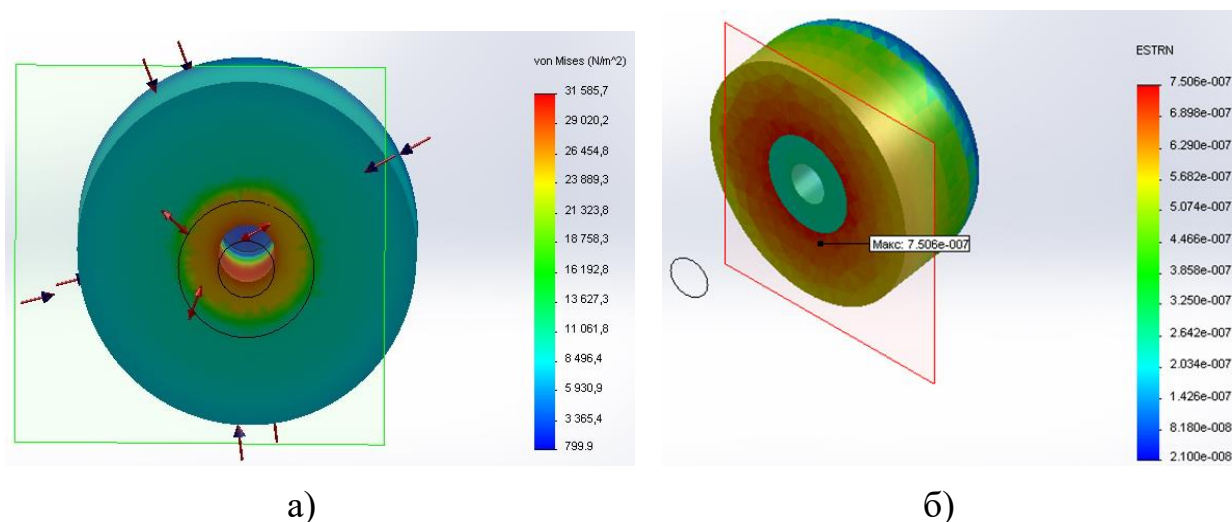


Рис. 4.15. Результати моделювання напруженого стану у перерізі конструкції

- а) – розподіл максимальних напружень;  
 б) – деформації у елементах конструкції.

#### 4.7. Конструкторсько-технологічні шляхи забезпечення міцності конструкції «керамічний резистор-компунд»

Проведені дослідження міцнісних властивостей конструкції у складі ММ дали можливість запропонувати підприємству-виробнику наступні шляхи забезпечення міцності і герметичності.

1. Організація вхідного контролю з метою підбору працездатних пар із тих, що є у наявності, на основі отриманих умов міцності. При цьому контроль відповідних характеристик проводиться за їх імовірнісними оцінками, отриманими на основі випадкових вибірок значень, оброблених за допомогою методики, описаної у підрозділі 4.4.

2. У випадку неможливості або недоцільності введення вхідного контролю або відсутності працездатних пар був запропонований конструкторський захист керамічних виробів від дії компаунда за допомогою термоусадкових трубок (ДМГТ.975.016.ТУ). Ефективність застосування вказаних трубок, які одягаються на вироби, пояснюється наступними обставинами. По-перше, наявність вільного простору між виробом і трубкою, допускає більш вільну деформацію виробу, чим обумовлюється зниження



величин напружень в кераміці. По-друге, використання трубки приводить до усунення адгезійних зв'язків між виробом і компаундом, що викликає зменшення напружень у конструкції, що розглядається.

Для перевірки об'єктивності захисту виробів термоусадковими трубками був проведений наступний експеримент. Вироби (резистори типу ОМЛТ-0,125), що були взяті з однієї партії після підготовки їх до монтажу, препарувались тензодатчиками типу МПБ-1 за схемою, наведеною на рис. 4.6 і 4.16. На частину таких виробів до їх монтажу на плати одягались термоусадкові трубки. Далі мікромодулі зі всіма препаративними резисторами, частина з яких була захищена вказаним чином, герметизувалась компаундом ЭЗК-25. Під час полімеризації компаунда і при проведенні термоударів проводилась реєстрація показів тензорезисторів.

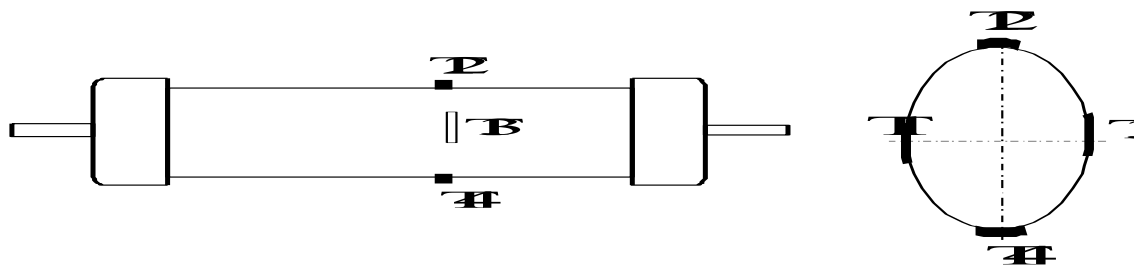


Рис. 4.16. Схема препарування виробів тензодатчиками T1, T2, T3, T4

Після статистичної обробки результатів дослідження було встановлено, що амплітудні значення деформацій виробів, захищених трубками, майже вдвічі менше, ніж у серійних, що свідчить про ефективність запропонованих заходів.

Приведені вище конструкторсько-технологічні заходи були впроваджені на ВО «Новатор», м. Хмельницький.

Завдяки розв'язанню оптимізаційних ОЗ міцності шляхом пошуку оптимальних значень конструкторських параметрів було забезпечено міцність і інших компаундованих конструкцій – дискових конденсаторів [124]. Крім того, для контролю міцності цих конструкцій і прогнозування руйнування в процесі експлуатації був розроблений акустико-емісійний метод, що реалізується за допомогою акустико-емісійного комплексу.

#### 4.8. Забезпечення міцності дискових керамічних конденсаторів

Суть проблеми міцності конструкції «керамічний конденсатор-компанунд» викладена у підрозділі 1.3. Розв'язати поставлену ОЗ означає визначити оптимальні області значень ФМХ матеріалів і геометричних розмірів сполучених елементів, що гарантує для кераміки конденсаторів виконання умови (4.15) у вигляді

$$\sigma_{екв1} \leq [\sigma_1]. \quad (4.33)$$

Для забезпечення міцності кераміки можна йти різними шляхами. По-перше, враховуючи, що міцність кераміки на стиск приблизно в 10 разів вище міцності на розтяг, слід спробувати підбором режиму спікання і відпалювання створити попередньо напружену (стиснуту) кераміку, щоб розтягувальна дія компанунда при зміні температури приводила лише до зниження стискуючих напружень. По-друге, можна випробувати захисні плівки, що не адгезують або слабо адгезують з керамікою, але адгезують з компанундом. По-третє, слід йти шляхом підбору таких компанундів, які мали б по можливості меншу відмінність в КЛТР від кераміки, малу адгезію, але в той же час були б достатньо еластичними і не руйнувались самі при стискуванні в процесі охолодження. Для реалізації перших двох варіантів необхідні суттєві доробки технологічних процесів виготовлення і герметизації конденсаторів. Найтехнологічнішим видається третій шлях.

Для забезпечення міцності кераміки конденсаторів, виходячи із висловлених у [78] та в додатку Б.6 гіпотез руйнування, необхідно знайти компанунд з ФМХ, близькими до відповідних характеристик кераміки. Близькість характеристик означає, що номінальні значення первинних факторів, що визначають властивості компанунда  $\alpha_2, E_2, \mu_2$  доцільно вибирати такими, що співпадають зі значеннями кераміки  $\alpha_1, E_1, \mu_1$  (таблиця 4.12), де  $H$  і

$h$  – товщина конденсатора і компаунда відповідно. Тоді в номінальній точці гарантовано виконання умов (4.33).

Таблиця 4.12.

Значення первинних факторів конструкції конденсатор-компаунд

| Кераміка   |                              |         |                          |                            | Компаунд   |                              |         |                          |                            |
|--|------------------------------|---------|--------------------------|----------------------------|--|------------------------------|---------|--------------------------|----------------------------|
| $\alpha_1 \cdot 10^{-6}$ ,<br>град <sup>-1</sup> | $E_1 \cdot 10^{-5}$ ,<br>МПа | $\mu_1$ | $H \cdot 10^{-2}$ ,<br>м | $R_1 \cdot 10^{-2}$ ,<br>м | $\alpha_2 \cdot 10^{-6}$ ,<br>град <sup>-1</sup> | $E_2 \cdot 10^{-5}$ ,<br>МПа | $\mu_2$ | $h \cdot 10^{-2}$ ,<br>м | $R_1 \cdot 10^{-2}$ ,<br>м |
| 11   | 1,13                         | 0,31    | 0,52                     | 1,575                      | 35   | 0,092                        | 0,34    | 0,1                      | 1,575                      |

Для того, щоб знайти максимальну кількість типів компаунду із вказаними властивостями, в якості критеріїв оптимальності природно прийняти функції виду (4.25), з яких утворюється лінійна згортка виду (4.27) для  $n=5$ .

Виходячи з апіорної оцінки ступеня впливу вказаних первинних факторів на величини напружень і контактного навантаження, коефіцієнти при допусках у згортці були наступними: при допуску на  $\alpha_2 - w_1=0,6$ , на  $E_2 - w_2=0,25$ , на  $\mu_2 - w_3=0,15$ .

Обмеження на первинні фактори і параметри моделі, описаної у додатку Б.6, представлені в таблиці 4.13, причому останнє обмеження взято з ТУ на конструкцію герметизованого конденсатора. В якості  $[\sigma_1]$  взято значення 17 МПа. Перевірка виконання обмежень (Б.18) на кожному кроці оптимізаційного процесу проводилась у вершинах паралелепіпедів.

Таблиця 4.13

Обмеження на первинні параметри моделі конструкції керамічного конденсатора К15-5 (закордонний аналог СТ81)

| Значення параметрів | $\alpha_2 \cdot 10^{-6}$ , град <sup>-1</sup> | $E_2 \cdot 10^5$ , МПа | $\mu_2$ | $h \cdot 10^{-3}$ , м |
|---------------------|---|------------------------|---------|-----------------------|
| min                 | 11  | 0,045                  | 0,31    | 1,0                   |
| max                 | 100   | 1,13                   | 0,4     | 1,1                   |

Розв'язок задачі оптимізації, отриманий у результаті розрахунку в пакеті MATLAB, показав, що отримана область значень ФМХ настільки мала, що в ній не міститься жодної точки, що відповідає компаундам, які на сьогодні застосовуються. Тому було прийнято рішення розглянути більш міцну кераміку з  $[\sigma_1]=30$  МПа, а номінальне значення модуля пружності компаунда вибрати таким, що дорівнює значенню для компаунда ЭК-242. Тоді обмеження на значення цього параметра мають вигляд  $0,08 \cdot 10^5 \leq E \leq 0,092 \cdot 10^5$ , МПа. При цьому розширення області від номінальної точки передбачалось лише в сторону зменшення модуля пружності, оскільки при цьому зменшуються значення напружень у кераміці. Отже, пропонувався пошук більш еластичних компаундів.

Результати розв'язання задачі оптимізації допусків представлені в таблиці 4.14.

Таблиця 4.14

Оптимальні значення первинних параметрів моделі конструкції керамічного конденсатора К15-5 (закордонний аналог СТ81)

| Значення параметрів | $\alpha_2 \cdot 10^{-6}$ , град <sup>-1</sup> | $E_2 \cdot 10^5$ , МПа | $\mu_2$ |
|---------------------|---|------------------------|---------|
| min                 | 11  | 0,091                  | 0,31    |
| max                 | 28  | 0,092                  | 0,4     |

Аналіз результатів розв'язання показав, що серед компаундів, що використовувались до тепер, відсутній представник з ФМХ, що задовольняють умови таблиці 4.16. Тому підприємству-виробнику було рекомендовано відмовитись від модифікацій відомих типів компаундів і зайнятись розробкою компаундів з принципово новими властивостями.

Через те, що на сьогодні велика кількість конденсаторів типу К15-5 експлуатуються у різноманітних дороговартісних відповідальних за безпеку системах літаків, відмова конденсаторів через розгерметизацію їх конструкції може привести до відмови цілого вузла і, як наслідок, аварії літака. В цій

ситуації важливо, не відмовляючись від використання цих конденсаторів, не допустити їх руйнування в процесі експлуатації. У зв'язку із наведеним була поставлена задача створення методу завчасного попередження про можливість їх руйнування. І в цій ситуації був запропонований і реалізований метод і засіб неруйнівного контролю, діагностування і прогнозування міцності конденсаторів методом акустичної емісії (АЕ), який попереджає про можливість розгерметизації конденсаторів. За допомогою шестиканальної станції АЕ, описаної у роботі [187], і з застосуванням хвилеводу були проведені випробування конденсаторів на міцність при термоциклюванні. Конденсатори поміщали у вакуумну камеру і проводили термоциклювання при температурах від  $-50^{\circ}\text{C}$  до  $+70^{\circ}\text{C}$  з одночасним записом сигналів АЕ.

Встановлено, що ефект Кайзера, тобто відсутність сигналів АЕ після перших двох термоударів, свідчить про нормальний стан міцності конструкції, а після появи стійкої АЕ конденсатори витримують додатково ще 8-10 циклів до руйнування конструкції. На основі аналізу отриманих результатів запропоновано спосіб неруйнівного діагностування та контролю міцності і попередження небезпечних станів конструкції керамічних конденсаторів К 15-5, які працюють в умовах термоциклювання від  $-50^{\circ}\text{C}$  до  $+70^{\circ}\text{C}$ :

- прояв ефекту Кайзера, тобто відсутність сигналів АЕ після перших двох термоударів свідчить про нормальний стан міцності конструкції;
- якщо на  $n$ -му термоциклі знову з'являються сигнали АЕ, співмірні з сигналами, отриманими при першому циклі, то це є попередженням про початок процесу катастрофічного руйнування і така конструкція буде зруйнована через 8-10 циклів;
- якщо при підвищенні температури від  $-50^{\circ}\text{C}$  до  $-10^{\circ}\text{C}$  з'являються сплески сигналів АЕ, то це свідчить про наявність і розвиток тріщини в конструкції.

В останніх двох випадках конструкція визнається дефектною. Був створений портативний прилад, який при появі АЕ вище граничного рівня сигналізував, що до руйнування конденсатора залишається ще 8-10 циклів (8-10

зльотів і посадок), тобто поява в кабіні пілота сигналу з цього приладу дає змогу долетіти до місця базування і після посадки звернутись до технічної служби про заміну конденсатора (вузла).

#### 4.9. Висновки до розділу

1. Розроблено розрахунково-експериментальний метод і засіб визначення ФМХ, що мають значний розкид у широкому діапазоні температур. Він відрізняється тим, що досліджуваний зразок матеріалу в сполученні з зразком із пробного матеріалу нагрівають (охолоджують) з одночасною реєстрацією виниклих деформацій, за значеннями яких з використанням статистичних методів регуляризації потім обчислюють контактні тиски і шукані характеристики, що дозволяє визначати ФМХ за від'ємних температур в пружно деформованому стані, максимально наближеному до експлуатаційного. За допомогою методу знайдено значення модуля пружності, коефіцієнта Пуассона і коефіцієнта лінійного температурного розширення компаунду ЕЗК-25 при температурах від  $-60^{\circ}\text{C}$  до  $-20^{\circ}\text{C}$ , що увійшли до створеної моделі як її ідентифіковані (уточнені) параметри.

2. Обґрунтований вибір і створено математичну модель взаємодії кераміки з компаундом у складі ММ і виявлені первинні фактори механічної природи, що впливають на величину виниклих у матеріалах механічних напружень і спричиняють руйнування конструкції.

3. З використанням розробленого методу обробки статистичних даних, які не підпорядковуються унімодальним законам розподілу, з необхідною надійністю одержані значення міцнісних характеристик кераміки, що увійшли до створеної моделі як її ідентифіковані (уточнені) параметри.

4. Формалізовано задачі забезпечення міцності МС як оптимізаційні ОЗ синтезу, окреслено основні проблеми їх розв'язання. На основі формалізації частинних задач сформульована загальна ОЗ проектувального розрахунку на

міцність МС. Розроблений метод вибору базового варіанту МС, що має оптимальну чутливість до варіацій його первинних факторів.

5. Розроблена загальна комплексна методика оптимального забезпечення заданої міцності МС, що включає методи створення математичних моделей, їх параметричну і структурну ідентифікацію, підвищення ефективності за рахунок уточнення значень параметрів моделей, забезпечення стійкості одержаних відповідних розв'язків ОЗ.

6. Знайдено оптимальні значення ФМХ кераміки та компаунду і геометричних розмірів, що гарантують міцність і герметичність конструкцій:

а) «керамічний резистор-компаунд» – запропоновані конструкторсько-технологічні шляхи забезпечення міцності конструкції кераміка-компаунд, впроваджені на ВО «Новатор», м. Хмельницький;

б) «керамічний конденсатор-компаунд» – обґрунтовано, що серед наявних компаундів відсутній представник зі значеннями характеристик, що задовольняють знайденим обмеженням.

## РОЗДІЛ 5.

### ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ДЕЯКИХ КЛАСІВ СТАТИСТИЧНО-ДЕТЕРМІНОВАНИХ, ДЕТЕРМІНОВАНИХ ТА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розроблено метод побудови гібридних статистично-детермінованих, детермінованих та із розподіленими параметрами моделей систем, який відрізняється врахуванням детермінованих залежностей параметрів окремих вузлів (підсистем). Отримано аналітичну апроксимацію силових чинників систем на базі детермінованої інформації про закони зміни визначальних параметрів руху. Метод використано для розв'язування важливих практичних задач.

#### 5.1. Статистично-детерміноване моделювання структурно-складних технічних систем

Побудова відносно нескладної моделі, адекватної реальному об'єкту, може здійснюватися шляхом визначення таких первинних факторів, вплив яких на вихідні характеристики об'єкта суттєвий, і спрощення, таким чином, моделі за рахунок відкидання несуттєвих факторів. Між тим, тут виникає питання про обґрунтованість критерію істотності первинних факторів, що розглядаються.

Методи теорії параметричної чутливості [145, 146] дають можливість судити про ступінь впливу кожного з первинних факторів на вихідні характеристики об'єкта. Будь-які функції чутливості можуть бути одержані безпосереднім аналізом моделі. Такий принцип безпосереднього аналізу вихідної моделі [146] має переваги перед іншими через це, що характеризується відносно простотою і легкістю реалізації на персональному комп'ютері. Відповідно до основної ідеї цього принципу, дослідження параметричної чутливості можна провести, маючи лише вихідну математичну модель МС, яка дозволяє отримати розглянуту вихідну характеристику. Наприклад, широко поширеним є метод варіацій, що може бути застосований до довільного виду



вихідної моделі, оскільки зводиться до почергової варіації, тобто малої зміни кожного параметра і реєстрації відповідних варіацій вихідних характеристик. Функції чутливості розраховуються наближено як відношення варіацій характеристик до варіацій параметрів.

В методах АПЕ для побудови статистичних моделей передбачена можливість обґрунтованого відсіювання несуттєвих первинних факторів. Однак АПЕ може бути проведений не лише на реальному об'єкті, але і на його детермінованій математичній моделі. В цьому випадку використання принципів АПЕ дає змогу також провести вказане спрощення детермінованої моделі.

Вже таке використання АПЕ як метода побудови статистичних моделей для аналізу і спрощення детермінованих моделей свідчить про тісний взаємозв'язок цих виокремлених видів математичного опису МС і технологічних процесів їх виготовлення. Дійсно, вказаний поділ математичних моделей достатньо умовний, оскільки обидва підходи органічно взаємопов'язані і доповнюють один одного. Так, уточнення і підтвердження достовірності детермінованих моделей мають здійснюватись статистичною обробкою даних експериментів на реальному об'єкті або його фізичній моделі, а статистичні моделі – формуватися з врахуванням відомих теоретичних залежностей. Крім того, виявлення достовірних статистичних моделей розподілу параметрів МС, які дозволяють обґрунтовано судити про дійсний розкид значень, підвищує ефективність використання математичних моделей.

Розглянемо питання, вирішення яких на основі використання взаємозв'язаних статистичного і детермінованого підходів до побудови математичних моделей, привело до отримання важливих результатів.

Розглянемо деякі способи, що дають змогу знизити трудомісткість і тривалість операцій, які необхідні для реалізації повного факторного експерименту (ПФЕ) при створенні математичних моделей структурно-складних технічних систем. Цього можна досягти побудовою гібридних статистично-детермінованих моделей, а також обґрунтованим вибором мінімальної кількості  $n$  дублювання кожного дослід з деякою заданою надійністю  $P$ .

Розглянемо об'єкт, який містить незалежні підсистеми, такі, що варіювання первинних факторів будь-якого із них змінює вихідні характеристики тільки цієї підсистеми. Ставиться задача застосуючи АПЕ змоделювати вихідну характеристику всієї системи у разі, коли взаємний вплив підсистем на неї відомий заздалегідь. При цьому будемо розглядати структурно-складні вироби, конструкція і традиційна технологія виготовлення яких не дозволяє і (або) не передбачає проміжний контроль окремих підсистем. В той же час можливе вимірювання значень модельованої функції у при довільних наборах значень первинних факторів всіх підсистем.

Викладемо методику розв'язання розглянутої задачі. Шукану модель можна подати у вигляді відомої функції

$$y = f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k), \varphi \in \mathbf{R}^k, i = \overline{1, k}, \quad (5.1)$$

що має властивість  $\delta y / \delta \varphi_i \neq 0$  в деякому околі точки  $(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{(i-1)0}, \varphi_i, \varphi_{(i+1)0}, \dots, \varphi_{k0})$ , де

$$\varphi_i = \varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i}), i = \overline{1, k} \quad (5.2)$$

невідомі функції, які моделюють  $i$ -у підсистему, а  $x_{ij}$  – кодовані первинні фактори.

Позначимо набір факторів  $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i})^T$  вектором  $\mathbf{X}_i, i = \overline{1, k}$ , після чого співвідношення (5.1) і (5.2) набудуть вигляду

$$y = f(\varphi_1(\mathbf{X}_1), \varphi_2(\mathbf{X}_2), \dots, \varphi_k(\mathbf{X}_k)). \quad (5.3)$$

Таким чином, задача полягає в тому, щоб методом АПЕ побудувати поліноміальне подання функції (5.3), виражене через первинні фактори. Запропонований метод розв'язання такої задачі полягає в моделюванні залежностей вихідної характеристики виробу від первинних факторів кожної

підсистеми окремо (значення первинних факторів інших вузлів в цей час фіксуються на деякому рівні) і подальшому об'єднанні їх у рамках загальної моделі об'єкта у відповідності з відомою теоретичною залежністю.

Для реалізації запропонованої методики необхідно здійснити наступну послідовність дій.

Утворимо спочатку  $k$  допоміжних функцій

$$y_i = f_i(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{(i-1)0}, \varphi_i(\mathbf{X}_i), \varphi_{(i+1)0}, \dots, \varphi_{k0}), \quad i = \overline{1, k},$$

де  $\varphi_{j0}$  – фіксоване, але невідоме значення функції  $\varphi_j$  при невідомому фіксованому наборі первинних факторів  $\mathbf{X}_{j0}$ .

Застосовуючи  $k$  разів повний факторний експеримент (ПФЕ), отримаємо поліноміальне подання кожної функції  $y_i$  у вигляді

$$y_i = b_0 + \sum_{i=1}^{l_i} b_i x_i + \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j + \dots, \quad (5.4)$$

де  $b_0, b_i, b_{ij}$  – коефіцієнти моделі, записаної в кодованих значеннях факторів.

Таким чином, реалізацією  $2^1 + 2^2 + \dots + 2^k$  експериментів визначимо залежності  $y_i = y_i(\mathbf{X}_i)$ . Далі, підставляючи отримані функції по чергово у ліву частину (5.4), виразимо всі  $\varphi_i(\mathbf{X}_i)$  через  $y_i(\mathbf{X}_i)$  і  $k-1$  постійну  $\varphi_{j0}$

$$\begin{cases} y_i(\mathbf{X}_{i0}) = f_i(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{(i-1)0}, \varphi_i(\mathbf{X}_i), \varphi_{(i+1)0}, \dots, \varphi_{k0}), \\ \varphi_i(\mathbf{X}_i) = g_i[y_i(\mathbf{X}_i), \varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{(i-1)0}, \varphi_i(\mathbf{X}_i), \varphi_{(i+1)0}, \dots, \varphi_{k0}]. \end{cases} \quad (5.5)$$

Вимірявши значення модельованої вихідної характеристики при фіксованих значеннях первинних факторів, запишемо співвідношення

$$y_0 = f[\varphi_1(\mathbf{X}_{10}), \varphi_2(\mathbf{X}_{20}), \varphi_3(\mathbf{X}_{30}), \dots, \varphi_k(\mathbf{X}_{k0})] = f(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{k0}).$$

Очевидно, що  $y_i(\mathbf{X}_{i0}) = f(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{(i-1)0}, \varphi_i, \varphi_{(i+1)0}, \dots, \varphi_{k0}) = y_0$ .

Підставляючи вираз (5.5) у (5.1), після перетворення отримаємо функцію  $y$ , що залежить тепер від первинних факторів  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$  і фіксованих невідомих чисел  $\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{k0}$ , тобто

$$y = \psi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k, \varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{k0}). \quad (5.6)$$

Оскільки при  $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i0}$ ,  $i = \overline{1, k}$  має місце  $y = y_0$ , то справедливим є вираз

$$y_0 = \psi(\mathbf{X}_{10}, \mathbf{X}_{20}, \dots, \mathbf{X}_{k0}, \varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{k0}), \quad (5.7)$$

який дає можливість відмовитись у (5.6) від невідомих  $\varphi_{i0}$ , виразивши їх через вимірне значення  $y_0$ , і отримати таким чином шуканий вигляд моделюючої функції.

При цьому, необхідна для реалізації описаної методики кількість експериментів  $2^1 + 2^2 + \dots + 2^k$  суттєво менше кількості експериментів  $2^{1+2+\dots+k}$ , необхідної для реалізації стандартного ПФЕ. На рис. 5.1 і рис. 5.2 представлені порівняльні логарифмічні залежності кількості необхідних експериментів від кількості факторів при фіксованій кількості підсистем і від кількості підсистем при фіксованій кількості факторів для гібридних моделей і моделей, створених за стандартним ПФЕ.

Для обґрунтованого вибору мінімальної кількості повторень кожного досліду при вимірюванні значення функції  $y$  використаємо метод довірчих інтервалів для оцінки математичного сподівання і СКВ нормально розподіленої випадкової величини з заданою надійністю  $P$ .

Легко показати, що з надійністю  $P$  число  $n$  може бути знайдено із виразу

$$n = T^2 \sigma^2 (1 - q)^2 / \delta^2,$$

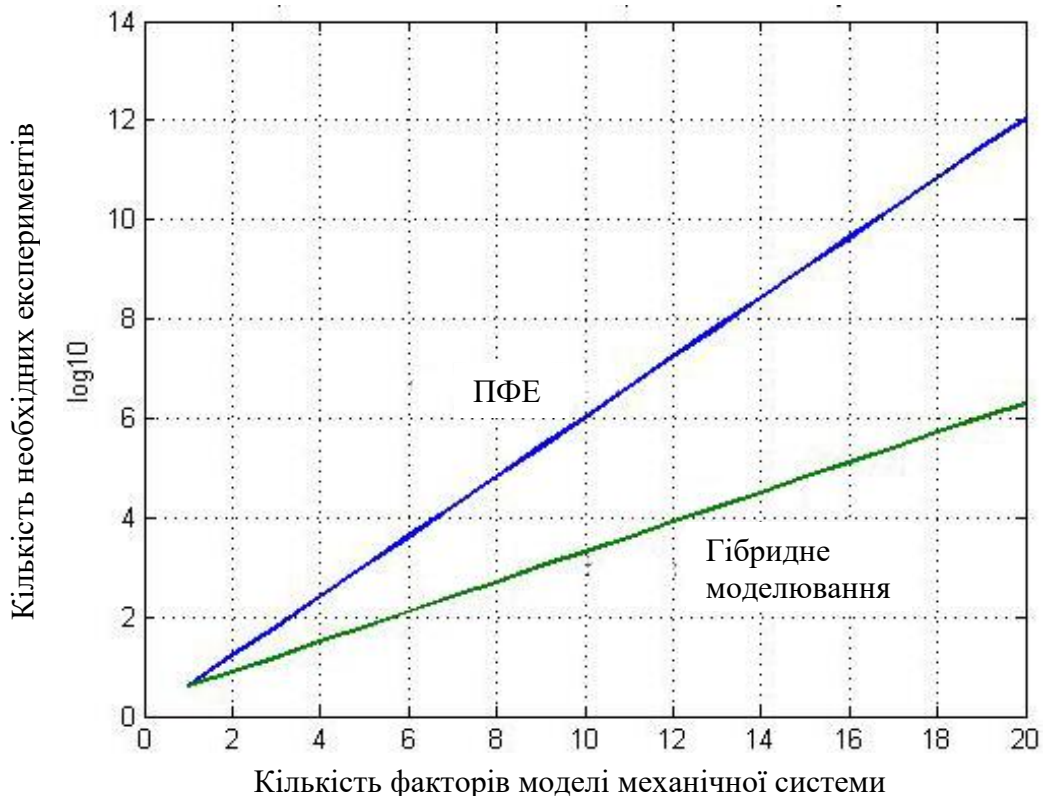


Рис. 5.1. Залежність кількості експериментів від кількості факторів при фіксованій кількості підсистем

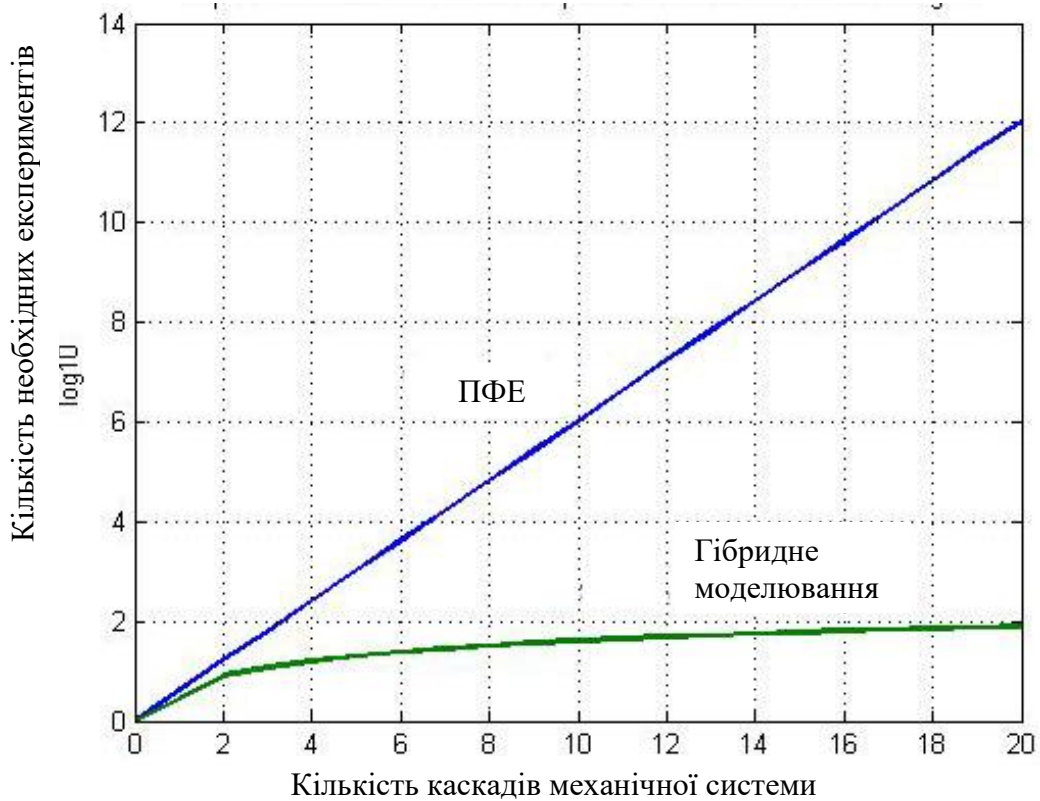


Рис. 5.2. Залежність кількості експериментів від кількості підсистем при фіксованій кількості факторів

де  $\sigma$  – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення;

$T$  – таке значення аргументу функції Лапласа  $\Phi(T)$ , при якому  $\Phi(T) = P/2$ ;

$q$  – число, що визначається із таблиці [37];

$\delta$  – задане число, що визначає допустиме відхилення середнього значення реалізованих дослідів від істинного значення вимірювальної величини.

Отже, запропонований метод побудови гібридних статистично-детермінованих моделей структурно-складних технічних систем, що дає змогу формувати статистичні моделі з врахуванням відомих теоретичних залежностей, дає значний вигравш у кількості експериментів при постановці АПЕ у порівнянні з побудовою чистих статистичних моделей.

Ця обставина набуває особливої важливості у тих випадках, коли кількість первинних конструкторсько-технологічних факторів, що впливають на значення вихідної характеристики об'єкта і кількість підсистем достатньо велика, а також, коли якість роботи виробу характеризується не одним, а декількома вихідними параметрами.

Оперативне створення таких статистично-детермінованих моделей дає можливість визначати обґрунтовані допуски на величини первинних конструкторсько-технологічних факторів, виходячи із умов стабілізації вихідних параметрів у заданих межах, що досягається дослідженням отриманих функцій багатьох змінних одним із відомих математичних способів.

## 5.2. Постановка задачі про ідентифікацію нелінійних силових характеристик коливальної системи із одним ступенем вільності

У підрозділі сформульовано та представлено методика розв'язання важливих з практичної сторони задач із ідентифікації нелінійних силових характеристик коливальних систем із одним ступенем вільності та розподіленими параметрами. Методика базується на: а) представлені силових чинників, що діють на досліджувану систему у вигляді лінійної комбінації

незалежних функцій із невідомими коефіцієнтами; б) аналітичному розв'язанні прямої задачі нелінійних коливань для диференціального рівняння, що містить деяку множину невідомих сталих; в) зіставлені експериментально отриманих основних характеристик динамічного процесу коливальної системи із отриманим аналітичним розв'язком математичної моделі відповідної коливальної системи. У сукупності наведене дало змогу отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

Нехай:

а) коливальний процес досліджуваного об'єкту задається дискретним способом – послідовними значеннями амплітуди  $a_1, a_2, \dots, a_n$  та періоду коливань  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . Вказана дискретна множина характеристик динамічного процесу може бути отримана експериментально;

б) одна частина силових факторів, які діють на систему є відомою і описується поліномами фазових координат  $x_1, x_2$ , а інша – невідома і описується лінійною комбінацією поліномів із невідомими коефіцієнтами.

Необхідно визначити невідомі силові чинники таким чином, щоб із заданою точністю амплітуда та частота аналітичного розв'язку математичної моделі динаміки процесу співпадала із наперед заданими значеннями амплітуди  $a_1, a_2, \dots, a_n$  та періоду коливань  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

Відомо [24, 174, 186], що математичною моделлю коливального процесу системи із одним ступенем вільності у фазових координатах за «малої» нелінійності силових чинників може служити система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} + \omega x_2 = \mu f(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} - \omega x_1 = \mu g(x_1, x_2). \end{cases} \quad (5.8)$$

У рівнянні (5.8)  $\omega$  – головна частина частоти власних коливань системи (лінійного її аналогу),  $\mu f(x_1, x_2)$ ,  $\mu g(x_1, x_2)$  – нелінійні складові сил, що діють

на систему, максимальне значення яких є «малою» величиною у порівнянні із максимальним значенням її лінійної складової  $\omega x_2$  на що вказує малий параметр  $\mu$ .

Як наголошувалось вище, тільки частина силових чинників є відомою. Тому щодо правої частини математичної моделі досліджуваних коливань справедливе наступне припущення

$$\begin{cases} \mu f(x_1, x_2) = \mu \left\{ f_1(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^s c_i H_i(x_1, x_2) \right\}, \\ \mu g(x_1, x_2) = \mu \left\{ g_1(x_1, x_2) + \sum_{j=1}^p d_j G_j(x_1, x_2) \right\}, \end{cases} \quad (5.9)$$

причому  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $g_1(x_1, x_2)$ ,  $H_i(x_1, x_2)$ ,  $G_j(x_1, x_2)$  – відомі функції (нижче будемо їх вважати поліномами); невідомі коефіцієнти  $c_1, c_2, \dots, c_s, d_1, d_2, \dots, d_p$  необхідно визначити таким чином, щоб амплітуда та період коливань системи (5.8) із урахуванням (5.9) змінювався відповідно наперед заданих вимірних експериментальних значень.

Примітки:

1. Для простоти вважається, що досліджується система одиничної маси ( $m=1$ ), в іншому випадку  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ , де  $c$  – стала, а множник  $\frac{1}{m}$  додатково входить у праву частину вказаних рівнянь;

2. Вигляд функцій  $H_i(x_1, x_2)$ ,  $G_j(x_1, x_2)$  та їх кількість визначається природою невідомих силових чинників.

5.2.1. Трансформація дискретного способу задання динамічного процесу аналітичними залежностями. Як наголошувалось вище, при дискретному способі визначення динамічного процесу об'єкту дослідження, вважаються відомими амплітуди та періоди послідовних розмахів коливань на певному інтервалі дослідження системи. Для



розв'язання поставленої раніше у п. 5.2 задачі покажемо, що дискретні множини значень амплітуди  $a_1, a_2, \dots, a_n$  та періоду коливань  $T_1, T_2, \dots, T_n$  можна трансформувати у деяку функціональну залежність. Дійсно, наведені вище дискретні значення АЧХ визначають середню зміну амплітуди  $\Delta a_i$  за один період та середнє значення зміни періоду  $\Delta T_i$  за вказаний час. Вважається, що справедливі наступні співвідношення

$$\frac{\Delta a_{\text{сер.}}}{T_{\text{сер.}}} \approx \frac{da}{dt}, \quad \frac{\Delta T_{\text{сер.}}}{T_{\text{сер.}}} \approx \frac{dT}{dt}, \quad (5.10)$$

де  $\Delta a_{\text{сер.}}$  та  $\Delta T_{\text{сер.}}$  – відповідно середні значення зміни амплітуди та періоду

коливань за розглянутий проміжок часу, тобто  $\Delta a_{\text{сер.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i$ ,  $\Delta T_{\text{сер.}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta T_i$ .

Подібним чином знаходяться для довільного розмаху значення логарифмічного

декременту амплітуди і логарифмічного «декременту періоду»:  $D_a = \ln \frac{a}{a + \Delta a}$ ,

$D_T = \ln \frac{T}{T + \Delta T}$ . Значення логарифмічного декременту амплітуди з достатнім

ступенем точності можна апроксимувати поліномом амплітудою

$$D_a = \sum_{r=1} \alpha_r a^r \quad (5.11)$$

із відомими коефіцієнтами  $\alpha_r$ . Подібним чином із урахуванням наведеного вище представляється  $D_T$

$$D_T = (-p + \sum_{r=1} \beta_r a^r) \sum_{r=1} \alpha_r a^r, \quad (5.12)$$

де  $p, \beta_r$  – відомі сталі.

З іншого боку, відповідно до теореми про середнє, маємо

$$\int_{T_j}^{T_{j+1}} \frac{d}{dt} (D_a(a)) dt = (T_{j+1} - T_j) \left( \frac{d}{dt} \ln a \right) \Big|_{a=\frac{a_j+a_{j+1}}{2}} \quad (5.13)$$

$$\int_{T_j}^{T_{j+1}} \frac{d}{dt} (D_T(a)) dt = (T_{j+1} - T_j) \left( \frac{d}{dt} \ln T \right) \Big|_{T=\frac{T_j+T_{j+1}}{2}} \quad (5.14)$$

Якщо у (5.13) перейти до «миттєвої» залежності, яка характеризує амплітуду коливального процесу, отримуємо

$$\frac{da}{dt} = \mu a \sum_{r=0} \bar{\alpha}_r a^r, \quad (5.15)$$

де  $\bar{\alpha}_r$  виражаються через відповідні коефіцієнти правої частини співвідношення (5.11). У випадку, коли динамічний процес близький до  $2\pi$ -періодичного, то формально ввівши фазу коливань  $\psi$  із урахуванням того, що  $T \frac{d\psi}{dt} = 2\pi$ , друге співвідношення залежностей (5.15) перетворюється до вигляду

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \mu \sum_{r=0} \bar{\beta}_r a^r, \quad (5.16)$$

де  $\omega = 2\pi/T$ , а  $\bar{\beta}_r$  – визначаються подібним чином як і  $\bar{\alpha}_r$ .

Таким чином, сформульована у п. 5.2 ОЗ звелась до визначення апроксимації нелінійних силових чинників виходячи із представлення їх залежностями  $\sum_{i=1}^s c_i H_i(x_1, x_2)$  та  $\sum_{j=1}^p d_j G_j(x_1, x_2)$  із невідомими коефіцієнтами  $c_1, c_2, \dots, c_s, d_1, d_2, \dots, d_p$  за умови, що динамічний процес описується залежностями (5.15), (5.16). Базою для її розв'язання служить аналітичний розв'язок математичної моделі динаміки досліджуваного процесу (прямої задачі), що є предметом розгляду наступного підрозділу.

5.2.2. Побудова наближеного розв'язку прямої задачі для системи рівнянь (5.8). В основу побудови розв'язку автономної системи квазілінійних диференціальних рівнянь (5.8) за умови (5.9) покладені основні положення асимптотичного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь із «малою» правою частиною [24, 221]. Відповідно до них, перше наближення асимптотичного розв'язку цього рівняння можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a \cos \psi + \mu U(a, \psi), \\x_2(t) &= a \sin \psi + \mu V(a, \psi),\end{aligned}\tag{5.17}$$

де амплітуда  $a$  та фаза  $\psi$  – коливачь як функції часу зв'язані диференціальними рівняннями вигляду

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \mu A(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \mu B(a).\end{aligned}\tag{5.18}$$

У диференціальних залежностях (5.18) праві частини, тобто функції  $A(a)$ ,  $B(a)$  є невідомими і визначаються нелінійними чинниками системи. Що стосується  $U(a, \psi)$ ,  $V(a, \psi)$ , то вони повинні бути  $2\pi$ -періодичні за  $\psi$ , і не містити у своїх розкладах перших гармонік  $\psi$ . Вказана умова має наступне фізичне трактування – амплітуда коливачь розглядуваної динамічної системи співпадає із коефіцієнтом першої її моди у гармонічному розкладі за фазою  $\psi$ . Таким чином, сукупність невідомих функцій необхідно визначити так, щоб асимптотичне подання розв'язку (5.17), (5.18) задовольняло з точністю до величин порядку  $\mu$  включно вихідному рівнянню (5.8).

Не вникаючи у математичні викладки (їх для подібного класу систем можна знайти, наприклад, у [24, 174]) наведемо тільки результати, які стосуються безпосередньо знаходження невідомих функцій  $A(a)$  та  $B(a)$ . Із СЛАР, яка утворюється із (5.8) з урахуванням (5.9), (5.17), (5.18), маємо

$$\begin{aligned}
A(a)\cos\psi - aB(a)\sin\psi &= -\tilde{f}(a,\psi) - \sum_{i=1}^s c_i \tilde{H}_i(a,\psi), \\
A(a)\sin\psi + aB(a)\cos\psi &= \tilde{g}(a,\psi) + \sum_{j=1}^p d_j \tilde{G}_j(a,\psi),
\end{aligned}
\tag{5.19}$$

де відповідно  $\tilde{f}(a,\psi)$ ,  $\tilde{g}(a,\psi)$ ,  $\tilde{H}_i(a,\psi)$ ,  $\tilde{G}_j(a,\psi)$  відповідають значенням функцій  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $g_1(x_1, x_2)$ ,  $H_i(x_1, x_2)$ ,  $G_j(x_1, x_2)$  за умови, що  $x_1, x_2$  набувають лише головних значень у поданні (5.17), тобто  $x_1 = a\cos\psi$ ,  $x_2 = a\sin\psi$ . Після нескладних перетворень залежностей (5.19) знаходимо

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \mu A(a) = \mu \left\{ \bar{g}_{1s.}(a) + \sum_{j=1}^p d_j \bar{G}_{js.}(a) - \bar{f}_{1c.}(a) - \sum_{i=1}^s c_i \bar{H}_{ic.}(a) \right\}, \\
\frac{d\psi}{dt} &= \omega + \mu B(a) = \omega + \frac{\mu}{a} \left( \bar{f}_{1s.}(a) + \sum_{i=1}^s c_i \bar{H}_{is.}(a) + \bar{g}_{1c.}(a) + \sum_{j=1}^p d_j \bar{G}_{jc.}(a) \right)
\end{aligned}
\tag{5.20}$$

де

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{1c.}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}_1(a,\psi) \cos\psi d\psi, & \bar{g}_{1c.}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}_1(a,\psi) \cos\psi d\psi, \\
\bar{f}_{1s.}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}_1(a,\psi) \sin\psi d\psi, & \bar{g}_{1s.}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}_1(a,\psi) \sin\psi d\psi, \\
H_{ic.}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{H}_i(a,\psi) \cos\psi d\psi, & G_{jc.}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{G}_j(a,\psi) \cos\psi d\psi, \\
H_{is.}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{H}_i(a,\psi) \sin\psi d\psi, & G_{js.}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{G}_j(a,\psi) \sin\psi d\psi.
\end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок прямої задачі у першому наближенні описується головними членами у асимптотичному представленні (5.17) за умови, що амплітуда та частота коливань зв'язані співвідношенням (5.20).

5.2.3. Ідентифікація параметрів нелінійної коливальної системи. Отриманий вище аналітичний розв'язок прямої задачі служить базою для ідентифікації параметрів досліджуваної системи, тобто визначення невідомих величин  $c_1, c_2, \dots, c_s, d_1, d_2, \dots, d_p$ . Дійсно, з одного боку АЧХ досліджуваної системи описується залежностями (5.15) і (5.16), а з іншого – диференціальними залежностями (5.20). Наведені залежності будуть описувати один і той же динамічний процес у випадку, коли справджуються залежності

$$\begin{aligned} a \sum_{r=0} \bar{\alpha}_r a^r + \bar{f}_{1s.}(a) - \bar{g}_{1s.}(a) &= \sum_{j=1}^p d_j \bar{G}_{js.}(a) - \sum_{i=1}^s c_i \bar{H}_{is.}(a), \\ \sum_{r=0} \bar{\beta}_r a^r - \frac{1}{a} (\bar{f}_{1s.}(a) - \bar{g}_{1s.}(a)) &= \frac{1}{a} \left( \sum_{i=1}^s c_i \bar{H}_{is.}(a) + \sum_{j=1}^p d_j \bar{G}_{js.}(a) \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Алгебраїчні залежності (5.21) є базовими для визначення невідомих сталих параметрів  $c_1, c_2, \dots, c_s, d_1, d_2, \dots, d_p$ . Розглянемо можливі випадки цих алгебраїчних залежностей.

Випадок 1. Будемо вважати, що аналітичне представлення невідомих силових чинників за допомогою лінійної комбінації відомих функцій  $H_i(x_1, x_2)$ ,  $G_j(x_1, x_2)$  та їх кількості є найбільш вдалим, а отже, співвідношення (5.21) виконуються для довільних значень амплітуди коливальних. Тоді для розв'язання поставленої задачі прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру  $a$  в (5.21) отримуємо СЛАР відносно шуканих величин  $c_1, c_2, \dots, c_s, d_1, d_2, \dots, d_p$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p \bar{\theta}_{jm} c_j + \sum_{i=1}^s \bar{\delta}_{im} d_i = \bar{\gamma}_m, \\ \sum_{j=1}^p \tilde{\theta}_{jn} c_j + \sum_{i=1}^s \tilde{\delta}_{in} d_i = \tilde{\gamma}_n, \end{cases} \quad (5.22)$$

де  $m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N, \bar{\gamma}_m, \tilde{\gamma}_n$  – відповідно коефіцієнти при  $a^m$  та  $a^n$  лівої частини першого та другого співвідношення у (5.21);

$\bar{\theta}_{jm}, \bar{\delta}_{im}$  – коефіцієнти при  $a^m$  функцій  $\bar{H}_{ic.}(a)$  і  $\bar{G}_{js.}(a)$ ;

$\tilde{\theta}_{jn}, \tilde{\delta}_{in}$  – коефіцієнти при  $a^n$  функцій  $\bar{H}_{is.}(a)$  і  $\bar{G}_{jc.}(a)$ .

Оскільки залежності (5.21) виконуються при всіх значеннях параметру  $a$ , то  $p + s > M + N$ . Це дає можливість розв'язати СЛАР (5.22) відносно перших  $M + N$  невідомих параметрів  $c_1, c_2, \dots, c_{M+N}$  (у подальшому для зручності викладок введені позначення.  $c_{s+1} = d_1, c_{s+2} = d_2, \dots, c_{s+p} = d_p$ ). Нехай вказані параметри визначаються через всі інші залежностями

$$c_\rho = \eta_\rho(c_{\rho+1}, c_{\rho+2}, \dots, c_{s+p}), \quad \rho = 1, 2, \dots, N + M. \quad (5.23)$$

Для отримання додаткових рівнянь, які були б базою для однозначного визначення апроксимації невідомих силових чинників, може служити, наприклад, умова мінімуму функціоналу

$$\frac{\partial J}{\partial c_{\rho+l}} = \phi_l(c_{\rho+1}, c_{\rho+2}, \dots, c_{s+p}, a) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, s + p - M - N, \quad (5.24)$$

де

$$J = \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ \sum_{\rho=1}^{M+N} \eta_\rho(c_{\rho+1}, c_{\rho+2}, \dots, c_{s+p}) \tilde{H}_\rho(a, \psi) + \sum_{i=M+N+1}^s c_i \tilde{H}_i(a, \psi) \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^p c_{s+j} \tilde{G}_j(a, \psi) \right]^2 \right\} da d\psi$$

для випадку  $N + M < s$  і

$$J = \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^s \eta_i(c_{\rho+1}, c_{\rho+2}, \dots, c_{s+p}) \tilde{H}_i(a, \psi) \right]^2 + \left[ \sum_{\rho=s+1}^{M+N} \eta_\rho(c_{\rho+1}, c_{\rho+2}, \dots, c_{s+p}) \tilde{G}_\rho(a, \psi) + \sum_{j=M+N+1}^{p+s} c_{s+j} \tilde{G}_j(a, \psi) \right]^2 \right\} da d\psi$$

для випадку  $N + M > s$ .

У загальному випадку СЛАР (5.24) є лінійною відносно шуканих параметрів, однак вона залежить від амплітуди динамічного процесу, що викликає їх залежність від амплітуди. Проте відповідно до постановки розв'язуваної задачі вони повинні бути сталими. Тому, прирівнюючи у лівих частинах СЛАР (5.24) коефіцієнти при однакових степенях амплітуди  $a$ , отримуємо додаткові лінійно незалежні рівняння відносно  $c_{\rho+1}, c_{\rho+2}, \dots, c_{s+p}$

$$\bar{\Phi}_\lambda(c_{\rho+1}, c_{\rho+2}, \dots, c_{s+p}) = 0, \lambda = 1, 2, \dots, N_1. \quad (5.25)$$

Кількість вказаних рівнянь  $N_1$  задовольняє умові  $N_1 \geq s + p - M - N$ . У випадку рівності  $N_1 = s + p - M - N$  (цей випадок має місце за умови, коли функції  $H_i(x_1, x_2)$  та  $G_j(x_1, x_2)$  однорідні однакоого виміру) СЛАР (5.25) має єдиний розв'язок. Знайшовши відомим способом її розв'язок:  $c_{\rho+1} = c_{\rho+1}^0, c_{\rho+2} = c_{\rho+2}^0, \dots, c_{s+p} = c_{s+p}^0$ , решту невідомих із урахування отриманого знаходимо із (5.23), тобто  $c_\rho = \eta_\rho(c_{\rho+1}^0, c_{\rho+2}^0, \dots, c_{s+p}^0)$ .

У випадку  $N_1 > s + p - M - N$  СЛАР (5.22) немає розв'язку: функції  $H_i(x_1, x_2), G_j(x_1, x_2)$  підбрані не зовсім вдало або результати отримані із значними похибками. У такому разі умови (5.25) задовольняють наближено.

Для цього розглянемо функціонал – неув'язку  $\Delta = \sum_{\lambda=1}^{N_1} [\bar{\Phi}_\lambda(c_{\rho+1}, c_{\rho+2}, \dots, c_{s+p})]^2$ . Із

умов мінімуму цього функціоналу  $\sum_{\lambda=1}^{N_1} [\bar{\Phi}_\lambda] \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial c_l} = 0$ , а від так із співвідношення

(5.23) знаходимо наближені значення всіх коефіцієнтів.

Випадок 2. Нехай, система функцій  $H_i(x_1, x_2), G_j(x_1, x_2)$ , через яку визначається аналітична апроксимація невідомих силових чинників та результати обробки експериментальних значень, які стосуються амплітуди та періоду коливань досліджуваного об'єкту такі, що отримати із (5.21) значення параметрів  $c_1, c_2, \dots, c_s, d_1, d_2, \dots, d_p$ , які б не залежали від амплітуди коливань не вдається. В цьому випадку умови (5.21) задовольняють наближено виходячи із умови мінімуму квадратичної форми із коефіцієнтів при однакових степенях параметру  $a$ . Більш точний розв'язок можна отримати розглядом спочатку другої або вищих наближень прямої, а як наслідок – ОЗ.

Треба відзначити, що без особливих труднощів викладені результати переносяться на випадок, коли математичною моделлю динаміки процесу є квазілінійне диференціальне рівняння другого порядку.

### 5.3. Метод ідентифікації нелінійних силових чинників деяких класів нелінійних систем із розподіленими параметрами

У цьому підрозділі основна ідея методу ідентифікації нелінійних систем із зосередженими масами, яка викладена у п. 5.2, узагальнена на випадок систем із розподіленими масами, математичними моделями яких є крайові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними другого чи четвертого порядків. Вказані математичні моделі описують поздовжні, поперечні, крутильні та згинальні коливання одновимірних моделей тіл.

5.3.1. Ідентифікація силових характеристик систем із розподіленими параметрами, математичним моделями динаміки яких є крайові задачі для рівнянь другого чи четвертого порядку. Подібним чином, як і для системи із зосередженими масами, вважатимемо, що динаміка досліджуваної системи із рівномірно розподіленою масою, задається послідовними значеннями її амплітуди  $a_1, a_2, \dots, a_n$  та періоду  $T_1, T_2, \dots, T_n$  коливань. Математичною ж моделлю її динаміки для випадку поздовжніх (поперечних, крутильних) коливань є диференціальне рівняння [16, 172]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu f(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)) + \mu \sum_{i=1}^s c_i g_i(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)) \quad (5.26)$$

для простоти за однорідних крайових умов

$$u(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{x=l} \quad (5.27)$$

або

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (5.28)$$



Якщо ж досліджуваний об'єкт (для простоти із шарнірно закріпленими кінцями) здійснює поперечні коливання, то математичною моделлю його динамічного процесу є диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \mu f(u(x,t), u_x(x,t), \dots, u_{xxx}(x,t), u_t(x,t)) + \mu \sum_{i=1}^s c_i g_i(u(x,t), u_x(x,t), \dots, u_{xxx}(x,t), u_t(x,t)) \quad (5.29)$$

за крайових умов

$$u(x,t)|_{x=0;l} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=0;l} = 0. \quad (5.30)$$

У (5.26) – (5.30)  $\alpha, l, c_i$  – сталі;  $u(x,t)$  – переміщення перерізу середовища із Лагранжевою координатою  $x$  в довільний момент часу  $t$  [147];  $f(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t))$ ,  $g_i(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t))$  – відомі аналітичні функції. Необхідно, виходячи із дискретного закону зміни визначальних параметрів коливального процесу, визначити аналітичну апроксимацію невідомої частини силових чинників відомою системою аналітичних функцій.

Примітки:

1. Диференціальне рівняння (5.26) описує а) поперечні коливання одновимірної моделі тіла малої згинальної жорсткості; б) поздовжні коливання одновимірної моделі пружного тіла; в) крутильні коливання пружного тіла.

2. У рівнянні (5.26) для випадку а)  $\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$  ( $T$  – сила натягу гнучкого тіла,  $\rho$  – погонна маса); для випадку б)  $\alpha^2 = \frac{E}{\rho}$  ( $E$  – модуль пружності матеріалу тіла); для випадку в)  $\alpha^2 = \frac{c}{I}$  ( $c$  – коефіцієнт жорсткості на кручення тіла,  $I$  – момент інерції); у рівнянні ж (5.29)  $\alpha^2 = \frac{EJ_x}{\rho}$  ( $J_x$  – момент інерції перерізу тіла відносно поздовжньої осі).

Відповідно до п. 5.2 дискретну множину параметрів, які описують коливальний процес об'єкту можна замінити звичайними диференціальними рівняннями (5.15), (5.16). Таким чином, необхідно визначити такі значення сталих  $c_1, c_2, \dots, c_s$  за яких динамічний процес систем, які описуються диференціальними рівняннями (5.26) чи (5.29) за відповідних крайових умов, змінюється відповідно до диференціальних рівнянь (5.15), (5.16)

5.3.2. Принцип одночастотності коливань у розв'язуванні ОЗ для крайових задач. Як відомо, що наявні у реальних коливальних системах сили опору, дисипативні та іншої природи сили, спричиняють у них встановлення, як правило, одночастотного або близького до нього динамічного процесу [172]. У більшості випадків це коливання із частотою близькою до першої (головної) частоти коливань. Вказане значною мірою полегшує знаходження розв'язку сформульованих вище крайових задач. Крім цього, системи функцій які описують форми коливань незбурених задач ( $\mu = 0$ ) (5.18), (5.27); (5.26), (5.28) та (5.29), (5.30) мають властивість повноти та ортонормованості, тобто  $\int_0^l X_k(x)X_r(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq r \\ l & \text{при } k = r \end{cases}$ , де  $\{X_k(x)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l}x \right\}$  для крайових задач (5.26), (5.27); (5.29), (5.30) та  $\{X_k(x)\} = \left\{ \cos \frac{k\pi}{l}x \right\}$  – для крайової задачі (5.27), (5.28).

Вказане у сукупності дозволяє вихідну задачу звести до розв'язаної вище. Дійсно: подавши невідомі функції  $u(x,t)$  у вигляді суми

$$u(x,t) = \sum_{k=1} T_k(t)X_k(x) \quad (5.31)$$

а) будуть виконуватись відповідні крайові умови;

б) для знаходження невідомих функцій  $T_k(t)$  можна застосувати метод Бубнова-Гальоркіна [24], який дає змогу їх описати за допомогою звичайних квазілінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 T_k(t)}{dt} + \omega^2 T_k(t) = \mu f_k(T_k, \dot{T}_k) + \mu \sum_{i=1}^s d_i \hat{g}_i(T_k, \dot{T}_k). \quad (5.32)$$

У отриманих вище диференціальних рівняннях  $\omega$ ,  $f_k(T_k, \dot{T}_k)$ ,  $g_i(T_k, \dot{T}_k)$  визначаються відповідно до залежностей

$$f_k(T_k, \dot{T}_k) = \frac{1}{l} \int_0^l f(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)) X_k(x) dx, \quad \hat{g}_{ik}(T_k, \dot{T}_k) = \frac{1}{l} \int_0^l g_i(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)) X_k(x) dx.$$

Обмежуючись тільки першою формою «динамічної рівноваги» [172], АЧХ процесу системи, математичною моделлю якої є диференціальне рівняння (5.31) (а відповідно (5.37)) визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\mu}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi + \frac{\mu}{2\pi\omega} \sum_{i=1}^s c_i \int_0^{2\pi} g_i(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \frac{\mu}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\mu}{2\pi\omega a} \sum_{i=1}^s c_i \int_0^{2\pi} g_i(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Для простоти вважається, що апроксимація невідомих силових чинників представляється лінійною комбінацією лінійно незалежних поліномів. В такому разі праві частини співвідношень (5.33) є поліномами амплітуди коливань. Прирівнюванням правих частин отриманих залежностей (5.33) до правих частин співвідношень, які впливають експериментально отриманих законів зміни амплітуди та періоду коливань, тобто (5.15), (5.16) маємо базові співвідношення для визначення невідомих сталих  $c_i$ ,  $i=1,2,\dots,s$ . Методика знаходження невідомих параметрів  $c_i$ ,  $i=1,2,\dots,s$  із вказаних алгебраїчних співвідношень аналогічна до методики, яка викладена у п. 5.2, тому на ній нижче зупинятись не будемо.

5.3.3. Обернені задачі для поздовжньо-рухомих одновимірних систем. Набагато складнішими при аналітичному розв'язуванні є ОЗ для суцільних одновимірних середовищ, які характеризуються поздовжньою складовою швидкістю руху. До них в першу чергу можна віднести канатні витяги, гнучкі пасові передачі чи трубопроводи, вздовж яких рухається суцільний однорідний потік рідини чи сипкого середовища, в якійсь мірі рух стрічкоподібних листів матеріалу на етапі, який передує рулоуванню. Математичними моделями коливань вказаних МС у змінних Ейлера є однотипні нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними, які містять змішані похідні незалежних змінних: часової та лінійної. У зв'язку із вказаним, залишається проблематичним застосування методу відокремлення змінних Фур'є навіть для спрощених (лінійних) прямих задач. Однак, метод одночастотності коливань у нелінійних системах [172] та основні ідеї хвильової теорії руху [222, 161], відкрили шлях розв'язання вказаного типу нелінійних прямих задач, а відтак – до проблеми ідентифікації нелінійних силових характеристик на базі закону руху цих систем.

Формально математичною моделлю динаміки вказаної вище множини МС можна вважати диференціальне рівняння (5.31) за відповідних крайових умов, тільки в них повні похідні за часом треба замінити локальними на базі

$$\text{співвідношень } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Якщо взяти до уваги, що нижче розглядається лише випадок сталої швидкості подовжнього руху (канату, гнучкого елемента систем приводу, суцільного потоку середовища вздовж гнучкого трубопроводу), то у наведених

вище співвідношеннях  $\frac{dx}{dt} = V = \text{const}$ , а  $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$  і вони трансформуються до

$$\text{вигляду } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} V, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} V + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} V^2.$$

Звідси і випливає, що математичною моделлю динаміки досліджуваного класу систем, які характеризуються сталою складовою швидкості руху, є диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} V - (\alpha^2 - V^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu f(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)) + \mu \sum_{i=1}^s c_i g_i(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)) \quad (5.34)$$

за крайових умов (5.27) або (5.28). Задача полягає у визначенні такої множини параметрів  $c_i$ ,  $i=1,2,\dots,s$ , які б забезпечували закони зміни послідовних значень амплітуди та періоду коливань відповідно до дискретної множини значень.

Методика п. 5.2 дає змогу дискретну множину характеристик коливального процесу трансформувати до вигляду (5.15), (5.16), однак основні труднощі полягають у знаходженні розв'язку сформульованої вище крайової задачі для рівняння (5.34). У [222, 161] показано, що одночастотний динамічний процес, який відповідає незбуреним  $\mu = 0$  крайовим задачам можна представити у вигляді

$$u(x,t) = a \left[ \cos(kx + \omega t + \phi) - \cos(\chi x - \omega t - \phi) \right] \quad (5.35)$$

для крайових умов (5.27) та

$$u(x,t) = a \left[ \cos(kx + \omega t + \phi) - \frac{\kappa}{\chi} \cos(\chi x - \omega t - \phi) \right] \quad (5.36)$$

для крайових умов (5.28). У вказаних вище співвідношеннях хвильові числа  $\kappa$ ,  $\chi$  та частота  $\omega$  динамічного процесу залежать не тільки від ФМХ матеріалу,

але й швидкості руху досліджуваного об'єкту:  $\kappa = \frac{k\pi}{\alpha l}(\alpha + V)$ ,  $\chi = \frac{k\pi}{\alpha l}(\alpha - V)$ ,

$\omega = \frac{k\pi}{\alpha l}(\alpha^2 - V^2)$ , крім цього амплітуда відбитої хвилі є дещо більшою від

прямої у випадку крайових умов (5.28).

Що стосується першого наближення асимптотичного розв'язку вказаних задач, тобто впливу нелінійних сил на закони зміни визначальних параметрів динамічного процесу, то вони визначаються дещо складнішими співвідношеннями, ніж для розглянутих у п. 5.3.2 задач, а саме

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = \mu A_1(a) &= \frac{\mu}{2\pi l \left[ (\omega + \kappa V)^2 + (\omega - \chi V)^2 \right]} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ \hat{f}_1(a, x, \varphi) + c_i \hat{g}_i(a, x, \varphi) \right\} \times \\ &\times \left\{ \left[ (\omega + \kappa V) \sin \kappa x + (\omega - \chi V) \sin \chi x \right] \cos \varphi + \left[ (\omega + \kappa V) \cos \kappa x - (\omega - \chi V) \cos \chi x \right] \sin \varphi \right\} d\varphi dx, \\ \frac{d\phi}{dt} = \mu B_1(a) &= \frac{\mu}{a 2\pi l \left[ (\omega + \kappa V)^2 + (\omega - \chi V)^2 \right]} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ \hat{f}_1(a, x, \varphi) + \sum_{i=1}^s c_i \hat{g}_i(a, x, \varphi) \right\} \times \\ &\times \left\{ \left[ (\omega + \kappa V) \sin \kappa x + (\omega - \chi V) \sin \chi x \right] \sin \varphi - \left[ (\omega + \kappa V) \cos \kappa x - (\omega - \chi V) \cos \chi x \right] \cos \varphi \right\} d\varphi dx, \end{aligned} \quad (5.42)$$

для крайових умов (5.32), та

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = \mu A_1(a) &= \frac{-\mu}{2\pi l \left[ (\omega + \kappa V)^2 + \kappa^2 \left( V - \frac{\omega}{\chi} \right)^2 \right]} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ \check{f}_1(a, x, \varphi) + \sum_{i=1}^s c_i \check{g}_i(a, x, \varphi) \right\} \times \\ &\times \left\{ \left[ (\omega + \kappa V) \sin \kappa x + \kappa \left( V - \frac{\omega}{\chi} \right) \sin \chi x \right] \cos \varphi + \left[ (\omega + \kappa V) \cos \kappa x - \kappa \left( V - \frac{\omega}{\chi} \right) \cos \chi x \right] \sin \varphi \right\} d\varphi dx, \\ \frac{d\phi}{dt} = \mu B_1(a) &= \frac{-\varepsilon}{2\pi a l \left[ (\omega + \kappa V)^2 + \kappa^2 \left( V - \frac{\omega}{\chi} \right)^2 \right]} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ \check{f}_1(a, x, \varphi) + \sum_{i=1}^s c_i \check{g}_i(a, x, \varphi) \right\} \times \\ &\times \left\{ \left[ (\omega + \kappa V) \sin \kappa x + \kappa \left( V - \frac{\omega}{\chi} \right) \sin \chi x \right] \cos \varphi - \left[ (\omega + \kappa V) \cos \kappa x - \kappa \left( V - \frac{\omega}{\chi} \right) \cos \chi x \right] \sin \varphi \right\} d\varphi dx. \end{aligned} \quad (5.43)$$

для крайових умов (5.33). У наведених вище співвідношеннях  $\varphi = \omega t + \phi$ ,

$\hat{f}_1(a, x, \varphi)$ ,  $\hat{g}_i(a, x, \varphi)$  – відповідають значенням відповідно функцій  $f(u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t))$  та  $g_i(u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t))$  за умови що  $u(x, t)$  та її похідні визначаються залежностями (5.38) – для крайових умов (5.32) та  $\check{f}_1(a, x, \varphi)$ ,  $\check{g}_i(a, x, \varphi)$  – відповідають значенням цих же функцій, за умови, що

$u(x, t)$  та її частинні похідні визначаються відповідно до (5.41) – для крайових умов (6. 26).

Примітки:

1. У представленні динамічного процесу параметр  $a$  є амплітудою відповідної хвилі, амплітуда ж коливань є величиною у два рази більшою.

2. Використання більш простих методів (Бубнова – Гальоркіна, Ван–дер-Поля) для отримання АЧХ динамічного процесу МС математичними моделями руху яких є розглянуті вище крайові задачі до бажаних результатів не приводять, адже залишається проблематичним при їх застосуванні урахування впливу другого доданку та виконання відповідних крайових умов.

3. Представлення розв’язку незбуреного аналогу рівняння (5.39) у хвильовій формі, як, наприклад у [93, 128] дещо складніше у знаходженні АЧХ збуреного аналогу рівняння.

У випадку, коли праві частини диференціального рівняння (5.31) є поліномами (у роботі розглядається саме такий випадок), праві частини залежностей (5.40) чи (5.41) є многочленами параметру  $a$ . Це дозволяє для ідентифікації силових характеристик МС використати методику, викладену у попередніх підпунктах, тобто співвідношення

$$a \sum_{r=0} \bar{\alpha}_r a^r = 2A_1(a),$$

$$\sum_{r=0} \bar{\beta}_r a^r = 2B_1(a)$$
(5.44)

мають виконуватись при всіх значеннях параметру  $a$  або різниця між їх правою та лівою частинами має бути мінімальною. Треба зауважити, що праві частини залежностей (5.44) є не чим іншим як правими частинами співвідношень (5.42) чи (5.43), а отже містять невідомі параметри  $c_i, i = 1, 2, \dots, s$ .

## 5.4. Побудова математичної моделі складання літакового відповідача і забезпечення його працездатності

5.4.1. Математична постановка задачі. Надалі під забезпеченням працездатності літакового відповідача (ЛВ) будемо розуміти гарантію стабільної потужності вихідного ВЧ-сигналу його механічного резонатора, тобто виконання вимог ТУ на цю вихідну характеристику протягом всього терміну експлуатації. З метою забезпечення працездатності ЛВ необхідно розв'язати наступні задачі.

1. Виявити первинні конструкторські і технологічні фактори механічної природи, що впливають на величину досліджуваної потужності ЛВ, і побудувати математичну модель залежності вказаної вихідної характеристики від цих факторів.

2. Аналізом отриманої моделі виявити серед первинних факторів пріоритетні і вияснити, які з них можуть в експлуатації протягом часу змінювати свої значення, тобто дестабілізувати вихідну потужність ЛВ в процесі експлуатації.

3. На основі аналізу проведених досліджень розробити заходи, реалізація яких стабілізує потужність вихідного ВЧ-сигналу ЛВ. Зокрема необхідно розв'язати ОЗ синтезу допусків на конструкторські і технологічні параметри математичної моделі формування потужності ЛВ.

Подальші дослідження проводились у відповідності із наведеним планом розв'язання окремих задач, що в комплексі дає можливість розв'язати поставлену інженерну проблему.

Потужність вихідного ВЧ-сигналу формується в прийомопередавачі основного блоку СО-69, а саме у призначеному для генерування ВЧ-імпульсів в дециметровому діапазоні генераторі НВЧ 2081401 передавача 2016140 (рис. 5.3). Генератор НВЧ містить дві незалежні підсистеми (каскади). Перший каскад – автогенератор (задавальний генератор – ЗГ), другий – підсилювач потужності (ПП) (рис. 5.4).



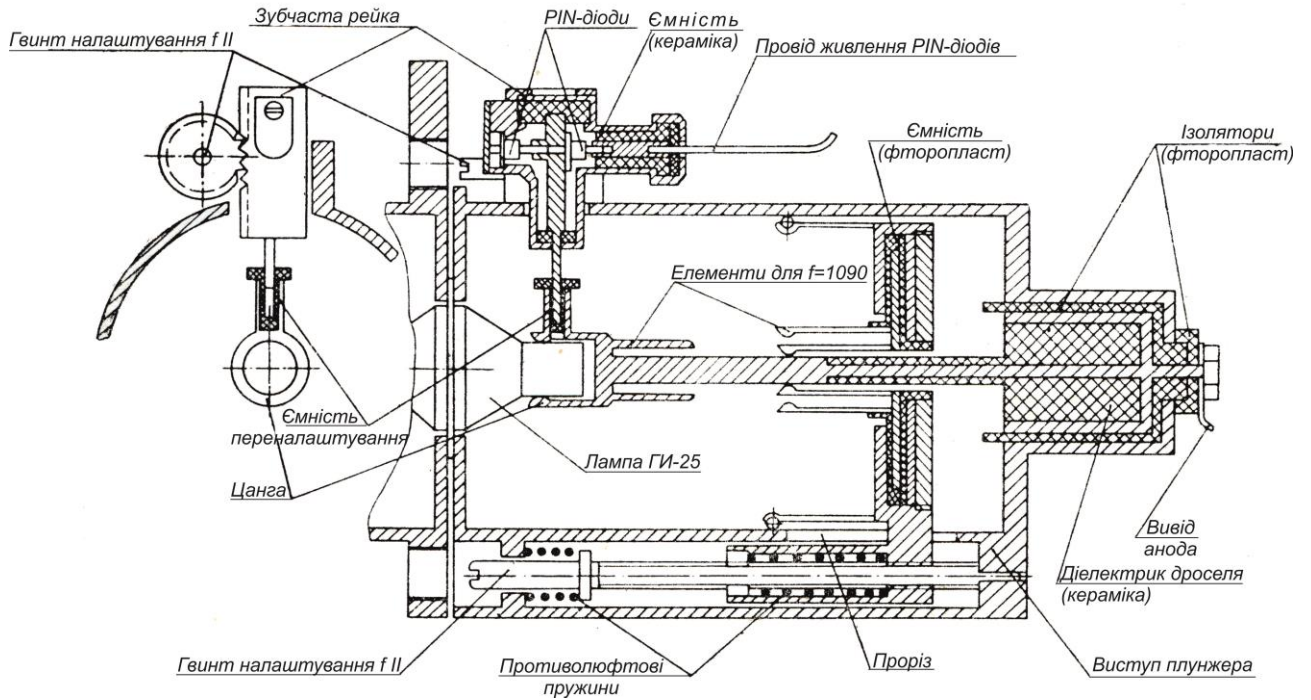


Рис. 5.3. Елементи переналаштування генератора НВЧ

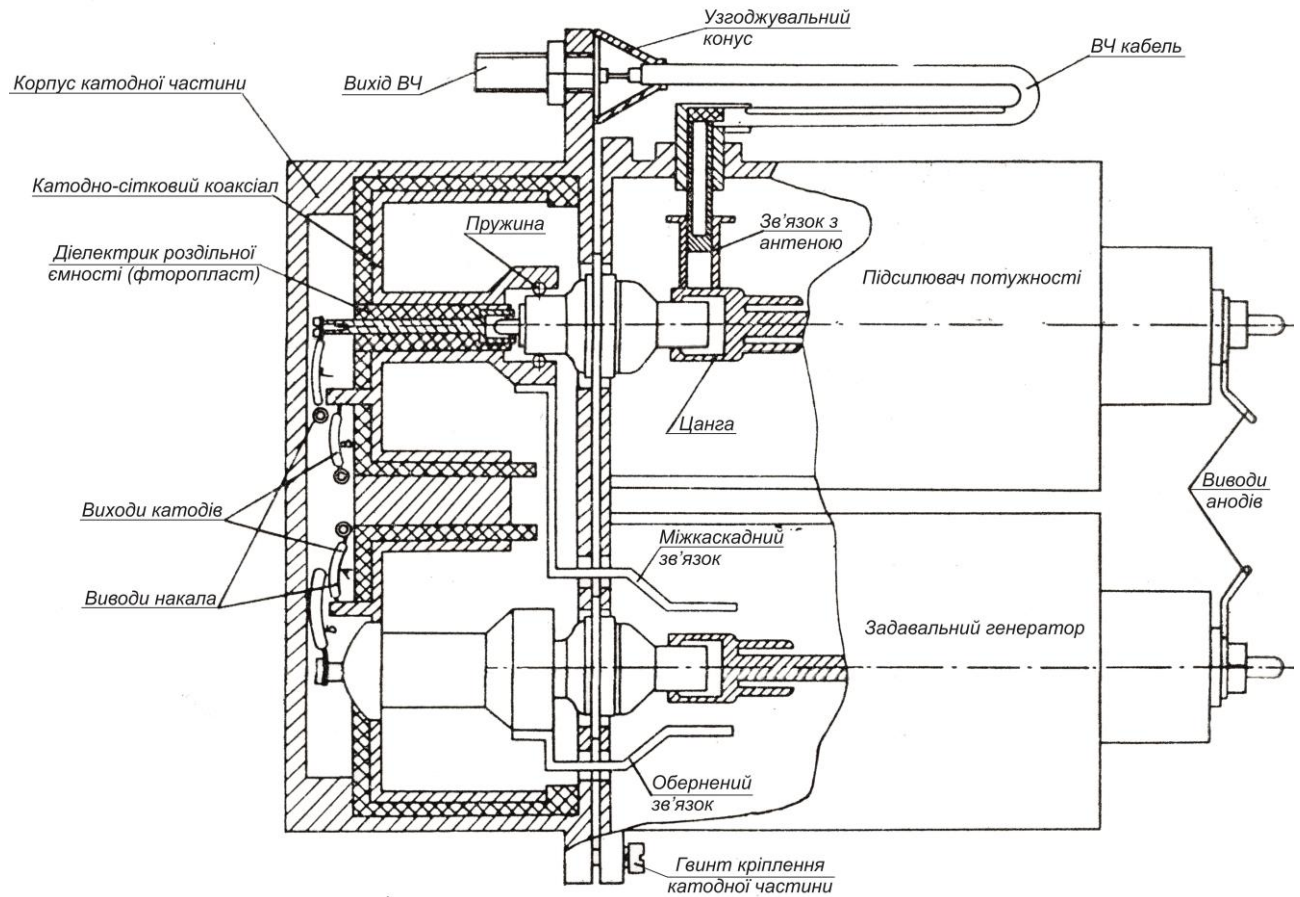


Рис. 5.4. Елементи зв'язків генератора НВЧ

При цьому відомо, що потужність вихідного ВЧ-сигналу  $P$  представляється у вигляді добутку двох функцій, які моделюють кожен із каскадів ЗГ ( $\varphi_1$ ) і ПП ( $\varphi_2$ ), тобто

$$P = \varphi_1 \cdot \varphi_2. \quad (5.45)$$

При цьому конструкція і технологій складання відповідача не передбачає проміжний контроль цих вихідних характеристик окремих каскадів. Можливе лише вимірювання значень вихідної характеристики самого генератора за довільних наборів значень первинних факторів як ЗГ, так і ПП. З врахуванням такої багатокаскадності генератора НВЧ для моделювання потужності  $P$  можна використати описану в 5.1 методику побудови гібридних статистично-детермінованих моделей.

Розглянемо застосування вказаної методики для моделювання роботи генератора НВЧ, для якого передавальна функція має вигляд (5.45), де  $\varphi_1(\mathbf{X})$ ,  $\varphi_2(\mathbf{X})$  – невідомі функції, які моделюють ЗГ і ПП відповідно. Тоді вимірні значення модельованої потужності за деяких фіксованих значень первинних факторів ЗГ ( $\mathbf{X}_{10}$ ) і ПП ( $\mathbf{X}_{20}$ ) дорівнює

$$P_0 = \varphi_{10} \cdot \varphi_{20}, \quad (5.46)$$

де  $\varphi_{i0} = \varphi_i(\mathbf{X}_{i0})$ ,  $i = 1, 2$  – фіксовані, але не відомі значення функції  $\varphi_i$ .

Утворимо допоміжні функції  $P_1 = \varphi_1(\mathbf{X}_1) \cdot \varphi_{20}$ ,  $P_2 = \varphi_2(\mathbf{X}_2) \cdot \varphi_{10}$ , з яких маємо

$$\varphi_1(\mathbf{X}_1) = P_1(\mathbf{X}_1) / \varphi_{20}, \quad \varphi_2(\mathbf{X}_2) = P_2(\mathbf{X}_2) / \varphi_{10}. \quad (5.47)$$

Підставивши (5.47) в (5.45), отримаємо  $P = P_1(\mathbf{X}_1) \cdot P_2(\mathbf{X}_2) / (\varphi_{10} \cdot \varphi_{20})$ , звідки з врахуванням (5.46) знаходимо

$$P = P_1(\mathbf{X}_1) \cdot P_2(\mathbf{X}_2) / P_0. \quad (5.48)$$

Для отримання статистично-детермінованої моделі виду (5.48) необхідно побудувати поліноміальні моделі для функцій  $P_i(\mathbf{X}_i)$ ,  $i=1,2$  реалізацією  $2^{l_1} + 2^{l_2}$  дослідів за схемою ПФЕ ( $l_1, l_2$  – кількість первинних факторів для ЗГ і ПП відповідно). З цією метою насамперед необхідно визначити ті первинні фактори ЗГ і ПП, які мають бути врахованими в цих моделях.

На основі експертного опитування спеціалістів, які мають досвід попередніх досліджень конструкції і технології складання відповідачів, було встановлено, що значно впливати на вихідну характеристику  $P$  – потужність вихідного ВЧ-сигналу можуть наступні параметри вузлів кожного з каскадів генератора передатчика.

#### 1. Параметри вузлів ЗГ:

- а) зусилля притиснення анодного плунжера до анодної цанги;
- б) діаметр корпусу катодно-сіткового контуру;
- в) діаметр стакана катодно-сіткового контуру;
- г) середнє арифметичне відхилення профілю поверхні стакана катодно-сіткового контуру;
- д) зусилля притиснення великого плунжера;
- е) середнє арифметичне відхилення профілю поверхні корпусу анодного контуру.

#### 2. Параметри вузлів ПП:

- а) діаметр стакана катодно-сіткового контуру;
- б) діаметр корпусу катодно-сіткового контуру;
- в) середнє арифметичне відхилення профілю поверхні корпусу анодного контуру;
- г) зусилля притиснення великого плунжера до стінки контуру.

Дані про розмірності, рівні і інтервали перерахованих первинних факторів, що використовуються при проведенні ПФЕ, наведені в таблиці 5.1.

Введемо кодовані безрозмірні значення первинних конструкторсько-технологічних факторів:

Таблиця 5.1.

## Рівні і інтервали варіювання первинних факторів

| №<br>пп | Первинні фактори   | Рівні варіювання |        |          | Інтервал<br>варіювання |
|---------|--|------------------|--------|----------|------------------------|
|         |  | верхній          | нижній | основний |                        |
| 1.      | Зусилля притиснення анодного плунжера до анодної цанги ЗГ $q_1 \cdot 10^2$ , Н                               | 350              | 150    | 250      | 100                    |
| 2.      | Діаметр корпусу катодно-сіткового контуру ЗГ $q_2 \cdot 10^{-3}$ , м   | 33,10            | 33,03  | 33,065   | 0,035                  |
| 3.      | Діаметр стакана катодно-сіткового контуру ЗГ $q_3 \cdot 10^{-3}$ , м   | 32,02            | 32,00  | 32,01    | 0,01                   |
| 4.      | Середнє арифметичне відхилення профілю поверхні стакана катодно-сіткового контуру ЗГ $q_4 \cdot 10^{-6}$ , м | 2,50             | 10,00  | 6,25     | 3,75                   |
| 5.      | Зусилля притиснення великого плунжера до стінки контуру ЗГ $q_5 \cdot 10^2$ , Н                              | 700              | 500    | 600      | 100                    |
| 6.      | Середнє арифметичне відхилення профілю поверхні корпусу анодного контуру ЗГ $q_6 \cdot 10^{-6}$ , м          | 0,32             | 1,25   | 0,785    | 0,465                  |
| 7.      | Діаметр стакана катодно-сіткового контуру ПП $Q_1 \cdot 10^{-3}$ , м   | 32,02            | 32,00  | 32,01    | 0,01                   |
| 8.      | Діаметр корпусу катодно-сіткового контуру ПП $Q_2 \cdot 10^{-3}$ , м   | 33,10            | 33,03  | 33,065   | 0,035                  |
| 9.      | Середнє арифметичне відхилення профілю поверхні корпусу анодного контуру ПП $Q_3 \cdot 10^{-6}$ , м          | 0,165            | 0,630  | 0,395    | 0,235                  |
| 10.     | Зусилля притиснення великого плунжера до стінки контуру ПП $Q_4 \cdot 10^2$ , Н                              | 700              | 500    | 600      | 100                    |

а) задавального генератора

$$x_1 = \frac{q_1 - 250 \cdot 10^{-2}}{100 \cdot 10^{-2}}, \quad x_2 = \frac{q_2 - 33,065 \cdot 10^{-3}}{0,035 \cdot 10^{-3}}, \quad x_3 = \frac{q_3 - 32,01 \cdot 10^{-3}}{0,01 \cdot 10^{-3}},$$

$$x_4 = \frac{q_4 - 6,25 \cdot 10^{-3}}{3,75 \cdot 10^{-2}}, \quad x_5 = \frac{q_5 - 600 \cdot 10^{-2}}{100 \cdot 10^{-2}}, \quad x_6 = \frac{q_6 - 0,785 \cdot 10^{-6}}{0,465 \cdot 10^{-6}},$$
(5.49)

б) підсилювача потужності

$$Z_1 = \frac{Q_1 - 32,01 \cdot 10^{-2}}{0,01 \cdot 10^{-3}}, \quad Z_2 = \frac{Q_2 - 33,065 \cdot 10^{-3}}{0,035 \cdot 10^{-3}},$$

$$Z_3 = \frac{Q_3 - 0,395 \cdot 10^{-6}}{0,235 \cdot 10^{-2}}, \quad Z_4 = \frac{Q_4 - 600 \cdot 10^{-2}}{100 \cdot 10^{-2}}.$$

З метою визначення мінімального числа повторень кожного досліду декількома складальниками, які працюють на різних робочих місцях з встановленою на них апаратурою, було проведене складання 50-и відповідачів зі значеннями первинних факторів на верхніх рівнях інтервалів варіювання.

Після складання кожного відповідача вимірювалась потужність вихідного сигналу  $P$ . Результати вимірювань зведені в таблицю 5.2.

Для перевірки нормальності розподілу результатів проведеного експерименту застосовувався критерій  $\chi^2$  Пірсона, для чого знаходяться наступні характеристики цього розподілу:

- емпіричні середні  $\bar{P} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m m_i P_i = 705$  Вт,
- емпірична дисперсія  $\sigma_{emn}^2 = \sum_{i=1}^m (\bar{P} - P_i)^2 = 654,08$  Вт<sup>2</sup>,
- Емпіричне середнє квадратичне відхилення  $\sigma_{emn} = 35,58$  Вт.

Далі перевіряється гіпотеза про те, що результати вимірювань підпорядковуються нормальному закону розподілу з математичним сподіванням  $\mu = 705$  Вт і дисперсією  $\sigma_{emn}^2 = 654,08$  Вт<sup>2</sup> (рис. 5.5).

З цією метою вісь  $P$  розбивалась на 12 інтервалів, два з яких (лівий і правий) нескінченні, а решта 10 мають довжину 10, причому ліва границя лівого з них – точка з координатою 655.

Таблиця 5.2.

## Результати вимірювань потужності вихідного ВЧ-сигналу ЛВ

| Значення потужності сигналу $P$ , Вт                                |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 660   | 670 | 680 | 690 | 700 | 710 | 720 | 730 | 740 | 750 | 760 |
| Кількість зареєстрованих значень потужності вихідного сигналу $m_i$ |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 4   | 5   | 0   | 7   | 9   | 9   | 7   | 0   | 5   | 4   | 0   |

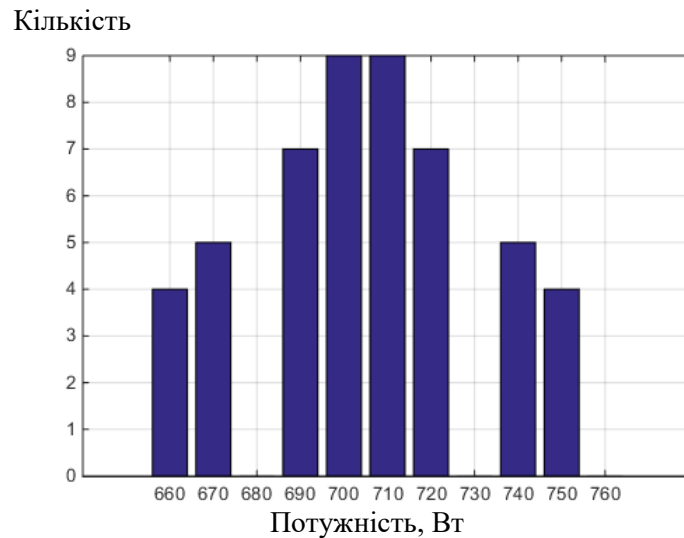


Рис. 5.5. Гістограма розподілу вимірених значень потужності

Обчисливши імовірність  $\rho_i$  попадання нормально розподіленою випадкової величини з вказаними параметрами в кожен такий  $i$ -й інтервал, знаходимо значення критерію

$$\chi^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{12} (m_i - m\rho_i^2) / \rho_i = 10,10.$$

Оскільки знайдене за таблицею [37] критичне значення для критерію  $\chi^2$  дорівнює  $\chi^2 = 31,3$ , що більше обчисленого значення критерію, то з надійністю

висновку 0,999 перевіркою нормальний розподіл добре узгоджується з результатами експерименту.

З врахуванням нормальності розподілу можна побудувати довірчі інтервали для середнього квадратичного відхилення  $\sigma$  з надійністю  $\gamma_2=0,99$  і математичного сподівання  $\mu$  з надійністю  $\gamma_1=0,99$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{емп}}(1-\xi) \leq \sigma \leq \sigma_{\text{емп}}(1+\xi), \\ |\bar{P} - M| \leq t_\gamma \sigma / \sqrt{n}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

де  $\xi=0,3$  знаходиться за таблицею [37] за заданим обсягом вибірки  $m=50$  і надійністю 0,99;

квантиль Стюдента  $t_\gamma = 2,58$  знаходиться за таблицею як аргумент функції Лапласа із умови  $\Phi(t) = 0,99/2$ .

Припускаючи, що події, які полягають у тому, що виконуються нерівності (5.50) – незалежні, з надійністю  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = 0,98$  можна записати нерівність  $|M - \bar{P}| \leq t_\gamma (1 + \xi) \sigma / \sqrt{n}$ .

З останнього співвідношення з надійністю  $\gamma = 0,98$  і можна визначити таку мінімальну кількість реалізацій досліду  $n$ , яка необхідна, щоб середнє значення отриманих реалізацій величини  $P$  відрізнялось від істинного значення вимірювальної потужності не більше, ніж на задане число  $\delta$ . Припускаючи  $\delta = t_\gamma (1 + \xi) \sigma / \sqrt{n} = 40$ , знаходимо

$$n = \left[ \frac{t_\gamma^2 \sigma^2 (1 + \xi^2)^2}{\delta^2} \right] + 1 = [4,6] + 1 \approx 5.$$

Далі у відповідності з викладеною раніше методикою побудови гібридної статистично-детермінованої моделі роботи генератора НВЧ утворюється допоміжна функція

$$P_1 = \Phi_1 \Phi_{20}, \quad (5.51)$$

де  $\Phi_{20} = (+1, +1, +1, +1)$ . Це означає, що під час всього експерименту параметри деталей ПП мають верхні рівні, що відповідають  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = +1$ .

За допомогою ПФЕ визначається поліноміальне представлення функції (5.51) виду (5.4), де в якості кодованих первинних факторів приймаються  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  (5.49). Стратегія проведення ПФЕ типу  $2^6$  представляється у вигляді матриці (табл. В.1 додатку В). Тут в стовпцях 2...7 вказуються значення первинних факторів, в стовпцях 8...22 – значення парних впливів.

Причому замість кодованих значень  $+1$  або  $-1$  у всіх стовпцях 2...22 використовуються відповідні їх позначення «+» або «-». Перевірка умов симетричності, нормування і ортогональності матриць ПФЕ типу  $2^6$  показує, що побудована матриця задовольняє ці умови.

Для виключення впливу на результати експерименту помилок, викликаних зовнішніми умовами, наприклад, зміною температури навколишнього середовища, дрейфом параметрів вимірювальної установки і т.д., досліди необхідно рандомизувати в часі. Рандомизація порядку проведення дослідів АПЕ забезпечувалась використанням датчика випадкових чисел.

Кожен дослід був реалізований п'ятикратно з реєстрацією результатів вимірювань в стовпцях 23...27 табл. В.1. Після цього для кожного  $n$ -го дослідів шукали середнє значення модельованої характеристики  $\bar{P}_1^{(6)}$  (стовпець 28 таблиці В.1) і для кожного з 64 дослідів обраховуються величини дисперсій  $\sigma^2 \{P_1^{(6)}\}$  цієї характеристики (стовпець 29 таблиці В.1 додатку В). Перевірка гіпотези однорідності цих дисперсій за допомогою критерію Кохрена показала можливість її застосування.

Далі вираховували дисперсію відтворюваності проведеного ПФЕ

$$\sigma_{P_1} = \frac{1}{64} \sum_{n=1}^{64} \sigma \{ \bar{P}_1^{(6)} \} = 151,56 \quad \text{Вт} \quad \text{за} \quad \text{числа} \quad \text{ступенів} \quad \text{вільності}$$

$$(n-1) \cdot 2^4 = (5-1) \cdot 64 = 856.$$



За наведеними в таблиці експериментальними і розрахунковими даними знаходили коефіцієнти полінома (5.4)

$$b_0^{(1)} = 452,81, \quad b_{12}^{(1)} = 0, \quad b_{23}^{(1)} = 0, \quad b_{34}^{(1)} = -0,31, \quad b_{45}^{(1)} = 0,94, \quad b_{56}^{(1)} = -0,31,$$

$$b_1^{(1)} = 6,56, \quad b_{13}^{(1)} = 0,94, \quad b_{24}^{(1)} = 0, \quad b_{35}^{(1)} = 0,31, \quad b_{46}^{(1)} = 0,31,$$

$$b_2^{(1)} = 0, \quad b_{14}^{(1)} = -0,31, \quad b_{25}^{(1)} = 0, \quad b_{36}^{(1)} = 0,96,$$

$$b_3^{(1)} = 11,56, \quad b_{15}^{(1)} = 0,31, \quad b_{26}^{(1)} = 0,$$

$$b_4^{(1)} = 15,94, \quad b_{16}^{(1)} = 0,94,$$

$$b_5^{(1)} = 49,06,$$

$$b_6^{(1)} = 163,44.$$

Далі проводилась перевірка значимості коефіцієнтів. З цією метою необхідно знайти величину довірчого інтервалу  $\Delta b$ , спільного для всіх вказаних коефіцієнтів даного ПФЕ типу  $2^6$ ,

$$\Delta b = t_\gamma \sigma\{b\},$$

де  $\sigma\{b\} = \sqrt{\sigma_{P_1}^2/64} = 1,54$  – середнє квадратичне відхилення коефіцієнтів в моделі (5.4);

$t_\gamma = 1,96$  при 95% довірчої імовірності і знайденому числі ступенів вільності 256. Отже, величина довірчого інтервалу дорівнює  $\Delta b = 1,96 \cdot 1,54 = 4,64$ .

Порівнянням кожного з знайдених коефіцієнтів поліному (5.4) з величиною довірчого інтервалу знаходяться ті з них, які за абсолютною величиною не перевищують  $\Delta b$ . Ці коефіцієнти полінома приймаються незначними. Це означає, що можна знехтувати впливом відповідного первинного фактора або взаємодією факторів і, отже, виключити їх з шуканої моделі. Оскільки значимими є наступні коефіцієнти  $b_0^{(1)}$ ,  $b_1^{(1)}$ ,  $b_3^{(1)}$ ,  $b_4^{(1)}$ ,  $b_5^{(1)}$ ,  $b_6^{(1)}$ , то шукана функція  $P_1$  має вигляд

$$P_1 = 452,81 + 6,56x_1 + 11,56x_3 + 15,94x_4 + 49,06x_5 + 163,44x_6. \quad (5.52)$$

Далі перевірялась адекватність отриманої моделі, з врахуванням того, що під адекватністю моделей процесів складання розуміється встановлення їх придатності у даних конкретних умовах, тобто по відношенню до отриманих експериментальних даних. З цією метою насамперед розраховуються величини  $\hat{P}_1^{(1)}$  – значення модельованої вихідної характеристики  $P_1$ , які передбачені отриманою математичною моделлю (5.52), підстановкою у неї кодованих значень факторів (стовпець 30 таблиці В.1). Далі для кожного  $n$ -го дослідження розраховується абсолютна величина нев'язки  $\Delta P_1^{(n)} = \left| \hat{P}_1^{(n)} - \bar{P}_1^{(n)} \right|$  (стовпець 31 таблиці В.1). Величина  $S$  – суми квадратів нев'язок  $\left( \Delta P_1^{(n)} \right)^2$ , помножених на відповідне число повторень кожного дослідження, в даному випадку дорівнює

$$S = m \sum_{n=1}^{14} \left( \Delta P_1^{(n)} \right)^2 = 2548,00.$$

Дисперсія адекватності  $\sigma_{ad}^2$  при числі ступенів вільності  $2^l - l = 64 - 6 = 58$  ( $l$  – число значимих коефіцієнтів  $b$  включаючи  $b_0$ ) дорівнює  $\sigma_{ad}^2 = S/58 = 43,93$ .

Розрахункова величина критерію Фішера  $F_{\phi}^+ = \sigma_{ad}^2 / S_{P_1} = 0,30$ , а таблична величина цього критерію, що визначена при 95% довірчій імовірності зі ступенями вільності 58 для чисельника і 256 для знаменника має значення  $F_{\phi m} = 1,4$ . Оскільки при цьому  $F_{\phi m} > F_{\phi}^+$ , то отримана математична модель може бути визнана адекватною.

Через повну аналогічність досліджень, необхідних для побудови допоміжної функції  $P_2 = \phi_{10} \cdot \phi_2$  описаним вище, приводимо лише матрицю, яка формує стратегію ПФЕ типу  $2^4$ , а також розрахункові і експериментальні дані, отримані під час її реалізації (таблиця В.2 додатку В).

Отримана адекватна модель має вигляд

$$P_2 = 476,87 - 5,62Z_1 + 14,37Z_2 + 68,13Z_3 + 159,37Z_4 - 10,62Z_1Z_4 \quad (5.53)$$

За формулою 5.53 записуємо кінцевий вигляд модельованої функції потужності  $P$ , знаходячи з таблиці В.1 і В.2  $P_2 = 700$  Вт – значення потужності при  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = +1$ ;  $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = +1$ .

$$P = \frac{1}{700} (452,81 + 6,56x_1 + 11,56x_3 + 15,94x_4 + 49,06x_5 + 163,44x_6) \cdot (476,87 - 5,62z_1 + 14,37z_2 + 68,13z_3 + 159,37z_4 - 10,62z_1z_4).$$

Вираз же потужності через абсолютні змінні має вигляд [113]

$$P = (-622,537 + 0,0094q_2 + 1651,4286q_3 + 3643,429q_4 + 49,06q_5 + 351,484 \cdot 10^6 q_6) \cdot (-46,904 - 802,857Q_1 + 586,531Q_2 + 2780816,33Q_3 + 0,228Q_4 - 0,0152 \cdot 10^{-5} Q_1Q_4). \quad (5.54)$$

5.4.2. Виявлення, аналіз і шляхи усунення впливу основних дестабілізуючих первинних факторів. Проведені дослідження показали, що факторами, які найсуттєвіше впливають на модельовану функцію потужності вихідного ВЧ-сигналу, є наступні параметри вузлів ЗГ і ПП: середнє квадратичне відхилення профілю поверхні корпусу анодного контуру ( $q_6, Q_3$ ); зусилля притиснення великого плунжера до стінки контуру ( $q_5, Q_4$ ). Порівняння коефіцієнтів впливу цих факторів на величину потужності факторів, показує, що перші в 3...30 разів більше.

Отже, буди виявлені два пріоритетні фактори, що найсуттєвіше впливають на величину потужності вихідного ВЧ-сигналу ЛВ. З метою дослідження можливості зміни значень цих факторів в процесі експлуатації і їх дестабілізуючого впливу на величину вихідної потужності на підприємстві-виробнику була проведена нарада фахівців, де було встановлено наступне.

У діапазоні НВЧ в якості коливальних систем застосовуються об'ємні резонатори, в яких на потужність суттєво впливає перехідний опір контактів поршня з корпусом резонатора і з анодною цангою. Для забезпечення надійного контакту необхідно мати внутрішню поверхню корпусу резонатора і зовнішню

– анодної цанги, достатньо високого класу чистоти. Однак при частому переналаштуванні контуру резонатора виникає неоднорідне вироблення поверхні контактів через витирання шару срібла, яким покриті плунжери, що приводить до великого розкиду величини перехідного опору контактів по довжині їх переміщення. Через це мають місце значні відхилення електричних параметрів резонатора, зокрема, вихідної потужності в процесі експлуатації.

Отже, було встановлено, що розглянуті пріоритетні фактори і можуть дестабілізувати величину вказаної потужності. Дослідження ж можливості підтримки значень вказаних факторів на певному рівні протягом всього терміну експлуатації показало, що для першого з них виконання такої вимоги досягається важко і дорого, а регулювання зусилля притиснення великого плунжера до стінки корпусу взагалі не передбачене в конструкції. Крім того, навіть забезпечення вказаних вимог не усуває витирання тонкого шару срібла на поверхні плунжера. У зв'язку з цим подальші заходи із забезпечення вказаних вимог на розглянуті дестабілізуючі фактори були визнані малоефективними.

Для виконання умови працездатності розробники і спеціалісти примушували завод звужувати допуски на деталі конструкції, але це не принесло результатів. Для відповіді на питання, а якими ж мають бути допуски на геометричні і силові параметри конструкції резонатора, щоб забезпечувалась умова ТУ за потужністю

$$P \geq P_0. \quad (5.55)$$

де  $P_0=600$  Вт – мінімальне значення потужності, яке відповідає вимогам ТУ, і чи реально їх досягнути, була поставлена оптимізаційна ОЗ синтезу допусків типу (4.25). Для моделі (5.34) була розв'язана задача параметричного синтезу. Обмеженнями оптимізаційної задачі є умова (5.55). Розв'язок показав, що для досягнення умов працездатності допуски на деякі з параметрів  $q_1, q_2, \dots, q_6, Q_1, Q_2, \dots, Q_4$  мають бути дуже малими. Наприклад, забезпечення на

практиці середнього арифметичного відхилень профілю поверхні корпусу анодного контуру в межах 0,395...0,556 мкм було неможливо. Крім того, під час експлуатації рух плунжера здійснює витирання шару срібла, і збільшує відхилення профілю. Отже, що поставлена задача не має практичного розв'язку, тобто в даній конструкції при заданій технології виробництва неможливо забезпечити умову працездатності за критерієм потужності (5.18). У зв'язку із цим запропоновано зміни конструкції прийомопередавача ПП.

Таблиця 5.3.

| №<br>пп | Первинні фактори   | Рівні варіювання |        |
|---------|--|------------------|--------|
|         |  | верхній          | нижній |
| 1.      | Зусилля притиснення анодного плунжера до анодної цанги ЗГ $q_1 \cdot 10^{-2}$ , Н                            | 349              | 159    |
| 2.      | Діаметр корпусу катодно-сіткового контуру ЗГ $q_2 \cdot 10^{-3}$ , м   | 33,06            | 33,08  |
| 3.      | Діаметр стакана катодно-сіткового контуру ЗГ $q_3 \cdot 10^{-3}$ , м   | 32,01            | 32,02  |
| 4.      | Середнє арифметичне відхилення профілю поверхні стакана катодно-сіткового контуру ЗГ $q_4 \cdot 10^{-6}$ , м | 6,25             | 8,17   |
| 5.      | Зусилля притиснення великого плунжера до стінки контуру ЗГ $q_5 \cdot 10^{-2}$ , Н                           | 599              | 699    |
| 6.      | Середнє арифметичне відхилення профілю поверхні корпусу анодного контуру ЗГ $q_6 \cdot 10^{-6}$ , м          | 0,78             | 1,07   |
| 7.      | Діаметр стакана катодно-сіткового контуру ПП $Q_1 \cdot 10^{-3}$ , м   | 32,00            | 32,01  |
| 8.      | Діаметр корпусу катодно-сіткового контуру ПП $Q_2 \cdot 10^{-3}$ , м   | 33,06            | 33,08  |
| 9.      | Середнє арифметичне відхилення профілю поверхні корпусу анодного контуру ПП $Q_3 \cdot 10^{-6}$ , м          | 0,395            | 0,556  |
| 10.     | Зусилля притиснення великого плунжера до стінки контуру ПП $Q_4 \cdot 10^{-2}$ , Н                           | 599              | 699    |

Конструкція резонатора була спрощена введенням діелектричної колби, діелектричної основи і срібних сегментів, оскільки при використанні діелектричного стакана відпадає необхідність центрування поршня, знижуються вимоги до класу точності виготовлення поверхнею металічної колби і корпусу резонатора, а виключення безпосереднього контакту поршня з корпусом резонатора дає змогу знизити вимоги до чистоти внутрішньої поверхні корпусу резонатора і металічного стакана. Отже, у новій контактної-безконтактній конструкції ЛВ вдасться усунути дестабілізуючі фактори, що впливають на величину потужності вихідного ВЧ-сигналу.

Тут необхідно відмітити наступну обставину. Аналіз таблиць В.1 і В.2 додатку В показує, що виміряні під час АПЕ значення вихідної потужності ЛВ старої конструкції застосовуються у достатньо широких межах, від 210 до 740 Вт. Причому, лише частина з них відповідає вимогам ТУ, згідно яких  $P \geq 600$  Вт.

Така ситуація пояснюється тим, що при постановці експерименту збираються відповідачі зі всіма можливими сполученнями значень геометричних і силових параметрів, а найнесприятливіші такі сполучення і дають значення потужності, що лежать поза меж ТУ.

Така ж ситуація можлива і на виробництві, оскільки зміна геометричних і силових параметрів в експерименті відбувалась в межах, передбачених ТУ на них. Однак на виробництві робочий, який проводить складання відповідачів, на основі свого досвіду, а часто-густо і на «дотик», замінює окремі деталі і вузли так, щоб значення вихідної потужності відповідача досягло заданого рівня. Очевидно, що таке складання неефективне, по-перше, внаслідок своєї трудомісткості, а по-друге, в такій ситуації, як правило, потужність приймає значення поблизу нижньої границі допуску. З цієї причини окрім виробничої модифікації конструкції відповідача необхідно розробити програму цілеспрямованого його складання.

5.4.3. Оптимізація конструкторських параметрів моделі за критерієм забезпечення заданого рівня потужності в модифікованій конструкції. Для модифікованої конструкції ЛВ у відповідності з 5.1 також була побудована статистично-детермінована модель.

Експертне опитування спеціалістів і досвід попередніх досліджень показали, що найбільше впливають на вихідну характеристику  $P$  – потужність вихідного ВЧ-сигналу у новій конструкції ЛВ наступні первинні фактори:

1. Геометричні і силові параметри вузлів ЗГ:

- а) зусилля притиснення анодного плунжера до анодної цанги;
- б) діаметри корпусу катодно-сіткового контуру;
- в) діаметр стакана катодно-сіткового контуру;
- г) середнє арифметичне відхилення профілю поверхні колби катодно-сіткового контуру;
- д) середнє арифметичне відхилення профілю поверхні по колу трубки анодної цанги;
- е) діаметр стакана анодного контуру.

2. Геометричні і силові параметри вузлів ПП:

- а) зусилля притиснення анодного плунжера до анодної цанги;
- б) діаметр корпусу катодно-сіткового контуру;
- в) діаметр колби катодно-сіткового контуру;
- г) середнє арифметичне відхилення профілю поверхні колби катодно-сіткового контуру.

Дані про розмірності, рівні і інтервали варіювання перерахованих факторів, використаних при проведенні АПЕ, зведені в таблицю 5.4.

Побудова моделі нової конструкції ЛВ проводилась у повній відповідності з методикою, викладеною у 5.2, аналогічно детально описаному в 5.3. випадку [267]. В результаті був отриманий наступний вид залежності потужності  $P$  від наведених в таблиці 5.4 факторів

$$P = (8,851 + 0,109q_1 - 2,8 \cdot 10^4 q_4) \cdot (3,12Q_1 + 10^5 (0,225 + 1,249Q_2 - 8,12Q_3)) \quad (5.56)$$

Таблиця 5.4.

## Рівні і інтервали варіювання первинних факторів

| №<br>пп | Первинні фактори<br>(геометричні і силові параметри)   | Рівні варіювання |        |          | Інтервал<br>варіювання |
|---------|--|------------------|--------|----------|------------------------|
|         |  | верхній          | нижній | основний |                        |
| 1       | Зусилля притиснення анодного плунжера до анодної цанги ЗГ $q_1 \cdot 10^{-2}$ , Н                                    | 350              | 150    | 250      | 100                    |
| 2       | Діаметр корпусу катодно-сіткового контуру ЗГ $q_2 \cdot 10^{-3}$ , м   | 33,100           | 33,030 | 33,065   | 0,035                  |
| 3       | Діаметр стакана катодно-сіткового контуру ЗГ $q_3 \cdot 10^{-3}$ , м   | 32,02            | 32,02  | 32,01    | 0,01                   |
| 4       | Середнє арифметичне відхилення профілю поверхні стакана катодно-сіткового контуру ЗГ $q_4 \cdot 10^{-6}$ , м         | 2,50             | 10,00  | 6,25     | 3,75                   |
| 5       | Середнє арифметичне відхилення профілю поверхні по колу трубки анодної цанги ЗГ $q_5 \cdot 10^{-6}$ , м              | 2,50             | 10,00  | 6,25     | 3,75                   |
| 6       | Діаметр стакану анодного контуру ЗГ $q_6 \cdot 10^{-3}$ , м  | 31,28            | 31,14  | 31,21    | 0,07                   |
| 7       | Зусилля притиснення анодного плунжера до анодної цанги ПП $Q_1 \cdot 10^{-2}$ , Н                                    | 350              | 150    | 250      | 100                    |
| 8       | Діаметр корпусу катодно-сіткового контуру ПП $Q_2 \cdot 10^{-3}$ , м   | 33,100           | 33,030 | 33,065   | 0,035                  |
| 9       | Діаметр стакана катодно-сіткового контуру ПП $Q_3 \cdot 10^{-3}$ , м   | 32,02            | 32,00  | 32,01    | 0,01                   |
| 10      | середнє арифметичне відхилення профілю поверхні корпусу стакана катодно-сіткового контуру ПП $Q_4 \cdot 10^{-6}$ , м | 2,50             | 10,00  | 6,25     | 3,75                   |



Встановлені залежності потужності вихідного ВЧ-сигналу від геометричних і силових параметрів відповідача дозволяє ставити задачу визначення таких допусків на ці фактори, за яких забезпечувалось би виконання умови на розглянуту вихідну характеристику (5.18).

Розглянута ОЗ синтезу може бути сформульована наступним чином. При заданих номінальних значеннях геометричних і силових параметрів  $\mathbf{X}_0 = [q_{20}, q_{40}, Q_{10}, Q_{20}, Q_{30}]$  необхідно визначити такі допустимі їх відхилення  $\delta_i, i = \overline{1,5}$  від номінальних значень, щоб в отриманому паралелепіпеді

$$\mathbf{P}_5 = \left\{ \mathbf{X} = [x_i]_{1 \times 5} \in \mathbb{R}^5 : x_{i0} - \delta_i/2 \leq x_i \leq x_{i0} + \delta_i/2, i = \overline{1,5} \right\}$$

виконувалась умова (5.55) на вихідну характеристику.

Оскільки виходячи з міркувань економії допуски на всі параметри бажано максимально розширити, то задача є багатокритеріальною, а множина частинних критеріїв може бути сформульована у вигляді  $-\delta_i \rightarrow \min, i = \overline{1,5}$ . Задача багатокритеріальної оптимізації була зведена до однокритеріальної шляхом скаляризації  $\tilde{F}_1 = -\sum_{i=1}^5 w_i \delta_i \rightarrow \min$ , де  $w_i \geq 0, \sum_{i=1}^5 w_i = 1$  – нормовані додатні числа, що визначаються із виробничих або економічних міркувань. Приймавши елементи вектора вагових коефіцієнтів  $\mathbf{W} = [w_i]_{1 \times 5}$  однаковими, маємо  $w_i = 0,2$ .

Іншим способом розв'язання задачі оптимізації було використання в якості цільової функції об'єму паралелепіпеду, утвореного допусками. В цьому разі задача зводиться до мінімізації функції  $\tilde{F}_2 = -\prod_{i=1}^5 \delta_i \rightarrow \min$ . Отже, задача зводиться до визначення таких значень допусків  $\delta_i, i = \overline{1,5}$ , за яких досягається мінімум цільових функцій  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$  за умови виконання обмежень (5.55).

Для нової конструкції відповідача було проведено визначення допусків на геометричні і силові параметри відповідача, номінальні значення яких наведені в таблиці 5.5.

Таблиця 5.5

Номінальне значення геометричних і силових параметрів ЛВ

| $q_1 \cdot 10^{-2}, \text{Н}$ | $q_4 \cdot 10^{-6}, \text{м}$ | $Q_1 \cdot 10^2, \text{Н}$ | $Q_2 \cdot 10^{-3}, \text{м}$ | $Q_3 \cdot 10^{-3}, \text{м}$ |
|-------------------------------|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 250                           | 12,5                          | 250                        | 33,065                        | 32,01                         |

Обмеження на первинні фактори і вихідну характеристику відповідача згідно ТУ задавались системою нерівностей

$$\begin{aligned}
 P &\geq 600 \text{ Вт}, \\
 50 \cdot 10^{-2} &\leq q_1 \leq 450 \cdot 10^{-2}, \text{ Н}, \\
 5 \cdot 10^{-6} &\leq q_4 \leq 20 \cdot 10^{-6}, \text{ м}, \\
 50 \cdot 10^{-2} &\leq Q_1 \leq 450 \cdot 10^{-2}, \text{ Н}, \\
 32,995 \cdot 10^{-3} &\leq Q_2 \leq 33,135 \cdot 10^{-3}, \text{ м}, \\
 31,91 \cdot 10^{-3} &\leq Q_3 \leq 32,11 \cdot 10^{-3}, \text{ м}.
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

Виходячи із заданих в ТУ обмежень на значення елементів вектора  $\mathbf{X} = [q_2, q_4, Q_1, Q_2, Q_3]$ , вихідна потужність ЛВ, підрахована за допомогою моделі (5.56), знаходиться в межах від 503,76 до 741,98 Вт, що продемонстровано на рис. 5.5. У разі, якщо потужність ЛВ є меншою 600 Вт, умова ТУ на вихідну характеристику не виконується і, отже працездатність не забезпечена.

Значення первинних факторів ЛВ, отримані при  $\delta_i$ , що доставляють мінімум однієї з функцій  $\tilde{F}_1$  і  $\tilde{F}_2$ , за різних наборів значень коефіцієнтів функцій  $w_i$ , для  $P_0 = 600$  Вт, наведені у таблиці 5.6. Обчислення виконувались в пакеті прикладних програм MATLAB. Програми і функції для реалізації оптимізаційної задачі синтезу допусків на первинні параметри конструкції ЛВ представлені в додатку В.3.

Остаточні в якості результатів були вибрані більш широкі інтервали, одержані при мінімізації цільової функції у вигляді згортки з рівнозначними ваговими коефіцієнтами окремих критеріїв.

Таблиця 5.6

## Оптимальні значення первинних факторів ЛВ

| Первинні фактори       | Критерій оптимальності  |        | Критерій оптимальності   |        |
|------------------------|---|--------|--|--------|
|                        | $\min_{\{\delta_i\}_{i=1}^5} \left( -\sum_{i=1}^5 w_i \delta_i \right) (w_i = 0,2, i = \overline{1,5})$ |        | $\min_{\{\delta_i\}_{i=1}^5} \left( -\prod_{i=1}^5 \delta_i \right)$ |        |
|                        | Границя множини значень   |        |  |        |
|                        | Нижня   | Верхня | Нижня  | Верхня |
| $q_1, H$               | 0,50  | 4,49   | 1,60   | 3,40   |
| $q_4 \cdot 10^{-6}, M$ | 8,549   | 16,401 | 8,38   | 15,88  |
| $Q_1, H$               | 0,50  | 4,49   | 1,60   | 3,40   |
| $Q_2 \cdot 10^{-3}, M$ | 33,01   | 33,11  | 33,03  | 33,10  |
| $Q_3 \cdot 10^{-3}, M$ | 31,935  | 32,083 | 31,95  | 32,06  |

Розв'язання прямої задачі, а саме чисельного моделювання значень потужності за встановленими за результатами оптимізації допусками показало, що вихідна потужність ЛВ знаходиться в межах від 600 до 631 Вт (рис. 5.5). Програма розв'язання прямої задачі визначення потужності відповідача в задачі забезпечення стабільності його потужності, представлена в додатку В.4.

Отже, шляхом оптимізації були визначені допуски на первинні фактори ЛВ, за яких гарантується відповідність потужності вихідного ВЧ-сигналу вимогам ТУ. Допуски виявились прийнятними для підприємства-виробника, і результати досліджень були впроваджені на ВАТ «Новатор».

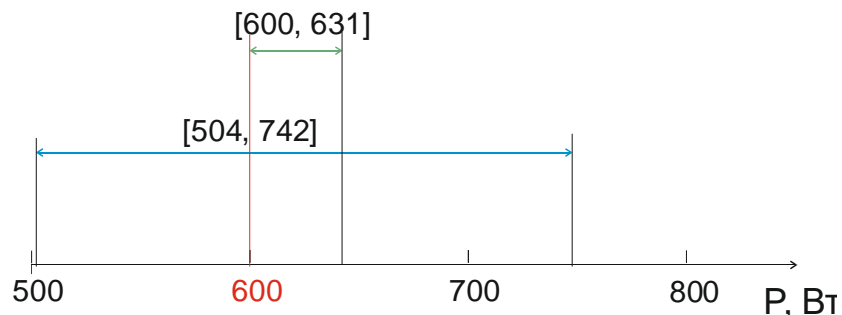


Рис. 5.5. Межі варіювання вихідної потужності ЛВ до і після оптимізації

## 5.5. Висновки до розділу

1. Вперше створено метод побудови гібридних статистично-детермінованих моделей, який відрізняється врахуванням детермінованих залежностей параметрів окремих підсистем при плануванні експерименту, що дає змогу в  $\prod_{i=1}^k 2^{l_i} / \sum_{i=1}^k 2^{l_i}$  разів зменшити обсяг необхідних експериментів, де  $l_i$

– кількість факторів впливу у  $i$ -й підсистемі машини.

2. Побудована гібридна математична модель формування потужності резонатора ЛВ під дією первинних факторів механічної природи, що дало змогу виявити пріоритетні фактори, які дестабілізують величину вихідної потужності. Обґрунтовано, що в наявній конструкції неможливо забезпечити його працездатність і запропоновано змінити конструкцію для усунення впливу негативних факторів.

3. Побудована гібридна статистично-детермінована модель формування потужності ЛВ під дією геометричних і силових характеристик для нової безконтактної конструкції.

4. Шляхом параметричного синтезу визначено область працездатності ЛВ у вигляді допустимих значень силових і геометричних параметрів резонатора ЛВ, дотримання яких забезпечує заданий рівень потужності згідно ТУ.

5. Розроблено метод ідентифікації нелінійних силових характеристик коливальних систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами, з представленням силових чинників, які діють на досліджувану систему у вигляді лінійної комбінації незалежних функцій із невідомими коефіцієнтами. Метод ґрунтується на аналітичному розв'язанні прямої задачі нелінійних коливань; зіставленні експериментально отриманих основних характеристик динамічного процесу коливальної системи із отриманим аналітичним розв'язком математичної моделі і розв'язанні СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів.

## ВИСНОВКИ

У результаті проведених теоретичних досліджень і результатів їх застосування для розв'язання поставлених науково-технічних задач у дисертаційній роботі вирішено важливу науково-прикладну проблему оцінювання міцності і зниження вібрацій МС на різних етапах їх створення на основі методів ОЗ. Розроблені методи, що ґрунтуються на ідентифікації їх пружно-інерційних, геометричних, фізико-механічних тощо параметрів застосовані для зниження вібрацій роторних систем і забезпечення міцності герметизованих керамічних конструкцій. Основні наукові результати роботи полягають у наступному.

1. Формалізовано задачі параметричної ідентифікації гнучких роторів і синтезу допусків на конструкторські параметри МС та (або) технологічні процеси їх виготовлення, виходячи з умови забезпечення заданих вимог на їх міцнісні і вібраційні характеристики, як ОЗ інтерпретації і синтезу, окреслено основні проблеми їх розв'язання.

2. Розроблено метод параметричної ідентифікації математичних моделей динаміки і міцності МС, що враховує ступінь їх ідеалізації та умови експлуатації, який, на відміну від існуючих, полягає у залученні пробних параметрів або режимів, що дає можливість підвищити ефективність моделювання і точність розрахунків. За допомогою методу визначено ФМХ матеріалів зі значним розкидом реальних значень і знайдено реальні пружно-інерційні характеристики ротора багатоступінчатого компресора ГТД, що дозволило дослідити АЧХ двигуна і пояснити походження всіх резонансів.

3. Отримала подальший розвиток теорія захисту машин від вібрацій за рахунок підвищення точності ідентифікації дисбалансів і пружно-інерційних характеристик гнучких роторів. Зокрема підвищено точність розрахунків лінійних дискретних ОЗ за рахунок достатньої оцінки величини похибки значень шуканих параметрів, яка враховує значення дисперсії вимірних параметрів, і оптимізації коефіцієнтів матриці за критерієм мінімуму числа обумовленості. Для досягнення достатньої точності розв'язків запропоновано

застосовувати лінійну фільтрацію ОНК з застосуванням методу головних компонент. Застосування методів дало змогу підвищити точність ідентифікації дисбалансів ротора компресора ГТД, що в результаті балансування дало змогу зменшити рівень його вібрацій у 2,5 рази. Ідентифіковано жорсткості і маси, приведені до прийнятої динамічної моделі ТНА, що дозволило відбалансувати гнучкий ротор на робочій частоті обертання у трьох площинах корекції, знизивши вібрації у 6 разів, амплітуди вібрацій опор – у 4 рази, статичні напруження в матеріалі валу – у 3,5 рази, а динамічні – у 3 рази.

4. Досліджено динамічні процеси у швидкісних гнучких роторах з зосередженими масами і науково обґрунтовано вибір найменш і найбільш «стійких» ділянок частот обертання шляхом урахування фізичного змісту обумовленості матриці коефіцієнтів впливу ротора, що дозволяє обирати оптимальний з позицій точності метод ідентифікації його дисбалансів за коефіцієнтами впливу і динамічними прогинами.

5. Розвинуто теорію експериментального оцінювання динамічних та міцнісних параметрів МС шляхом апроксимації емпіричної полімодальної щільності розподілу ймовірностей сумішшю унімодальних законів, що дозволяє за результатами вимірювань одержувати більш точні оцінки значень параметрів. Це дозволило виявити причини полімодальності розподілу дисбалансів партії компресорів ГТД та з більшою надійністю визначити характеристики міцності керамічних конструкцій.

6. Ґрунтуючись на методах ОЗ інтерпретації, розроблено розрахунково-експериментальний метод і засіб визначення ФМХ матеріалів, який відрізняється тим, що сполучну конструкцію з досліджуваного зразка матеріалу і зразка із пробного матеріалу нагрівають (охолоджують) з одночасною реєстрацією виниклих деформацій, що дозволяє визначати ФМХ при від'ємних температурах в експлуатаційному пружнодеформованому стані. За допомогою методу знайдено модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт лінійного температурного розширення компаунду при температурах від  $-60$  до  $-20^{\circ}\text{C}$ , що дало можливість ідентифікувати параметри моделі міцності електронних конструкцій «керамічний елемент-компаунд».

7. Розроблено метод ідентифікації нелінійних силових характеристик коливальних систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами, з у представленням силових чинників, які діють на досліджувану систему у вигляді лінійної комбінації незалежних функцій із невідомими коефіцієнтами; аналітичному розв'язанні прямої задачі нелінійних коливань; зіставленні експериментально отриманих основних характеристик динамічного процесу коливальної системи із отриманим аналітичним розв'язком математичної моделі і розв'язанні СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів.

8. Розроблено метод побудови гібридних статистично-детермінованих моделей структурно-складних МС, який відрізняється врахуванням детермінованих залежностей параметрів окремих підсистем при плануванні експерименту, що дозволило отримати математичну модель формування потужності літакового відповідача під впливом механічних чинників, здійснивши в 13 разів менше експериментів, ніж це було необхідно при використанні ПФЕ. Обґрунтовано необхідність зміни конструкції на безконтактну і знайдено допустимі значення геометричних і силових параметрів, які забезпечують заданий рівень потужності.

9. Розроблено метод параметричного синтезу конструкторських параметрів структурно-складних технічних систем, що базується на ОЗ міцності. Розроблений метод і побудована на його основі інженерна методика були застосовані для розрахунково-експериментального оцінювання міцності герметизованих конструкцій «керамічний елемент-компаунд», а також забезпечення працездатності вузла тертя літакового відповідача, що в результаті розрахунку оптимальних значень фізико-механічних, геометричних і силових параметрів дало змогу забезпечити міцність виробів.

10. Таким чином, у результаті проведених теоретичних і експериментальних досліджень у дисертаційній роботі вирішено важливу науково-прикладну проблему оцінювання міцності і зниження вібрацій МС на різних етапах їх створення на основі методів ОЗ.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамов О. В. Оптимальный параметрический синтез по критерию запаса работоспособности / О. В. Абрамов, Я. В. Катуева, Д. А. Назаров // Проблемы управления. – 2007. – № 6. – С. 64–69.
2. Абрамов О. В. Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности / О. В. Абрамов. – Москва : Наука, 1992. – 138 с.
3. Абрамович Ф. П. Решение нечетких систем линейных алгебраических уравнений LR-типа / Ф. П. Абрамович, М. А. Вагенкнехт, Я. И. Хургин // Методы и системы принятия решений. – Рига : РПИ, 1987. – С. 35–47.
4. Абросимов Н. А. Идентификация вязкоупругих характеристик композитных материалов по результатам экспериментально-теоретического анализа динамического поведения полусферических оболочек / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов, Н. А. Куликова // Прикладная механика и теоретическая физика. – 2006. – Т. 47. – №3. – С. 126–133
5. Адаптивные методы решения обратных задач геофизики : учеб. пособие / В. А. Кочнев. – Красноярск : ВЦ СО РАН, 1993. – 94 с.
6. Адлер Ю. П. Введение в планирование эксперимента / Ю. П. Адлер. – Москва : Металлургия, 1969. – 330 с.
7. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – Москва : Наука, 1976. – 279 с.
8. Алгоритмический анализ неустойчивых задач : тез. докл. Междунар. конф., посвященной памяти В. К. Иванова (г. Екатеринбург, 31 окт. – 5 нояб. 2011 г.) / Институт математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург, 2011. – 140 с.
9. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – Москва : Машиностроение, 1988. – 280 с.



10. Алтунин А. Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях : монография / А. Е. Алтунин, М. В. Семухин. – Тюмень : изд-во Тюмен. гос. ун-та, 2000. – 352 с.

11. Андрушевский Н. М. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений: Учебное пособие / Н. М. Андрушевский. – Москва : издат. отд. факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова ; МАКС Пресс, 2008. – 71 с.

12. Аникеева О. В. Разработка метода робастной оптимизации технологических машин при совместном синтезе параметров и допусков на них / О. В. Аникеева // Инженерный вестник Дона, – №4 – 2016 Режим доступа [http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_144\\_anikeeva.pdf\\_3a7b71405e.pdf](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_144_anikeeva.pdf_3a7b71405e.pdf)

13. Апраушева Н. Н. Об унимодальности простейшей гауссовой смеси. / Н. Н. Апраушева, С. В. Сорокин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 5. – С. 838–846.

14. Аудзе П. П. Новый подход к планированию многофакторных экспериментов / П. П. Аудзе, В. О. Эглайс // Вопросы динамики и прочности. – 1977. – Вып. 35. – С. 104–107.

15. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения / А. М. Ахтямов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 272 с.

16. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – Москва : Наука, 1965. – 560 с.

17. Бакушинский А. В. Итеративные методы решения некорректных задач / А. В. Бакушинский, А. В. Гончарский. – Москва : Наука, 1989. – 197 с.

18. Балякин В. Б. Методика определения коэффициента жёсткости упругих элементов опор роторов авиационных газотурбинных двигателей / В. Б. Балякин, И. С. Барманов // Известия Самарского научного центра РАН. – 2013. – Т. 15. – №4-1. С. 213 –217.

19. Банах Л. Я. Условия разбиения системы дифференциально-алгебраических уравнений на слабосвязанные подсистемы / Л. Я. Банах, А. С. Горобцов, О. К. Чесноков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46. – №. 12. – С. 2223–2227.

20. Бахвалов Л. А. Применение методов математического планирования эксперимента при анализе радиоэлектронных схем / Л. А. Бахвалов // Методы разработки РЭА: Сб. I / МДНТП им. Ф. Э. Дзержинского. – 1970. – С. 23–26.
21. Бахвалов Н. С. Численные методы: Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Москва : Наука, 1973. – 631 с.
22. Белман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Белман. – Москва, 1954. – 300 с.
23. Богданович З. П. Принятие сложных многокритериальных решений в экономических системах / З. П. Богданович, А. И. Юхименко. – Киев : АН УССР; Ин-т кибернетики, 1971. – 11 с.
24. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – Москва : Наука, 1974. – 501 с.
25. Божко А. Е. Резонансные виброиспытательные системы / А. Е. Божко, Е. А. Личкатый, О. Ф. Полищук и др. Под ред. Божко А.Е.; АН Украины, Ин-т проблем машиностроения.– Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
26. Болдырев А. В. Оптимизация тонкостенной каркасированной конструкции с ограничениями по прочности и жесткости / А. В. Болдырев, В. А. Комаров // Вестник СГАУ. – 2006. – №1. – С. 42–47
27. Бородачев Н. А. Основные вопросы теории точности производства / Н. А. Бородачев. – Москва : Изд-во АН СССР, 1950. – 416 с.
28. Бражко А. И. Исследование и разработка методов уравнивания роторов авиадвигателей с применением ЭВМ : автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук : 05.07.04 / А. И. Бражко ; Моск. авиац. ин-т им. Серго Орджоникидзе. – Москва, 1975. – 20 с.
29. Бруевич Н. Г. Надежность, долговечность, точность / Н. Г. Бруевич // О надежности сложных технических систем. – Москва : Сов. радио, 1966. – С. 113–118.

30. Бурмистрова О. В. О приближении функции выплат смесью нормальных распределений / О. В. Бурмистрова // - Вестник АГТУ. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011, №1. – С. 162–165
31. Васильев А. В. Коротковолновое солнечное излучение в атмосфере Земли. Расчеты. Измерения. Интерпретация / А. В. Васильев, И. Н. Мельникова. – Санкт-Петербург : НИИХ СПбГУ, 2002. – 388 с.
32. Васильев В. И. Комбинированный алгоритм оптимальной сложности / В. И. Васильев, А. И. Шевченко // Праці міжнар конф. "Штучний інтелект". – Т. 1. Крим, – 2002. – С. 308–310.
33. Васильева Т. В. Автоматизация идентификации законов распределения на основе аппроксимативного анализа экспериментальных данных / Т. В. Васильева // Вестник ДГТУ. – 2010. – Т. 10, № 2 (45). – С. 172–182.
34. Васин А. Н. Аналитический обзор современных методов расчета припусков на механическую обработку заготовок / А. Н. Васин // Вестник СГТУ. – 2005. – №. 2 (7). – С. 16–26
35. Ватульян А. О. Математические модели и обратные задачи / А. О. Ватульян // Соровский образовательный журнал. – 1998. – №. 11. – С. 143–148.
36. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – Москва : Физматлит, 2007. – 224 с.
37. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособ. для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2000. – 480 с.
38. Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В. М. Вержбицкий // Учеб. пособие для вузов. – Москва: Высшая школа. – 2000. – 266 с.
39. Ветров Д. П. Автоматическое определение количества компонент в EM-алгоритме восстановления смеси нормальных распределений / Д. П. Ветров, Д. А. Кропотов, А. А. Осокин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 4. – С. 770–783.

40. Вибрация. Требования к качеству балансировки жестких роторов (ISO 1940-1-2007) : ГОСТ ИСО 1940-1-2007. — [Дата введения 2008-07-01].

41. Влияние некоторых технологических операций на прочность керамики резисторов типа ОМЛТ-0,125: НТО №86-74 ; рук. В. П. Ройзман ; ХВАКУ. — Хмельницкий, 1974. — 25 с.

42. Вощинин А. П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы / А. П. Вощинин // Заводская лаборатория. — 2002. — Т. 68, № 1. — С. 118–126.

43. Вощинин А. П. Оптимизация в условиях неопределенности / А.П. Вощинин, Г.Р. Сотиров. — Москва : МЭИ – София : Техника, 1989. — 224 с.

44. Гадяка В. Г. Особенности практической балансировки роторов турбокомпрессорных агрегатов, основанные на экспериментальном уточнении их динамических моделей / В. Г. Гадяка, В. И.Симоновский // Проблемы машиностроения. — 2007. — Т. 10. — №. 1. — С. 75–79.

45. Гадяка В. Г. Совершенствование методов балансировки роторов турбокомпрессоров на основе идентификации их математических моделей / Сумы. — 2008. — 184 с.

46. Галушко А. И. Внутренние напряжения в герметизирующих компаундах радиоэлектронной аппаратуры / А. И. Галушко. — Москва : Сов. радио, 1974. — 104 с.

47. Герметизация полимерными материалами в радиоэлектронике / Б. М. Туреев [и др.]. — Москва : Энергия, 1974. — 302 с.

48. Глазырин А. С. Идентификация параметров механической системы на примере вибрационного электромеханического преобразователя энергии / А. С. Глазырин, В. В. Тимошкин, С. В. Цурпал, Т. А. Глазырина // Известия Томского политехнического университета. — 2010. — Т. 316. — № 4. — С. 174–177

49. Глейзер А. И. Вероятностная оценка неуравновешенности роторов в рабочих условиях / А. И. Глейзер ; под ред. В. А. Щепетильникова // Теория и практика балансировочной техники. — Москва : Машиностроение, 1973.

50. Глэдвелл Г. М. Обратные задачи теории колебаний / Грэхэм М. Л. Глэдвелл. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. — 608 с.

51. Голубев А. П. Выбор критериев для установления допусков на входные параметры технологического процесса / А. П. Голубев, В. Н. Лохманов, В. И. Беляев, А. А. Голубев // Сервис в России и за рубежом, – 2013. – №1. – С. 1–8

52. Голушко С. К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С. К. Голушко, Ю. В. Немировский. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 432 с.

53. Гольдин А. С. Балансировка многоопорных валопроводов в условиях электростанций / А. С. Гольдин ; под ред. В. А. Щепетильникова // Теория и практика уравнивания машин и приборов. – Москва : Машиностроение, 1970. – С. 177–184.

54. Гольдин А.С. Вибрация роторных машин / А. С. Гольдин. – 2-е издание исправленное. – Москва : Машиностроение, – 2000. – 344 с.

55. Гольдштейн Р. В. Метод электронной спекл-интерферометрии для решения некоторых обратных задач механики упругих тел. / Р. В. Гольдштейн, В. М. Козинцев, А. В. Подлесных, А. Л. Попов, Д. А. Челюбеев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – №. 2. – С. 5–14.

56. Горошко А. В. Досвід постановки і розв'язання задачі параметричного синтезу допусків в конструкції дискових конденсаторів / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 6. – С. 148–152.

57. Горошко А. В. Забезпечення міцності дискових конденсаторів шляхом розв'язання обернених задач міцності / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2015. – № 4 (74). – С. 5–12.

58. Горошко А. В. Забезпечення працездатності вузла тертя механічної системи літакового відповідача / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Проблеми трибології. – 2015. – № 4 (78). – С. 54–63.

59. Горошко А. В. Забезпечення працездатності вузлів машин шляхом розв'язання обернених задач / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2016. – № 1. – С. 150–159.

60. Горошко А. В. Застосування методу головних компонент для усіченої оцінки найменших квадратів під час розв'язання оберненої задачі ідентифікації

ексцентриситетів ротора / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2015. – № 6. – С. 49–53.

61. Горошко А. В. Исследование динамики и снижение виброактивности турбонасосного агрегата путем решения обратных задач / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Машиностроение и инженерное образование. – 2014. – № 1. – С. 29–35.

62. Горошко А. В. Исследование устойчивости и точности алгоритма идентификации эксцентриситетов в задачах балансировки быстровращающихся роторов / А. В. Горошко, В. П. Ройзман, О. В. Бармина / Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. – № 3. – С. 42–48.

63. Горошко А. В. Метод пробних параметрів в задачі ідентифікації ротора з метою зменшення його вібрацій / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Нафтогазова енергетика. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ. – 2015. – № 2 (24). – С. 53–58.

64. Горошко А. В. Методи обробки емпіричних даних, що підпорядковуються багатомодальним законам розподілу / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 4. – С. 195–201.

65. Горошко А. В. Методи підвищення точності параметричної ідентифікації роторів / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2016. – № 3 (237). – С. 151–156.

66. Горошко А. В. Обернена задача динаміки турбонасосного агрегату / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 3. – С. 195–201.

67. Горошко А. В. Обернена задача ідентифікації фізико-механічних характеристик матеріалів структурно-складних технічних систем / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 4. – С. 135–139.

68. Горошко А. В. Обернені задачі параметричної ідентифікації механічних систем : монографія / А. В. Горошко, В. П. Ройзман. – Хмельницький : ХНУ, 2016. – 245 с.

69. Горошко А. В. Обработка экспериментальных данных, подчиняющихся многомодальным законам распределения / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Петербургский журнал электроники. – 2013. – № 3. – С. 105–112.

70. Горошко А. В. Обратные задачи обеспечения заданного уровня качества сложных технических систем / А. В. Горошко, В. П. Ройзман / Машиностроение и инженерное образование. – 2015. – № 3. – С. 31–44.

71. Горошко А. В. Параметричний синтез допусків як множинна обернена задача забезпечення працездатності складних технічних систем / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Проблемы машиностроения. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 43–50.

72. Горошко А. В. Підвищення ефективності розв'язання обернених задач, що описуються лінійними моделями / А. В. Горошко // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 5. – С. 44–49.

73. Горошко А. В. Повышение устойчивости решения плохо обусловленных обратных задач динамики / А. В. Горошко, В. П. Ройзман / Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. – № 6. – С. 24–28.

74. Горошко А. В. Представление и обработка статистических данных, не подчиняющихся унимодальным законам распределения / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Машиностроение и инженерное образование. – 2013. – № 3. – С. 56–77.

75. Горошко А. В. Призначення допустимих дисбалансів для високошвидкісних роторів / А. В. Горошко // Вибрации в технике и технологиях. – 2016. – №2(82). – С. 69–76.

76. Горошко А. В. Про застосування гаусової суміші для статистичної обробки емпіричних даних / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2013. – № 3. – С. 138–142.

77. Горошко А. В. Розрахунок допустимих значень параметрів об'єктів у випадку полімодальності їх імовірнісних розподілів / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вібрації в техніці та технологіях. – 2013. – № 4 (72). – С. 19–27.

78. Горошко А. В. Синтез допусків в задачі забезпечення якості виробництва елементів герметизованої радіоелектронної апаратури / А. В. Горошко, В. П.

Ройзман // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2015. – № 4. – С. 167–174.

79. Горошко А. В. Стан проблеми забезпечення якісного проектування структурно-складних технічних виробів та технологічних процесів їх виготовлення / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2012. – № 5. – С. 59–68.

80. Горошко А. В. Статистические методы обеспечения устойчивости решений обратных задач и их применение для снижения виброактивности роторов / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – № 3. – С. 50–57.

81. Горошко А. В. Статистичні методи розв'язання лінійних некоректно поставлених задач у випадку полімодального розподілу імовірностей вимірних даних / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Збірник наукових праць Національної академії Державної прикордонної служби України. Сер.: Військові та технічні науки / гол. ред. Б. М. Олексієнко. – Хмельницький : вид-во НАДПСУ, 2015. – № 3 (65). – С. 226–241.

82. Горошко А. В. Статистично-детерміноване моделювання багатовузлових технічних об'єктів / А. В. Горошко // Математичне та імітаційне моделювання систем «МОДС 2016» : зб. пр. 11-ї міжнар. наук.-практ. конф. (м.Київ, 27 червня–1 липня 2016 р.) – С. 196–200

83. Горошко А. В. Стійкість алгоритмів ідентифікації гнучких роторів / А. В. Горошко // Вибрации в технике и технологиях. – 2016. – № 1. – С. 23–29.

84. Горошко А. В. Уточнення методу обробки статистичних даних / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Збірник наукових праць Національної академії Державної прикордонної служби України. Військові та технічні науки / гол. ред. Б. М. Олексієнко. – Хмельницький : Вид-во НАДПСУ, 2014. – № 1 (61). – С. 304–313.

85. Горошко А. В. Шляхи підвищення точності розв'язків зворотних задач / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 6. – С. 60–69.



86. Горошко А. Обеспечение работоспособности механических систем путем решения обратных задач / А. Горошко, В. Ройзман, Я. Петрашек // Second Georgian-Polish Scientific & Technical Conference «Europe-Asia Transport Bridge» (Tbilisi, Georgia, October 11-14, 2016). – P. 71–81

87. Горошко А. В. Алгоритми статистичної ідентифікації технічних об'єктів і технологічних процесів / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Повышение качества, надежности и долговечности технических систем и технологических процессов : сб. тр. XI междунар. науч.-техн. конф. (г. Эйлат, Израиль, 12–20 ноября 2013 г.). – Хмельницкий : ХНУ, 2013. – С. 57–60.

88. Горошко А. В. Об одном параметрическом методе обработки экспериментальных данных / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Современные достижения в науке и образовании : сб. тр. VIII междунар. науч.-метод. конференции, 28 апреля - 5 мая 2013 г., г. Париж (Франция). – Хмельницкий : ХНУ. – 2013. – С. 42–45.

89. Горошко А. В. Обеспечение заданного уровня мощности самолетного ответчика путем решения обратных задач / А. В. Горошко, А. К. Яновицкий, В. П. Ройзман // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах : матеріали XIV міжнар. наук.-техн. конф. (м. Одеса, 5–10 черв. 2015 р.). – С. 195–197.

90. Горошко А. В. Параметрическая идентификация эксцентриситетов и упруго-инерционных характеристик турбонасосного агрегата / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Наука и образование : сб. тр. V междунар. науч. конф. (г. Хайдусобосло, Венгрия, 3–11 янв. 2014 г.). – Хмельницкий : ХНУ, 2013. – С. 5–10.

91. Горошко А. В. Синтез допусків як множинна обернена задача міцності дискових конденсаторів / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Современные достижения в науке и образовании : сб. тр. IX междунар. науч. конф. (г. Нетания, Израиль, 22–29 сент. 2014 г.). – Хмельницкий : ХНУ, – 2014. – С. 28–34.

92. Горошко А. В. Труднощі одержання ефективних математичних моделей технічних виробів та технологічних процесів їх виготовлення / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Сб. тр. X междунар. науч.-техн. конф. (г. Эйлат, Израиль, 20–27 нояб. 2012 г.). – Хмельницкий : ХНУ, 2012. – С. 95–102.

93. Горошко О. А. О продольных колебаниях балки с подвижным экипажем / О. А. Горошко // Прикладная механика. – 1978. – 14. – №8. – С.70–78.
94. Горшенин А. К. Асимптотические свойства статистических процедур анализа смесей вероятностных распределений : автореф. дис. на соиск. наук. степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.05 / А. К. Горшенин. – Москва, 2011. – 22 с.
95. Грачев Ю. П. Математические методы планирования экспериментов / Ю. П. Грачев, Ю. М. Плаксин. – Москва : ДеЛи принт. – 2005. – 296 с.
96. Гук Н. А. Идентификация механических свойств материала по результатам косвенных измерений / Н. А. Гук, Н. И. Ободан // Механика твердого тела. – 2010. Вып. 40. – С. 233–243
97. Гусаров А. А. Балансировка роторов машин. В 2 т. / А. А. Гусаров. – Москва: Наука, – 1990. – 152 с.
98. Гусаров А. А. Динамика и балансировка гибких роторов / А. А. Гусаров. – Москва, 2004. – Т. 1. – 267 с.; Т. 2. – 2005. – 383 с.
99. Гусев В. П. Технология аппаратостроения / В. П. Гусев. – Москва : Высшая школа, 1972. – 494 с.
100. Гусейнов Ш., Окружнова М. Выбор квазиоптимального параметра регуляризации для операторных уравнений первого рода / Ш. Гусейнов, М. Окружнова // Proceedings of International Conference RelStat'04. – Part 3. – С. 471–486.
101. Денисов В. И. Планирование эксперимента при оценивании параметров многофакторной модели по неоднородным наблюдениям / Денисов В. И., Лисицин Д. В., Гаврилов К. В. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2002. – Т. 5. – №. 4. – С. 14–28.
102. Дивак М. П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними / М. П. Дивак – Тернопіль : Вид-во ТНЕУ «Економічна думка», 2011. – 216 с.
103. Дилигенская А. Н. Идентификация объектов управления / А. Н. Дилигенская // Самара : СГТУ, 2009. – 136 с.
104. Дилигенский Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности:

технология, экономика, экология / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов. – Москва : Машиностроение, 2004. – 286 с.

105. Дильман В. Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2009. – №. 17 (150).

106. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф. М. Диментберг – Москва : Изд. АН СССР, 1959. – 247 с.

107. Допуски и посадки деталей радиоэлектронной аппаратуры. Справочник / А. Ф. Мевис, В. Б. Несвижский, А. И. Фефер ; Под ред. О. А. Луппова. – Москва : Радио и связь, – 1984. – 152 с.

108. Доронин С. В. Моделирование прочности и разрушения несущих конструкций технических систем / С. В. Доронин, А. М. Лепихин, В. В. Москвичев, Ю. И. Шокин. – Новосибирск: Наука, 2005. – 250 с.

109. Дронов С. В. Многомерный статистический анализ : учеб. пособие / В. Н. Калинина, В. И. Соловьев // ГУУ. – Москва, 2003. – 66 с.

110. Дунаев П. Ф. Конструирование узлов и деталей машин: учеб. пособие для студ. техн. спец. вузов / П. Ф. Дунаев, О. П. Леликов. 8-е изд., перераб. и доп. – Москва: Академия. – 2004. – 496 с.

111. Дунаев П. Ф. Расчет допусков размеров. Учебное пособие / П. Ф. Дунаев, О. П. Леликов. – Москва: Машиностроение, – 2006. – 400 с.

112. Жабин А. И. Сборка изделий в единичном и мелкосерийном производстве / Жабин А. И., Мартынов А. П. – Москва : Машиностроение, 1988. – 184 с.

113. Зависимость мощности выходного сигнала самолетного ответчика СО-69 от некоторых конструктивно-технологических факторов : НТО №77-80 / ХВАКУ ; рук. В. П. Ройзман. – Хмельницкий, 1980. – 19 с.

114. Зайцев Г. Н. Нормирование точности геометрических параметров машин : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Г. Н. Зайцев, С. А. Любомудров, В. К. Федюкин ; под ред. В. К. Федюкина. – Москва : Академия, 2008. – 368 с.

115. Захарова Т. Н. К вопросу о статистической природе усталостной повреждаемости сталей и сплавов / Т. Н. Захарова // Проблемы прочности. – Москва, 1974. – № 7. – С. 17–24.
116. Золин А. Г. Разработка алгоритмов решения обратных задач промышленной диагностики аппроксимационным методом : дис. канд. техн. наук : 05.13.01 / А. Г. Золин. – Самара, 2010. – 155 с.
117. Иванов А. В. Турбонасосные агрегаты кислородно-водородных ЖРД / А. В. Иванов. – Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», – 2011. – 283 с.
118. Иванов В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – Москва : Наука, 1978. – 206 с.
119. Измаилов А. Ф. Чувствительность в оптимизации. Учебное пособие / А. Ф. Измаилов. – Физматлит, 2006. – 248 с.
120. Ильин В. Н. Автоматизация схемотехнического проектирования. Учеб. пособие для вузов / В. Н. Ильин, В. Т. Фролкин, А. И. Бутко и др.; Под ред. В. Н. Ильина.— М.: Радио и связь, 1987. — 368 с: ил.
121. Интервальный анализ : тр. XIII Байкал. междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (г. Иркутск, 2–8 июля 2005 г.). – Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2005. – Т. 4 – 119 с.
122. Исаев Р. И. Экспериментальное исследование жесткости роторов компрессоров двигателя АИ-20. Техническая справка №5186 ЦИАМ / Р. И. Исаев, В. П. Ройзман. – 1961.
123. Исследование причин, вызывающих повышенную вибрацию изделия АИ-20. Тех. отчет по научно-исследовательской работе. Тема 0323. МАИ, 1962.
124. Исследование прочности дисковых керамических конденсаторов, герметизируемых компаундом : НТО №133-85/ХВАКУ ; рук. В. П. Ройзман. – Хмельницкий, 1985. – 28 с.
125. Иыуду К. А. Надежность, контроль и диагностика вычислительных машин и систем: Учебное пособие для ВУЗов / К. А. Иыуду. – Москва : Высш. шк., –1989. – 216 с.

126. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи : учеб. для студ. ВУЗов / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
127. Калинина В. Н. Введение в многомерный статистический анализ : Учебное пособие / В. Н. Калинина, В. И. Соловьев. // ГУУ. – М. : 2003. – 66 с.
128. Калиняк М. І. Вільні поперечні коливання одного класу систем з урахуванням недосконалої пружності матеріалу / М. І. Калиняк, А. Ф. Барвінський // Доповіді НАН УРСР. – 1977. – № 5. – С. 435–439.
129. Кан К. Н. Механическая прочность эпоксидной изоляции / К. Н. Кан, А. Ф. Николаевич, В. Шанников – Ленинград : Энергия, 1973. – 148 с.
130. Кан К. Н. Оценка работоспособности полимерных компаундов / К. Н. Кан – Ленинград : ЛДНТП, 1980. – 18 с.
131. Кафаров В. В. Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учеб. для вузов / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов. – Москва : Высшая школа, 1991. – 400 с..
132. Каюмов Р. А. Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций / Р. А. Каюмов, Ю. Г. Коноплев, Б. Ф. Тазюков // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – №. 2. – С. 94–103.
133. Кесоян А. Г. Исследование методом статистических испытаний влияния погрешностей формы деталей на точность прецизионной сборки / А. Г. Кесоян, Н. А. Ситникова // Известия Волгоградского государственного технического университета. – 2004. – №. 1. – С. 9–12
134. Кирлица В. П. Точные D-оптимальные планы экспериментов для линии регрессии робастные относительно линейного возмущения дисперсии наблюдений / В. П. Кирлица // Вестн. Белорусского гос. ун-та. Сер. – 2015. – Т. 1. – С. 97–102.
135. Кожевников А. М. Методы оптимального проектирования бортовых радиоэлектронных средств на основе моделирования их электрических,

тепловых и механических режимов : дис. ... д-ра техн. наук : 05.13.12 / Кожевников Анатолий Михайлович. – Москва, 2004. – 274 с.

136. Козак Ю. А. Многокритериальная пошаговая оптимизация систем управления с адаптивной вариацией критериев / Ю. А. Козак, Н. П. Худенко // Труды Одесского политехнического университета. – 1999. – Вып. 2. – С. 242–245.

137. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей / А. Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. – Москва : Математика, 1941. – № 5. – С. 8–14.

138. Колчев А. А. Об одной модели смеси распределений вероятностей в радиотехнических измерениях / А. А. Колчев, А. Е. Недопекин // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4, № 3. – С. 563–568.

139. Колчков В. И. Метод Монте-Карло для решения задач функциональной взаимозаменяемости / В. И. Колчков // Инновации в науке : сб. тр. XXVI междунар. науч.-практ. конференции. – Новосибирск, 2013. – С. 39–47.

140. Корнеев Н. В. Технология динамической балансировки роторов турбоагрегатов / Н. В. Корнеев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2009. – Т. 11. – № 5. – С. 216–221.

141. Королев В. Ю. EM-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор / В. Ю. Королев. – Москва : Изд-во ИПИ РАН, 2007. – 102 с.

142. Королев В. Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовых моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы / В. Ю. Королев. – Москва : ИПИ РАН, 2007. – 363 с.

143. Костин В. А. Обратные задачи прочности летательных аппаратов / В. А. Костин, М. Ю. Торопов, А. П. Снегуренко. – Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, – 2002. – 284 с.

144. Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин: учебник для вузов 3-е изд / А. Г. Костюк. – Москва : Издательский дом МЭИ, – 2007. – 476 с.

145. Кофанов Ю. Н. Точность и параметрическая чувствительность РЭА. Обзор задач и методов / Ю. Н. Кофанов // Точность РЭА : материалы семинара. – Москва : МДНТП им. Ф. Э. Дзержинского, 1971. – Ч. I. – С. 28–29.
146. Кофанов Ю. Н. Методы системного анализа вибрационной прочности изделий / Ю. Н. Кофанов, В. П. Ройзман. – Москва : Радио и связь, 2007. – 178 с.
147. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
148. Кранцберг Л. Э. Анализ точности балансировки деталей в массовом производстве / Л. Э. Кранцберг ; под ред. В. А. Щепетильникова // Теория и практика балансировочной техники. – Москва : Машиностроение, 1973.
149. Круглов В. М. Смеси вероятностных распределений, однозначно определяемые поведением на полуоси / В. М. Круглов, А. М. Улановский // Теория вероятностей и ее применения. – 1987. – Т. 32. – Вып. 4. – С. 670–678.
150. Куменко А. Балансировка гибких роторов и валопроводов на основе систем КОМПАКС® с применением датчиков вала / А. Куменко // Деловой журнал Neftegaz. RU. – 2015. – № 3. – С. 58–61.
151. Лаврентьев М. М. Одномерные обратные задачи математической физики / М. М. Лаврентьев, К. Г. Резницкая, В. Г. Яхно. – Москва : Наука, 1982.
152. Лаврентьев В. А. Оптимизация допусков на параметры высокотехнологичного продукта // Экономическая теория. Экономические науки. – 2009. – № 7 (56). – С. 102–103.
153. Лаврик Д. А. Регуляризованные алгоритмы статистического оценивания функций / Д. А. Лаврик, А. Х. Пергамент. – Москва : 2009. – № 2. – 20 с. – (Препринт/ИПИМ им. М. В. Келдыша).
154. Латыев С. М. Конструирование точных (оптических) приборов : учеб. пособие / С. М. Латыев. – Санкт-Петербург : Политехника, 2007. – 79 с.
155. Левин А. И. Математическое моделирование в исследованиях и проектировании станков / А. И. Левин. – Москва : Машиностроение, 1978. – 184 с.

156. Леонов О. А. Взаимозаменяемость унифицированных соединений при ремонте сельскохозяйственной техники : Монография / О. А. Леонов. – Москва : ФГОУ ВПО МГАУ, – 2003. – 167 с.
157. Липин Е. К. Алгоритм оптимизации силовых конструкций по условиям прочности с компенсацией нарушенных ограничений / Е. К. Липин, В. М. Фролов, В. В. Чедрик, А. Н. Шаныгин // Ученые записки ЦАГИ. – 1988. – №1. – С. 58–66
158. Лотов А. В. Многокритериальные задачи принятия решений : учеб. пособие / А. В. Лотов, И. И. Поспелова. – Москва : МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
159. Малинский В. Д. Испытания аппаратуры и средств измерений на воздействие внешних факторов : справочник / В. Д. Малинский, В. Х. Бегларян, А. Г. Дубицкий. – Москва : Машиностроение, 1993. – 573 с.
160. Маркова Е. В. Планирование эксперимента в условиях неоднородностей / Е. В. Маркова, А. В. Лисенков. – Москва : Наука, 1973. – 221 с.
161. Мартинців М. П. Одне узагальнення методу Д'Аламбера для систем, які характеризуються позовжнім рухом / М. П. Мартинців, М. Б. Сокіл // Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів: УДЛТУ. – 2003. – Вип. 13.4. – С. 64–67.
162. Мартынов А. П. Статистическая оценка точности при изготовлении крупных изделий в единичном и мелкосерийном производстве / А. П. Мартынов // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії. Зб. наук. пр. – Краматорськ, 2007. – №3(9). – С. 157–162.
163. Масыгин В. Б. Автоматическое обеспечение конструкторских допусков при размерных технологических расчетах с применением линейного программирования / В. Б. Масыгин, В. П. Погодаев // Омский научный вестник, 2014. – №3 (133). – С. 97–101.
164. Математическое моделирование радиоэлектронных средств при механических воздействиях / Ю. Н. Кофанов, А. С. Шалумов, В. Г. Журавский, В. В. Гольдин. – Москва : Радио и связь, 2000. – 226 с.



165. MATLAB в инженерных и научных расчетах / А. Ф. Дашенко, В. Х. Кириллов, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей. – Одесса: Астропринт, 2003. – 214 с.
166. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности. В 2 т. / Ю. М. Мацевитый; НАН Украины, Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного. – Киев : Наукова думка, 2003. – Т. 2. – 392 с.
167. Машины и технологическое оборудование. Система классов точности балансировки. Основные положения. ГОСТ 22061-76. — [Дата введения 01.07.1977].
168. Меламед И. И. Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации / И. И. Меламед // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 9. – С. 119–125.
169. Метод синтеза допусковых отклонений на геометрические параметры микрополосковых устройств / М. В. Мищенко, А. Ю. Фарафонов, Д. А. Коваленко, Ю. А. Сицилицин // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2013. – № 2. – С. 21–27.
170. Методика расчета надежности изделий с учетом постепенных отказов. – Москва : Гос. ком. стандартов Сов. Мин. СССР, 1976. – 33 с.
171. Микунис С. И. Вынужденные колебания и уравнивание гибких роторов турбогенераторов : автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук / С. И. Микунис ; МЭИ. – 1967. – 18 с.
172. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский., Б. И. Мосеенков. – Киев: Вища школа, 1976. – 84 с.
173. Михайленко А. Н. Оценка напряженности дисков компрессоров барабанно-дисковой конструкции при эксплуатации в различных климатических условиях / А. Н. Михайленко, Т. И. Прибора // Авиационно-космическая техника и технология. – 2005. . – №9 (25). – С. 83-87
174. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики: [Учеб. пособие для ун-тов] / Н. Н. Моисеев [2-е изд., перераб.]. – Москва : Наука, 1981. – 400 с.

175. Морозов В. А. Методы регуляризации неустойчивых задач / В. А. Морозов. – Москва : Изд-во МГУ, 1987. – 216 с.
176. Морозов Д. И. Защита радиоэлектронных средств от влияния климатических факторов / Д. И. Морозов, П. Г. Андреев, И. Ю. Наумова, 2011. – С. 255–261
177. Муравлев О. П. Теория точности и ее использование для ресурсосбережения при проектировании и изготовлении электрических машин / О. П. Муравлев, О. О. Муравлева // Изв. Томск. политехн. университета. – 2003. – Т. 306, № 1. – С. 152–157.
178. Назаров Д. А. Двоичная многоуровневая детализация элементов сеточного представления области работоспособности / Д. А. Назаров // Надежность и качество : тр. Междунар. симпозиума. – Пенза : Изд-во ПТУ, 2010. – Т. 1. – С. 337–341.
179. Неселовский Э. А. Оценка эффективности методов уравнивания роторов генераторов / Э. А. Неселовский ; под ред. В. А. Щепетильникова // Теория и практика балансировочной техники. – Москва : Машиностроение, 1973.
180. Новик Ф. С. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования эксперимента / Ф. С. Новик, Я. Б. Арзов. – Москва : Машиностроение, 1980. – 304 с.
181. Новицкий П. Ф. Оценка погрешностей результатов измерений / П. Ф. Новицкий, И. А. Зограф. – Ленинград : Энергоатомиздат, 1985. – 248 с.
182. О модификации метода моментов для выбора оптимальных конструктивных параметров гибридно-пленочных микроузлов // Б. Н. Деньдобренко и др. ; под ред. В. И. Смирнова // Конструирование микроэлектронной аппаратуры : материалы краткосрочного семинара. – Ленинград, 1976. – С. 34–38.
183. Ободан Н. И. Идентификационный подход в граничных обратных задачах теории оболочек / Н. И. Ободан, Н. Б. Макаренко. – Москва : Физматлит, 2007. – 224 с.

184. Орлов А. И. Прикладная статистика. Учебник / А. И. Орлов. – Москва : Экзамен, 2004. – 656 с.
185. Павлов А. С. О решении плохо обусловленных линейных систем итерационными методами / А. С. Павлов, Л. Ф. Юхно // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16, № 7. – С. 13–20.
186. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1991. – 256 с.
187. Пат. 41138 А Україна, МКИ G 01 N 29/04. Пристрій для визначення координат джерела акустичної емісії / В. П. Ройзман, І. І. Ковтун, А. В. Горошко, С. В. Прохоренко. – № 2001031425 ; заявл. 01.03.2001 ; опубл. 15.08.2001, Бюл. № 7. – 12 с.
188. Пат. UA 95044 U. Україна, МПК G01N 3/08, G01N 25/00. Спосіб визначення фізико-механічних характеристик матеріалів / А. В. Горошко, Є. В. Коробко, С. А. Петрашук, В. П. Ройзман ; заяв. і патентотримувач – Хмельниц. нац. університет. – № 201406757 ; заявл. 16.06.2014 ; опубл. 10.12.2014, Бюл. № 23.
189. Пелешко І. Д. Оптимальне проектування металевих конструкцій на сучасному етапі (огляд праць) / І. Д. Пелешко, В. В. Юрченко // Металлические конструкции. – 2009. – № 1. Т. 15. – С. 13–21.
190. Перминов М. Д. Многокритериальный подход к задаче идентификации структурно-сложных динамических систем / М. Д. Перминов, Р. Б. Статников // Автоматизация эксперимента в динамике машин. – Москва : Наука, 1987. – С. 53–64.
191. Петренко А. И. Основы автоматизации проектирования / А. И. Петренко. – Киев : Техника, 1982. – 295 с.
192. Петров Ю. П. Как получать надежные решения систем уравнений / Ю. П. Петров // Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2009. – 176 с.

193. Петров Ю. П. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Ю. П. Петров. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2008. – 160 с.
194. Петрухина Н. П. Определение критических частот вращения многоопорных роторов как роторов на упругом основании / Н. П. Петрухина // Вестник СГАУ. – 2008. – №3. – С. 95-99.
195. Пирогова Н. С. Расчетно-экспериментальный анализ собственных и критических частот и форм высокооборотного ротора микрогазотурбинной установки / Н. С. Пирогова, П. А. Тараненко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2015. Т. 15. – №3. – С. 37–47
196. Писаренко Г. С. Перспективы использования керамики в машиностроении / Г. С. Писаренко // Проблемы прочности. – 1984. – № 12. – С. 3–7.
197. Плескунин В. И. Теоретические основы организации и анализа выборочных данных в эксперименте / В. И. Плескунин, Е. Д. Воронина ; под ред. А. В. Башарина. – Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1979. – 232 с.
198. Полосин В. Г. Методика разделения статистических данных для смеси двух распределений на примере результатов измерения объемной активности радона / В. Г. Полосин, С. В. Тертычная // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – № 4. – 2008. – С. 79–86
199. Полушкин О. А. Идентификация дисбалансов двухопорного жесткого ротора – новый подход / О. А. Полушкин, О. О. Полушкин // Труды VIII Междунар. науч.-техн. конф. по динамике технологических систем. – Т. 3. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2007. – С. 183–187.
200. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности : справ. изд. / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин ; под ред. С. А. Айвазяна. – Москва : Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
201. Применение многофакторных экспериментов второго порядка в технологии машиностроения / Ю. М. Зубарев, К. Н. Нечаев, В. И. Катенев, Н. Н. Ревин. – Санкт-Петербург : ПИМаш., 2002. – 134 с.

202. Пузько И. Д. Параметрическая идентифицируемость механических колебательных систем, основанная на модели равномерного движения материальной точки / И. Д. Пузько // Вісник Сумського державного університету. — 1998. — №1(9). — С. 53-58.

203. Разумовский И. А. Экспериментально-расчетные методы определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций / И. А. Разумовский, А. С. Чернятин, А. В. Фомин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2013. Том: 79, № 10. — С. 57–64

204. Райнкше К. Модели надежности и чувствительности систем / К. Райнкше ; пер. с нем. — Москва : Мир, 1979. — 452 с.

205. Расчет механических напряжений в ЭРЭ и компаунде герметизированной РЭА, вызванных изменением температуры: НТО № 64-78/ХВАКУ; Рук. В. П. Ройзман, Хмельницкий, 1978. — 21 с.

206. Расчет на прочность и вибрации деталей компрессора. Тех. отчет № 1099. Ч. 2. Предприятие п/я № 57.

207. Расчет на прочность турбовинтового двигателя АИ-20 500-часового ресурса. Тех. отчет № 1427. Предприятие п/я № 57.

208. Расчет точности машин и приборов / В. П. Булатов, И. Г. Фридлиндер, А. Г. Баталов [и др.] ; под общ. ред. В. П. Булатова и И. Г. Фридлиндера. — Санкт-Петербург : Политехника, 1993. — 496 с.

209. Ройзман В. П. Метод ідентифікації параметрів моделей складних технічних систем / В. П. Ройзман, А. В. Горошко // Вібрації в техніці та технологіях. — 2015. — № 3 (79). — С. 44–49.

210. Ройзман В. П. Некоторые вопросы теории балансировки гибких роторов / В. П. Ройзман, Л. Д. Вайнгортин // Упругие и гидроупругие колебания элементов машин и конструкций. — Москва : Наука, 1979. — С. 55–63.

211. Рунов Б. Т. Исследование и устранение вибрации паровых турбоагрегатов / Б. Т. Рунов. — Москва : Энергоиздат, — 1982. — 352 с.

212. Рыков А. С. Симплексные алгоритмы прямого поиска / А. С. Рыков // Автоматика и телемеханика. — 1980. — №. 6. — С. 58–69.

213. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем. / Т. Саати, К. Кернс. – Москва : Радио и связь, 1991. – 224 с.
214. Сидоров И. Н. Итерационный алгоритм идентификации коэффициентов жесткости и демпфирования опор разгоннобалансирующего стенда при балансировке гибких роторов / И. Н. Сидоров, В. В. Туктарова // Научно-технический вестник Поволжья. – 2014. – №. 6. – С. 329–332.
215. Сидоров И. Н. Численный теоретико-экспериментальный метод определения дисбалансов при балансировке валопроводов в собственных подшипниках / И. Н. Сидоров, В. В. Туктарова // Вестник Казанского технологического университета. – 2015. – Т. 18. – №. 5. – С. 164–169.
216. Симоновский В. И. Динамика роторов центробежных машин : учеб. пос. / В. И. Симоновский. – Сумы : Сумский государственный университет, 2006. – 126 с.
217. Синтез температурных допусков на комплектующие элементы электронных приборов / А. В. Долматов, С. У. Увайсов, Р. И. Увайсов, А.-Э. М. Алкадарский // Надежность и качество : тр. Междунар. симпозиума. – Пенза, 2002. – Т. 1 – С. 334–335.
218. Слепова С. В. Основы теории точности измерительных приборов : учеб. Пособие / С. В. Слепова. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 192 с.
219. Современный эксперимент: подготовка, проведение, анализ результатов / В. Г. Блохин, О. П. Глудкин, А. И. Гуров, М. А. Ханин ; под. ред. О. П. Глудкина. – Москва : Радио и связь, 1997. – 232 с.
220. Создание программы оптимизации для решения задач нелинейного математического программирования : отчет по хоз. теме № 615 // ГГУ. Рук. И. Н. Калинин. – Горький, 1980. – 100 с.
221. Сокіл Б. І. Нелінійні коливання механічних систем і аналітичні методи їх досліджень : дис. д-ра техн. наук: 05.02.09 / Б. І. Сокіл. – Львів. – 2001. – 351 с.
222. Сокіл М. Б. Нелінійні моделі рухомих середовищ і аналітичні методи дослідження їх коливних процесів / М. Б. Сокіл // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – № 3. – С. 62–65.

223. Соппротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев : Изд-во техн. лит-ры, 1963. – 793 с.
224. Справочник по надежности / под ред. Б. Е. Бердичевского ; пер. с англ. – Москва : Мир, 1970. – Т. 2. – 304 с.
225. Справочник по прикладной статистике. В 2 т. Т. 2 / Пер. с англ. ; под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, С. А. Айвазяна, Ю. Н. Тюрина. – М. : Финансы и статистика, 1990. – 526 с.
226. Сравнение деформаций, возникающих в резисторах типа ОМЛТ-2,125 при трех вариантах герметизации ПММ: НТО № 47–76 / ХВАКУ ; рук. В. П. Ройзман. – Хмельницкий, 1976. – 23 с.
227. Статников Р. Б. Многокритериальное проектирование машин / Р. Б. Статников, И. Б. Матусов . – Москва : Знание, 1989. – 47 с.
228. Струтинський В. Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки: Підручник / В. Б. Струтинський. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 612 с.
229. Стахов В. Н. Обобщение вариационных методов М. М. Лаврентьева и А. Н. Тихонова регуляризации систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной правой частью, обеспечивающие потребности гравиметрии и магнитометрии / В. Н. Стахов // Геофизический журнал. – 2002. – Т. 24, № 5. – С. 3–8.
230. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем. Учебник для вузов / В. П. Тарасик – Минск : Дизайн-ПРО, 2004. – 640 с.
231. Теребиж В. Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач / В. Ю. Теребиж. – Москва : Фимзматлит, 2005. – 376 с.
232. Теребиж В. Ю. Эффективная фильтрация в обратных задачах / В. Ю. Теребиж // Известия Крымской астрономической обсерватории. – 2003. – С. 166–180.
233. Тимирязев В. А. Основы технологии машиностроительного производства: учебник / В. А. Тимирязев, В. П. Вороненко, А. Г. Схиртладзе; под ред. Тимирязева. – ВА-СПб: Изд-во «Лань», 2012. – 443 с.

234. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – 2-е изд. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. л-ры, 1979. – 284 с.
235. Тихонов А. Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко. – Москва : Машиностроение, 1990. – 264 с.
236. Точность производства в машиностроении и приборостроении / Под ред. А. Н. Гаврилова. – Москва : Машиностроение, 1973. – 567 с.
237. Туктарова В. В. Математическое моделирование вибрационного состояния и методы устранения повышенной вибрации валопровода, вызванные неуравновешенностью : дис. докт. техн. наук / В. В. Туктарова. – Казань, 2015. – 142 с.
238. Турчин В. Ф. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач / В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, Л. С. Малкевич // Успехи физических наук. – 1970. – Т. 102, вып. 3. – С. 345–386.
239. Урьев Е. В. Вибрационная надежность и диагностика турбомашин. Часть 1. Вибрация и балансировка : учебное пособие / Е. В. Урьев. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, – 2003, – 200 с.
240. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов : Учеб. для вузов. - 10-е издание, перераб. и доп / В. И. Феодосьев. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.
241. Фомин А. В. Надежность полупроводниковых устройств летательных аппаратов / Фомин А. В. – Москва : Машиностроение, 1968. – 267 с.
242. Фомин А. В. Обратные задачи экспериментальной механики / А. В. Фомин // Экспериментальные исследования напряжений в конструкциях. – Москва : Наука. – 1992. С. 14–26.
243. Фролов К. В. Постановка и решение задач оптимального проектирования машин / К. В. Фролов, Р. Б. Статников // Машиноведение. – 1977. – № 5. – С. 13–19.
244. Хохлова И. А. Метод граничных испытаний труб и трубопроводных сооружений / И. А. Хохлова // Проблемы и методы обеспечения надежности и



безотказности систем транспорта нефти, нефтепродуктов и газа : сб. тр. науч.-практ. конф. – 2009. – Т. 27. – С. 77–83

245. Чуйко С. С. Оптимизация допусков для технологической операции со многими входными и одним выходным параметрами / С. С. Чуйко // Технология машиностроения. – 2006. – №. 11. – С. 24 – 26.

246. Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ [Электронный ресурс] : монография / С. П. Шарый. – Новосибирск : Ин-т вычислительных технологий СО РАН, изд-во «XYZ». – 2011. – 570 с. – Режим доступа: <http://www.nsc.ru/interval>.

247. Шарый С. П. Курс вычислительных методов / С. П. Шарый // Новосибирск, – 2016. – 548 с.

248. Шекольян Э. П. Автоматизация расчета оптимальных допусков при проектировании оптических систем : дис. канд. техн. наук : 05.11.07 / Э. П. Шекольян. – Санкт-Петербург, – 1994.

249. Шило Г. Н. Геометрические методы назначения допусков / Г. Н. Шило // Проблемы управления и информатики. – 2007. – №2. – С. 118–126.

250. Шило Г. Н. Расчет нормальных допусков с учетом отклонений коэффициентов внешних воздействий / Г. Н. Шило, Д. А. Коваленко, Н. П. Гапоненко // - Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2009. – №1. – С. 15–18.

251. Штофф В. А. Моделирование и философия / В. А. Штофф. – Ленинград, Наука, 1966. – 240 с.

252. A Direct Algorithm for solving ILL-Conditioned Linear Algebraic Systems / X. J. Xue, K. J. Kozachek, S. K. Kurts, D. S. Kurts. Copyright(C)JCPDS-International Centre for Diffraction Data 2000, Advances in X-ray Analysis, Vol. 42. – P. 629–633.

253. Antony J. Design of experiments for engineers and scientists / J. Antony – Elsevier, – 2014.

254. Binder K. Monte Carlo Simulation in Statistical Physics, An Introduction / K. Binder, D. W. Heerman. – Berlin : Springer-Verlag, 1992. – 129 p.

255. Bootstrap Identification of Confidence Intervals for the Non-Linear DoE Model / J. Pietraszek, N. Radek, M. Stojek, A. Goroshko, M. Kołomycki // Applied

Mechanics and Materials, Trans Tech Publications, Switzerland. – 2015. – Vol. 712. – P. 11–16.

256. Burer M. et al. Multi-criteria optimization of a district cogeneration plant integrating a solid oxide fuel cell–gas turbine combined cycle, heat pumps and chillers // *Energy*. – 2003. – T. 28. – №. 6. – P. 497–518.

257. Cacuci D. G. Sensitivity theory for nonlinear systems. I. Nonlinear functional analysis approach // *Journal of Mathematical Physics*. – 1981. – T. 22. – №. 12. – C. 2794–2802.

258. Caro S. Comparison of Robustness Indices and Introduction of a Tolerance Synthesis Method for Mechanisms / S. Caro, F. Bennis, P. Wenger // *Canadian Congress of Applied Mechanics*. – 2005. – C. 1–2.

259. Caro S. Tolerance synthesis of mechanisms: a robust design approach / S. Caro, F. Bennis, P. Wenger // *ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. – American Society of Mechanical Engineers, 2003. – C. 339–348.

260. Chase K. W. A survey of research in the application of tolerance analysis to the design of mechanical assemblies / K. W. Chase, A. R. Parkinson // *Research in Engineering design*. – 1991. – T. 3. – №. 1. – C. 23–37.

261. Darlow M. S. Balancing of high-speed machinery / M. S. Darlow // *Springer Science & Business Media*. – 2012.

262. Dimarogonas A. D. Analytical methods in rotor dynamics / A. D. Dimarogonas, S. A. Paipetis, T. G. Chondros. – Berlin–Heidelberg–New York–Springer Verlag, 2013.

263. Eriksson L. Design of experiments: principles and applications / L. Eriksson – MKS Umetrics AB, – 2008

264. Gainsburg J. The mathematical modeling of structural engineers / J. Gainsburg // *Mathematical Thinking and Learning*. – 2006. – № 8 (1). – P. 3–36.

265. Gebali F. Solving Systems of Linear Equations / F. Gebali // *Algorithms and Parallel Computing*. – John Wiley & Sons, Inc. – 2011. – P. 305–321.

266. Goos P. Optimal Design of Experiments. A Case Study Approach / P. Goos, J. Bradley. – A John Wiley & Sons, Ltd., Publication. – 2011. – 287 p.

267. Goroshko A. Construction and practical application of hybrid statistically-determined models of multistage mechanical systems / A. Goroshko, V. Royzman, J. Pietraszek // *Mechanics*. – 2014. – T. 20. – №. 5. – С. 489–493.

268. Goroshko A. Experience Formulating and Solving Inverse Problems for Strength Design of Electronic Equipment / A. Goroshko // *American Association for Science and Technology AASCIT Communications*. Vol. 1, Issue 2. – August 2014. – online <http://www.aascit.org/communications/paperInfo?journalId=940&paperId=575>

269. Goroshko A. V. Identification of physical and mechanical properties of compound by solving inverse problems / A. V. Goroshko, V. P. Royzman, A. Bubulis // *Vibroengineering Procedia of International Conference «Vibroengineering–2013»*, 17-19 September 2013, Druskininkai, Lithuania. – P. 81–86.

270. Goroshko A. V. Increase in Solution Stability of Ill Conditioned Dynamics Problems / A. V. Goroshko, V. P. Royzman // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2016. – Vol. 45, Issue 1. – P. 21–24.

271. Goroshko A. V. Methods for testing and optimizing composite ceramics-compound joints by solving inverse problems of mechanics / A. V. Goroshko, V. P. Royzman, A. Bubulis, K. Juzėnas // *Journal of Vibroengineering*. – 2014. – Vol. 16, Issue 5. – P. 2178–2187.

272. Goroshko A. V. Statistical Methods for Providing the Stability of the Solutions of Inverse Problems and Their Application to Decrease Rotor Vibroactivity / A. V. Goroshko, V. P. Roizman // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2015. – Vol. 44, № 3. – P. 232–238.

273. Goroshko A.V. Study of the Stability and Accuracy of the Eccentricity Identification Algorithm in Fast-Revolving Rotor Balancing Problems / A. V. Goroshko, V. P. Royzman, O. V. Barmina // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2016. – Vol. 45, Issue 3. – P. 227–232.

274. Goroshko A. Balancing of turbomachine rotors by increasing the eccentricity identification accuracy/ A. Goroshko, V. Royzman, V. Ostaševičius // *Mechanika*. – 2016. – Vol. 22(3). – P. 206–211.
275. Goroshko A. V. Solution of inverse problems of dynamics of an aircraft engine turbopump to reduce its vibration / A. V. Goroshko, V. P. Royzman // *Aviation in the XXI-st Century Proceedings the Sixth World Congress : Safety in Aviation and Space Technologies*, September 23–25, 2014. – Kyiv, 2014. – Vol. 1. – P. 1.5.31–1.5.34.
276. Hansen P. C. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical Aspects of Linear Inversion / P. C. Hansen. – SIAM, Philadelphia, 1998. – 247 p.
277. Hansen P. C. Regularization tools: a Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems / P. C. Hansen // *Numerical algorithms*. – 1994. – T. 6, №. 1. – C. 1–35.
278. Herrera-Franco P. J. A study of the mechanical properties of short natural-fiber reinforced composites / P. J. Herrera-Franco, A. Valadez-Gonzalez // *Composites Part B : Engineering*. – 2005. – Vol. 36. №. 8. – P. 597–608.
279. Hoang N. S. Solving ill-conditioned linear algebraic systems by the dynamical systems method (DSM) / N. S. Hoang, A. G. Ramm // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2008. – Vol. 16, N 5. – P. 617–630.
280. Hong-Chao Zhang. *Advanced Tolerancing Techniques* / Texas Technical University - Lubbock, Texas
281. Kershaw D. S. The incomplete Cholesky-conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations / D. S. Kershaw // *Journal of Computational Physics*. – 1978. – Vol. 26, № 1. – P. 43–65.
282. Kikuchi N. Topological synthesis of compliant mechanisms using multi-criteria optimization / N. Kikuchi, S. Kota. – 1997.
283. Koucky M. Exact reliability formula and bounds for general k-out-of-n systems / M. Koucky // *Reliability Engineering and System Safety*. – 2003. – № 82. – P. 229–231.

284. Kubo S. Inverse problems related to the mechanics and fracture of solids and structures // *JSME international journal*. Ser. 1, Solid mechanics, strength of materials. – 1988. – T. 31. – №. 2. – C. 157-166.
285. Kuehl R. O. O. Designs of experiments: statistical principles of research design and analysis / O. O. Kuehl R. – Duxbury Press, – 2000
286. Lord R. E. Solving linear algebraic equations on an MIMD computer / R. E. Lord, J. S. Kowalik, S. P. Kumar // *Journal of the ACM (JACM)*. – 1983. – Vol. 30. – №. 1. – P. 103–117.
287. Manual balancing / M. E. Levit et al. – Moscow : Mashinostroenie, 1992. – 464 p.
288. MathWorks [Electronic resource] / The MathWorks, Inc. 1994–2014. – Mode off access: <http://www.mathworks.com/>.
289. Mourao A. Solving coupled supply chain problems with axiomatic design and mechanical tolerances design / A. Mourao, J. Fradinho, A. M. Goncalves-Coelho // *International Journal of Modern Manufacturing Technologies*. –2011. –Vol. III, No. 2. – C. 79–84.
290. Nakayama H. Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence (Vector Optimization) / H. Nakayama, Y. Yun, M. Yoon. – Springer, 2009. – P. 197.
291. Nielsen S. F. The stochastic EM algorithm: estimation and asymptotic results / S. F. Nielsen. – Bernoulli, 2000. – Vol. 6, No. 3. – P. 457–489.
292. Optimal Experimental Design with R / D. Rasch, J. Pilz, R. Verdooren, A. Gebhardt // Taylor & Francis Group, 2011. – 317 p.
293. Owen A. Empirical likelihood ratio confidence regions / A. Owen // *The annals of statistics*. – 1990. – Vol. 15. No. 1. – P. 90–120.
294. Phillips D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // *Journal of the Association for Computing Machinery*. – 1962. – Vol. 9, № 1. – P. 84–97.
295. Pietrashek J. The Heuristic Approach to the Selection of Experimental Design, Model and Valid Pre-Processing Transformation of DoE Outcome /

J. Pietrashek, A. Goroshko // Trans Tech Publications, Switzerland, Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 874. – P. 145–149.

296. Pietraszek J. The Principal Component Analysis of Tribological Tests of Surface Layers Modified with IF-WS2 Nanoparticles / J. Pietraszek, J. Korzekwa, A. Goroshko // Applied Mechanics and Materials, Trans Tech Publications, Switzerland. – 2015. – Vol. 235. – P. 9–15.

297. Royzman V. Multiple inverse problem / V. Royzman, A. Goroshko // Journal of Vibroengineering. September. – 2012. – Vol. 14. ISSUE 3. – C. 1417–1424.

298. Royzman V. Mechanical strength and hermiticity of moisture protection units of thinfilm and electrolytic capacitors / V. Royzman, A. Goroshko, A. Bubulis // International Conference & Exhibition for Power Electronics Intelligent Motion Power Quality, 2–4 June, 2009, Shanghai, [China]: official conference proceedings of the 8th International PCIM China Conference Stuttgart : Mesago PCIM GmbH, 2009. – P. 101–105.

299. Saaty T. L. A scaling method for priorities in hierarchical structures / T. L. Saaty // Journal of mathematical psychology. – 1977. – T. 15. – №. 3. – C. 234–281.

300. Sasaki T. Traffic control process of expressway by fuzzy logic / T. Sasaki, T. Akiyama // Fuzzy Sets and Systems. – 1988. – Vol. 26. – P. 165–178.

301. Sawaragi Y. Theory of multiobjective optimization / Y. Sawaragi, H. Nakayama, T. Tanino. – New York : Academic press, 1985. – P. 296.

302. Siebertz K. Statistische Versuchsplanung. Design of Experiments (DoE) / K. Siebertz, D. Bebbler, T. Hochkirchen. – London–New York : Springer Heidelberg Dordrecht, 2010. – 326 p.

303. Song J. Y. Imbalance detection and rotor identification system : пат. 5800331 CIIA. – 1998.

304. Spotts M. F. Allocation of Tolerances to Minimize Cost of Assembly / M. F. Spotts // J. Eng. Ind. – 1973. – 95(3). – P. 762–764

305. Sun X. L. A convexification method for a class of global optimization problems with applications to reliability optimization / X. L. Sun, K. I. M. McKinnon, D. Li // Journal of Global Optimization. – Vol. 21. – Number 2. – C. 185–199.

306. Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation / A. Tarantola – siam, 2005
307. Terebizh V. YU. Quasi-optimal filtering in inverse problems / V. YU. Terebizh // Astronomical and Astrophysical Transactions. – April 2004. – Vol. 23, No. 2. – P. 85–93.
308. Ting K. Performance Quality and Tolerance Sensitivity of Mechanisms/ K. Ting, Y. Long // ASME. J. Mech. Des. – 1996; – 118(1):– P. 144 – 150. doi:10.1115/1.2826846.
309. Tolerance synthesis: quantifier notion and virtual boundary / Dantan J. Y. et al. // Computer-Aided Design. – 2005. – T. 37. – № 2. – C. 231–240.
310. Velten K. Mathematical Modeling and Simulation: Introduction for Scientists and Engineers / K. Velten. – Wiley-VCH, 2009. – 348 p.
311. Vibrations of mechanical systems with regular structure. Ludmilla Banakh. Published by Springer, 2012. – P. 350.
312. Zade L. A. Outline of new approach to analyses of complex systems and decision processes / L. A. Zade // IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics. – 1973. – V. 3. – P. 28–44.
313. Zhu J. Performance distribution analysis and robust design / J. Zhu, K. L. Ting // Journal of Mechanical Design. – 2001. – T. 123. – №. 1. – C. 11–17.
314. Zitzler E. Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: Methods and applications / E. Zitzler. – Ithaca : Shaker, 1999. – Vol. 63. – P. 134.

## Додаток А

Дані експериментів і прикладні програми для розв'язання  
задачі зниження вібрацій швидкісних роторівА.1. Достатнє оцінювання похибки розв'язку дискретної лінійної  
оберненої задачі

```

%Script%
% Програма підрахунку максимально можливої похибки окремих елементів вектора розв'язку СЛАР
%
% INPUT  A - матриця СЛАР
%      dy - вектор похибок виміряних величин (вільних членів СЛАР)
% OUTPUT dx - вектор максимально можливої похибки елементів вектора розв'язку
%-----
clear all; close all;
%--
[n m]=size(A); M=zeros(n,m); cond(A);
dx=dy;

% Цикл, що знаходить мінори і формує матрицю М мінорів
for k=1:n
for p=1:m
    B1=zeros(n-1,m);
    for i=1:n-1
        if i<k
            B1(i,:)=A(i,:);
        else
            B1(i,:)=A(i+1,:);
        end
    end
    B2=zeros(n-1,m-1);
    for j=1:m-1
        if j<p
            B2(:,j)=B1(:,j);
        else
            B2(:,j)=B1(:,j+1);
        end
    end
    M(k,p)=det(B2);
end
end
%-----
% Обчислення максимальної похибки кожного елемента вектора розв'язків
for j=1:m;
sum=0;
    for i=1:n
        sum=sum+abs(dy(i)*M(i,j));
    end
dx(j)=sum/det(A);
end
%-----
[dx; dy] % Порівняння максимальних похибок вільних членів і розв'язку

```



## А.2. Статичні коефіцієнти впливу роторів компресорів ГТД АИ-20

Таблиця А.1.

Статичні коефіцієнти впливу  $\alpha_{ik}$  для роторів компресорів ГТД АИ-20

| Місце прикладання<br>навантаження | Номери ступенів і коефіцієнти впливу $\alpha_{ik} \cdot 10^{-9}$ м/Н |      |      |      |      |      |      |      |       |       |
|-----------------------------------|--|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
|                                   | 1  | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9     | 10    |
| <b>Ротор №603244</b>              |  |      |      |      |      |      |      |      |       |       |
| 1 ступінь                         | 2  | 2,2  | 2,3  | 2,26 | 1,9  | 1,85 | 1,5  | 1,55 | 1,3   | 1,05  |
| 2 ступінь                         | 2,4  | 2,5  | 3,75 | 4    | 3,6  | 3,44 | 3,15 | 3    | 2,75  | 2,4   |
| 3 ступінь                         | 2,4  | 3,7  | 4,75 | 4,85 | 4,6  | 4,6  | 4,2  | 4,1  | 3,9   | 3,4   |
| 4 ступінь                         | 2,45   | 3,6  | 4,95 | 5,45 | 5,27 | 5,55 | 4,85 | 5,5  | 5,2   | 4,55  |
| 5 ступінь                         | 2,5  | 3,75 | 5,2  | 5,67 | 6,35 | 6,35 | 5,6  | 6,55 | 6,45  | 5,6   |
| 6 ступінь                         | 2,45   | 3,7  | 4,8  | 5,8  | 6,4  | 7,2  | 7,4  | 7,4  | 7,5   | 7,3   |
| 7 ступінь                         | 2,04   | 3,7  | 4,85 | 6    | 6,3  | 7,35 | 7,7  | 8,8  | 8,8   | 8,2   |
| 8 ступінь                         | 1,6  | 3,5  | 4,5  | 5,1  | 6,7  | 7,35 | 8,2  | 9,1  | 9,4   | 9,1   |
| 9 ступінь                         | 1,8  | 3,1  | 4,85 | 5,85 | 6,3  | 7,5  | 7,85 | 9,8  | 10,4  | 10    |
| 10 ступінь                        | 1,2  | 2,7  | 3,5  | 5,6  | 7,2  | 7,6  | 9,3  | 8,7  | 10,25 | 9,9   |
| <b>Ротор №8808</b>                |  |      |      |      |      |      |      |      |       |       |
| 1 ступінь                         | 2,15   | 2,53 | 2,37 | 2,3  | 1,95 | 1,8  | 1,55 | 1,47 | 1,44  | 1,13  |
| 2 ступінь                         | 2,5  | 3,75 | 3,77 | 3,9  | 3,84 | 3,59 | 3,25 | 2,65 | 2,8   | 2,5   |
| 3 ступінь                         | 2,35   | 3,65 | 4,75 | 4,7  | 4,2  | 3,9  | 3,5  | 4,3  | 3,7   | 3,45  |
| 4 ступінь                         | 2,05   | 3,35 | 5,1  | 2,45 | 4,15 | 4,2  | 3,7  | 5,6  | 5,0   | 4,1   |
| 5 ступінь                         | 1,26   | 3,9  | 4,95 | 4,4  | 4,9  | 4,9  | 4,1  | 6,3  | 5,85  | 5,3   |
| 6 ступінь                         | 2,1  | 3,6  | 4,7  | 5,5  | 5,9  | 6,65 | 6,7  | 7,0  | 7,0   | 6,65  |
| 7 ступінь                         | 1,5  | 2,6  | 4,75 | 4,52 | 5,3  | 5,8  | 6,55 | 8,45 | 7,95  | 7,7   |
| 8 ступінь                         | 1,5  | 3,15 | 4,4  | 4,8  | 6,05 | 6,6  | 8,0  | 8,7  | 8,9   | 8,2   |
| 9 ступінь                         | 1,4  | 2,9  | 4,9  | 4,25 | 5,15 | 5,15 | 5,15 | 9,75 | 9,9   | 9,0   |
| 10 ступінь                        | 1,25   | 2,7  | 4,0  | 4,5  | 5,7  | 6,45 | 7,65 | 8,9  | 9,7   | 9,7   |
| <b>Ротор №603255</b>              |  |      |      |      |      |      |      |      |       |       |
| 1 ступінь                         | 2,6  | 3,45 | 2,55 | 2,9  | 2,8  | 2,16 | 3,0  | 2,0  | 1,8   | 1,4   |
| 2 ступінь                         | 2,8  | 3,7  | 4,35 | 3,7  | 3,35 | 3,0  | 3,0  | 2,9  | 2,45  | 2,3   |
| 3 ступінь                         | 2,8  | 4,1  | 5,1  | 5,0  | 5,2  | 4,45 | 4,6  | 4,6  | 4,0   | 3,7   |
| 4 ступінь                         | 2,8  | 4,6  | 5,35 | 6,2  | 6,42 | 6,2  | 6,4  | 5,3  | 5,36  | 5,3   |
| 5 ступінь                         | 2,4  | 3,9  | 5,35 | 5,9  | 6,55 | 6,3  | 6,45 | 6,75 | 6,3   | 6,2   |
| 6 ступінь                         | 2,45   | 4,3  | 5,3  | 6,4  | 7,0  | 7,75 | 8,3  | 7,9  | 7,85  | 7,7   |
| 7 ступінь                         | 2,1  | 3,15 | 5,2  | 6,3  | 6,95 | 7,95 | 8,9  | 8,85 | 8,8   | 8,4   |
| 8 ступінь                         | 1,85   | 3,5  | 5,1  | 5,9  | 6,8  | 7,7  | 8,7  | 9,65 | 9,5   | 9,3   |
| 9 ступінь                         | 1,6  | 3    | 4,85 | 5,6  | 6,9  | 7,85 | 8,8  | 10,4 | 10,6  | 10,55 |
| 10 ступінь                        | 1,4  | 3,3  | 4,3  | 5,6  | 7,0  | 8,1  | 9,4  | 9,4  | 10,5  | 11,4  |

### А.3. Реалізація методу усіченої оцінки найменших квадратів для одержання стійких розв'язків задачі ідентифікації ексцентриситетів ротора компресора авіадвигуна АИ-20

```

% Script %
% INPUT A – матриця добутоків податливостей на маси дисків (п'ятимасова модель)
%       e0 – «точні» значення ексцентриситетів
%       y0 – «точні» значення прогинів ротора
%       d – точність визначення прогинів (ціна поділки шкали динамометра), м
%       s – середньоквадратичне відхилення результатів вимірювання прогинів
%       n – кількість вимірювань
%       B – вектор виміряних прогинів
% OUTPUT
%       xsr – оцінка найменших квадратів
%       xtr – усічена оцінка найменших квадратів
%-----
clear all; close all;
A=[0.228 0.203 0.195 0.155 0.1299;
    0.184 0.246 0.284 0.246 0.2457;
    0.143 0.23 0.303 0.295 0.3472;
    0.111 0.195 0.29 0.336 0.444;
    0.067 0.139 0.234 0.316 0.52]
e0=[77.4; 89.9; 105.0; 79.0; 59.5]*10^(-6);
y0=A*e0; d=10^(-5);
s=d/3;
n=20;
B=ones(5, n);
    for i=1:5
        B(i, :)= normrnd(y0(i),s,1,n); % вектор виміряних величин,
    end
mb=mean(B'); mb=mb'; %усереднений вектор виміряних величин
X=((A'*A)^(-1)*A'*B)' % матриця n значень шуканих величин
xsr=mean(X); %середнє значення шуканого вектора (ОНК)
B=B'; bsr=mean(B); %середнє значення виміряного вектора
    for i=1:n % матриця середніх значень виміряних величин
        Bsr(i,:)=bsr; % матриця середніх значень виміряних величин
    end
C2=(Bsr-B)*( Bsr-B); % створення вибіркової коваріаційної матриці шуму
A1=C2^(-1/2)*A;
I=A1'*A1; % матриця Фішера
[U,D,V]=svd(A1) % SVD-розкладання матриці A
I=V*D^2*V' % розкладена матриця Фішера
p=V*(xsr)';
V(:, 4)=0; V(:, 5)=0; % обнуляємо зайві два останні вектори (у V - вектори-стовпці)

%-----
display ' Оригінал (точне значення вектора ексцентриситетів '; e0
display ' ОНК '; xsr'
display ' Усічена ОНК '; xtr=V*p
display ' Відносна похибка ОНК '; dxsr=norm(xsr'-e0)/norm(e0)
display ' Відносна похибка усіченої ОНК '; dxtr=norm(xtr-e0)/norm(e0)
display ' В результаті стійкість підвищилась і похибка зменшилась у '; dxsr/dxtr

```

#### А.4. Статистична обробка випадкових величин з полімодальним розподілом імовірностей

```

%Script %
% Отримання вектора реальних виміряних значення дисбалансів по лівій опорі
% b - точність вимірювання дисбалансів
% X - вектор реальних виміряних значення дисбалансів по лівій опорі
% k - кількість компонент у суміші
% r - Задали мінімальну вагу компоненти суміші (рівень значимості)
clear all;
A=[0.0025, 0.004, 0.0076, 0.0175, 0.0133, 0.0122, 0.0061, 0.0307,
    0.0232, 0.0149, 0.0099, 0.0166, 0.0073, 0.0230, 0.0241, 0.0400];
A=A*(252*4); A=fix(A); B=[2,6,10,14,18,22,26,30,34,38,42,46,50,54,58,62];
k=1;s=1;
for j=1:16
    i=1;
    while i<=A(j)
        X(k)=normrnd(B(j),s);
        i=i+1;k=k+1;
    end
end
X=X';

%Script% Реалізація алгоритму побудови гістограми
b=1; % b – початковий крок побудови гістограми
l=size(X); k=fix(l(1)/10); % початкова кількість компонент у суміші.
r=0.1; % мінімальна вага компоненти суміші (рівень значимості)
p=k; GMMModel = fitgmdist(X,k);
for i=1:p
    while GMMModel.PComponents(i)<r
        k=k-1; GMMModel = fitgmdist(X,k); % Розщеплюємо суміш
    end
end
GMMModel = fitgmdist(X,k);

%-----
% Function % Функція для перевірки можливості апроксимації унімодальними законами розподілу
function [pd1,pd2,pd3,pd4,pd5,pd6,pd7,pd8,pd9] = createFit(X)
% [PD1,PD2,PD3,PD4,PD5,PD6,PD7,PD8,PD9] = CREATEFIT(X)
% Output fitted probability distributions: PD1,PD2,PD3,PD4,PD5,PD6,PD7,PD8,PD9

% Data from dataset "X data":
% Y = X
X = X(:); % Force all inputs to be column vectors
clf; hold on; LegHandles = []; LegText = { }; % Prepare figure

% --- Plot data originally in dataset "X data"
[CdfF,CdfX] = ecdf(X,'Function','cdf'); % compute empirical cdf
BinInfo.rule = 5;
BinInfo.width = 4;
BinInfo.placementRule = 1;
[~,BinEdge] = internal.stats.histbins(X,[],[],BinInfo,CdfF,CdfX);
[BinHeight,BinCenter] = ecdfhist(CdfF,CdfX,'edges',BinEdge);
hLine = bar(BinCenter,BinHeight,'hist');
set(hLine,'FaceColor','none','EdgeColor',[0.333333 0 0.666667],...
    'LineStyle','-','LineWidth',1);
xlabel('Data'); ylabel('Density')
LegHandles(end+1) = hLine; LegText{end+1} = 'X data';

% Create grid where function will be computed
XLim = get(gca,'XLim'); XLim = XLim + [-1 1] * 0.01 * diff(XLim);

```

```

XGrid = linspace(XLim(1),XLim(2),100);

% --- Create fit "Non-Parametric"
pd1 = fitdist(X,'kernel','kernel','normal','support','unbounded'); YPlot = pdf(pd1,XGrid);
hLine = plot(XGrid,YPlot,'Color',[1 0 0],...
    'LineStyle','-','LineWidth',2,...
    'Marker','none','MarkerSize',6);
LegHandles(end+1) = hLine; LegText{end+1} = 'Non-Parametric';

% --- Create fit "Normal"-----
% pd2 = ProbDistUnivParam('normal',[ 39.20340592801, 18.98352076989])
pd2 = fitdist(X, 'normal'); YPlot = pdf(pd2,XGrid);
hLine = plot(XGrid,YPlot,'Color',[0 0 1],...
    'LineStyle','-','LineWidth',2,...
    'Marker','none','MarkerSize',6);
LegHandles(end+1) = hLine; LegText{end+1} = 'Normal';

% --- Create fit "Reyleigh"-----
% pd3 = ProbDistUnivParam('rayleigh',[ 30.78821183476])
pd3 = fitdist(X, 'rayleigh'); YPlot = pdf(pd3,XGrid);
hLine = plot(XGrid,YPlot,'Color',[0.666667 0.333333 0],...
    'LineStyle','-','LineWidth',2,...
    'Marker','none','MarkerSize',6);
LegHandles(end+1) = hLine; LegText{end+1} = 'Reyleigh';

% --- Create fit "Weibull"-----
% To use parameter estimates from the original fit:
% pd4 = ProbDistUnivParam('weibull',[ 43.99211798283, 2.134625398676])
pd4 = fitdist(X, 'weibull'); YPlot = pdf(pd4,XGrid);
hLine = plot(XGrid,YPlot,'Color',[0.333333 0.333333 0.333333],...
    'LineStyle','-','LineWidth',2,...
    'Marker','none','MarkerSize',6);
LegHandles(end+1) = hLine; LegText{end+1} = 'Weibull';

% --- Create fit "Rician"-----
% pd6 = ProbDistUnivParam('rician',[ 31.18930589992, 21.48319315739])
pd6 = fitdist(X, 'rician'); YPlot = pdf(pd6,XGrid);
hLine = plot(XGrid,YPlot,'Color',[1 1 0],...
    'LineStyle','-','LineWidth',2,...
    'Marker','none','MarkerSize',6);
LegHandles(end+1) = hLine; LegText{end+1} = 'Rician';

% --- Create fit "Lognormal"
% pd8 = ProbDistUnivParam('lognormal',[ 3.473663525181, 0.7301214743411])
pd8 = fitdist(X, 'lognormal'); YPlot = pdf(pd8,XGrid);
hLine = plot(XGrid,YPlot,'Color',[0.666667 0.666667 0.666667],...
    'LineStyle','-','LineWidth',2,...
    'Marker','none','MarkerSize',6);
LegHandles(end+1) = hLine; LegText{end+1} = 'Lognormal';

% --- Create fit "Inverse Gaussian"-----
% pd9 = ProbDistUnivParam('inverse gaussian',[ 39.20340592801, 54.37053929764])
pd9 = fitdist(X, 'inverse gaussian'); YPlot = pdf(pd9,XGrid);
hLine = plot(XGrid,YPlot,'Color',[0.666667 0.333333 1],...
    'LineStyle','-','LineWidth',2,...
    'Marker','none','MarkerSize',6);
LegHandles(end+1) = hLine; LegText{end+1} = 'Inverse Gaussian';
box on; grid on; hold off; % Adjust figure
% Create legend from accumulated handles and labels
hLegend = legend(LegHandles,LegText,'Orientation','vertical','FontSize',9,'Location','northeast');
set(hLegend,'Interpreter','none');

```

## A.5. Оптимізація допустимих значень дисбалансів ротора ТНА-150

```

% Script optimization5.m %
% працює спільно з @myson5
% Використовуються пошук оптимальних допусків зліва і справа від номінального значення
% x0 – початкове наближення для пошуку допустимих дисбалансів
% x - шуканий вектор максимальних дисбалансів
% A1 – матриця податливості ротора, одержана експериментально
% M – вектор значень мас дисків
% omega – перша критична частота ротора
%-----
clear all;
global M
% Пошук критичних частот ротора з визначника частотного рівняння
A1=10^(-8)*[22 -1.24 3.25; -1.6 2.2 -2.3; 3 -2.32 21.5];
M=[4.05; 2.74; 11]; M1=[M'; M'; M']; A=A1.*M1;
x0=[100];
x = fzero(@Chastoty, x0); clear x; % оптимізація допустимих значень дисбалансів
omega(1)=2041; omega(2)=3400; omega(3)=14034; lb=[0; 0; 0];
ub=[0.5; 0.5; 0.5]; x0= ub/50;
[x,fval,exitflag]= fmincon(inline('-x(1)*x(2)*x(3)'), x0, [], [], [], [],lb,ub, @myson5);

% Function Chastoty.m %-----
%функція, що прирівнюється до нуля для пошуку коренів частотного рівняння
function F = Chastoty(x)
F=105431.5e-27*x^6-22424.18e-18*x^4+331.65e-9*x^2-1

% Function mysou5.m -----
% Функція, що обчислює нелінійні обмеження у вигляді нерівностей
% c – вектор, елементи якого обчислюють нелінійні обмеження у вигляді нерівностей
function [c, seq] = mysou5(x)
global A A1 M;
c=[0;0;0;0;0]; % Нульовий вектор обмежень нерівностями <=0
% Обмеження для верхньої границі елементів вектора допусків x
omega(1)=2041; omega(2)=3400; omega(3)=14034; E=ones(3);
c1=[-0.2403 0.2470 0.0706;
    0.3191 0.6313 0.1288;
    0.0322 0.1040 -0.0906]*([0.9164 -0.0517 0.1354; -0.0667 0.0916 -0.0958; 0.1250 -0.0966 0.8956]*x);
% Четвертий і п'ятий елементи вектора обмежень
b= [47.8 138 287; 426 309 187];
R=[0;0];
for j=1:3
    z1=b(1,j)*(M(j)*c1(j)+x(j))*omega(j)^2; R(1)=R(1)+z1;
    z2=b(2,j)*(M(j)*c1(j)+x(j))*omega(j)^2; R(2)=R(2)+z2;
end

c2(1)= abs(R(1))-300; c2(2)= abs(R(2))-300;
c=[c1(1)-1e-4; c1(2)-1e-4; c1(3)-1e-4; c2(1); c2(2)];
% Права частина обмежень нерівностей є пустим масивом, оскільки обмеження для рівностей відсутні
seq = [ ];
%-----

```

## А.6. Реалізація алгоритму забезпечення стійкості і заданої точності розв'язків задачі ідентифікації ексцентриситетів ротора ТНА-150

```

%Script%
% n - розмірність вектора вимірювань
% k – шукана кількість вимірювань вектора правої частини
% y – вектор вимірюваних прогинів
% omega – кутова частота
% delta_y_dop - допустима відносна похибка вектора вимірювань
% dydop - допустима абсолютна похибка вектора вимірювань
% delta_y_dop – допустима похибка вимірювань
% P – імовірність неперевищення цієї похибки (надійність)
%-----
clear all; global mb T C n k
k=10; delta_y_dop=0.05/24.8130; P=0.95;
n= [14100; 15000; 15600; 16000]; %частоти обертання, на яких заміряється прогин
y=[8*10^(-4); 12*10^(-4); 12*10^(-4); 22*10^(-4)]; % Одиниці вимірювання прогинів - сантиметри
omega=n* pi/30; n=4;
B= omega.*y; B= omega.*B; B0=B; %вектор правої частини СЛАР

% Пошук параметри законів розподілу похибок елементів вектора правої частини
S=ones(n,k);
    for i=1:n
        S(i,:)=normrnd(B0(i), abs(B0(i)*0.04/3),1,k);
        [muhat(i),sigmahat(i)] = normfit(S(i,:));
    end
mb=mean([S(1,:); S(2,:); S(3,:); S(4,:)]); % усереднення вектора-рядка вимірювань
mb=mb'; % одержання вектора-стовпця вимірювань
T=(n*(k-1)/(k*(k-n)))*finv(0.95,n,k-n); % одержання значення T2-статистики Хоттелінга
C = cov([S(1,:); S(2,:); S(3,:); S(4,:)]); % коваріаційна матриця результатів вимірювань
x0 = 0.5*mb; % початкове наближення

y= fminsearch(@myfun1,x0); % виклик оптимізатора. Пошук вектора мат. сподівань
dy=y-mb; % абсолютна похибка вимірюного вектора
dydop=abs(delta_y_dop*mb);

i=0; plot(k, norm(dy),'+'); hold on;
    while norm(dy)>norm(dydop) % цикл, що реалізує ітер. алгоритм досягнення необхідного значення k
        i=i+1;
        dy2=(y-mb)/2; % новий (зменшений) вектор абсолютної похибок, який треба досягти
        L=((dy2)*inv(C)*dy2)/(n*finv(0.95,n,k-n)); D=(L*n+1)^2-4*L;
        k1=((L*n+1)-sqrt(D))/(2*L); k2=((L*n+1)+sqrt(D))/(2*L);k=k2; k=ceil(k)

        F=ones(n, k);
            for i=1:4
                F(i, :)=normrnd(muhat(i),sigmahat(i),1,k);
            end
        B=[F(1,:); F(2,:); F(3, :); F(4, :)]; % генерація методом Монте-Карло

        mb=mean(B'); mb=mb'; % одержання вектора-стовпця вимірювань
        T=(n*(k-1)/(k*(k-n)))*finv(0.95,n,k-n); C = cov(B');
        x0 = 0.5*mb; % початкове значення для оптимізації

        y= fminsearch(@myfun1,x0) % виклик оптимізатора
        dy=y-mb;%абсолютна похибка вектора вимірювань - пошук помилки
        A(i,2)=[k]; A(i,1)=[norm(dy)]; plot(k, norm(dy)); hold on; %побудова графіка
    end % в результаті отримане k - і є шукана кількість експериментів
plot(A(:,2), A(:,1)); %побудова графіка

```



```

% Script %
% Моделювання для оптимізованих значень
clear all; close all;
k=0; t=-130; s= zeros(1, 19683);
for a1=5.5*10^(-6):0.5*10^(-6):6.5*10^(-6)
  for a2=38*10^(-6):2*10^(-6):42*10^(-6)
    for n1=0.290:0.002:0.294
      for n2=0.315:0.015:0.345
        for e1=1.22*10^5:0.09*10^5:1.4*10^5
          for e2=0.098*10^5:0.002*10^5:0.102*10^5
            for r1=0.19*10^(-3):0.01*10^(-3):0.21*10^(-3)
              for r2=0.74*10^(-3):0.01*10^(-3):0.76*10^(-3)
                for r3=1.38*10^(-3):0.17*10^(-3):1.72*10^(-3)
                  P1=((1+n1)*a1-(1+n2)*a2)*t; P4=(r1^2)*(1+n1); P5=(r2^2)*(1-n1); P6=e1*(r2^2-r1^2); P2=(P4+P5)/P6;
                  P7=(r3^2)*(1+n2); P8=(r2^2)*(1-n2); P9=e2*(r3^2-r2^2); P3=(P7+P8)/P9; P=P1/(P2+P3); k=k+1;
                  s(k)=P*(r1^2+r2^2)/(r2^2-r1^2);
                end; end; end; end; end; end; end; end; end
            [y, x] = hist(s,23); y=y/(19683*(x(23)-x(1))/23); bar(x,y,1,'y');
          end on;
          A1=[0,0,3,6,10,10,4,0,0,0,1,3,6,1,1,2,1,2,0];
          B1=[50,55,60,65,70,75,80,85,90,95,100,105,110,115,120,125,130,135,140];
          B1=B1/(3.1415*(0.75)^2); B=B1+2.5; A=A1/250;
          bar(B, A, 1, 'w'); grid
        end; end; end; end; end; end; end; end; end;
%-----

% Script %
% Відбір таких сполучень параметрів, які задовольняють умови міцності
clear all; close all;
format long; k=0; t=-130; M=zeros(9460,9); s=zeros(1,9460);
for a1=4*10^(-6):2*10^(-6):8*10^(-6)
  for a2=35*10^(-6):5*10^(-6):45*10^(-6)
    for n1=0.25:0.05:0.35
      for n2=0.31:0.02:0.35
        for e1=10^5:0.25*10^5:1.5*10^5
          for e2=0.05*10^5:0.05*10^5:0.15*10^5
            for r1=0.19*10^(-3):0.01*10^(-3):0.21*10^(-3)
              for r2=0.74*10^(-3):0.01*10^(-3):0.76*10^(-3)
                for r3=1.1*10^(-3):0.45*10^(-3):2*10^(-3)
                  P1=((1+n1)*a1-(1+n2)*a2)*t; P4=(r1^2)*(1+n1); P5=(r2^2)*(1-n1); P6=e1*(r2^2-r1^2);
                  P2=(P4+P5)/P6; P7=(r3^2)*(1+n2);
                  P8=(r2^2)*(1-n2);
                  P9=e2*(r3^2-r2^2);
                  P3=(P7+P8)/P9;
                  P=P1/(P2+P3);
                  if P*(r1^2+r2^2)/(r2^2-r1^2)<=34.36 & P*(r2^2+r3^2)/(r3^2-r2^2)<=54
                    k=k+1; s(k)=P*(r1^2+r2^2)/(r2^2-r1^2); M(k,1)=a1;M(k,2)=a2;
                    M(k,3)=n1; M(k,4)=n2; M(k,5)=e1; M(k,6)=e2; M(k,7)=r1; M(k,8)=r2; M(k,9)=r3;
                  end; end; end; end; end; end; end; end; end; end
            [y, x] = hist(s,23); y=y/(19683*(x(23)-x(1))/23); bar(x,y,1,'y');
          end on;
          B1=[50,55,60,65,70,75,80,85,90,95,100,105,110,115,120,125,130,135,140];
          A1=[0,0,3,6,10,10,4,0,0,0,1,3,6,1,1,2,1,2,0];
          B1=B1/(3.1415*(0.75)^2); B=B1+2.5; A=A1/250;
          bar(B, A, 1, 'w'); grid
        end; end; end; end; end; end; end; end; end;
%перевірка при номінальних значеннях параметрів
t=-130; a1=6*10^(-6); a2=40*10^(-6); n1=0.292; n2=0.33;
e1=1.31*10^5; e2=0.1*10^5; r1=0.2*10^(-3); r2=0.75*10^(-3); r3=1.55*10^(-3);
P1=((1+n1)*a1-(1+n2)*a2)*t; P4=(r1^2)*(1+n1); P5=(r2^2)*(1-n1); P6=e1*(r2^2-r1^2); P2=(P4+P5)/P6;
P7=(r3^2)*(1+n2); P8=(r2^2)*(1-n2); P9=e2*(r3^2-r2^2); P3=(P7+P8)/P9; P=P1/(P2+P3);
s=P*(r1^2+r2^2)/(r2^2-r1^2);

```



### Додаток Б.3. Одержання вагових коефіцієнтів експертних оцінок

Лінгвістичну шкалу побудуємо у відповідності з відомим ефективним підходом [299], згідно якого лінгвістична шкала містить дев'ять градацій оцінок відносної важливості (табл. Б.1).

Таблиця Б.11

| Якісна оцінка   | Кількісна оцінка $w_{ij}$ |
|---|---------------------------|
| Строго еквівалентні (однаково значущі)  | 1                         |
| Слабо переважніше   | 3                         |
| Дещо переважніше  | 5                         |
| Значно переважніше  | 7                         |
| Строго переважніше  | 9                         |
| Проміжні значення важливості  | 2, 4, 6, 8                |
| Оцінка порівняння елемента $j$ з елементом $i$ ( $w_{ji}$ ) має зворотне значення $\alpha_{ij}$ | $w_{ji} = 1/w_{ij}$       |

Така шкала відображає особливості людини як суб'єкта прийняття рішень і обробки інформації. Людина погано сприймає занадто деталізовані шкали значень ознак. Психофізичні дані свідчать про те, що людина впевнено розрізняє не більше  $7 \pm 2$  градацій на шкалі деякої ознаки (параметра). Якщо ж шкала містить більшу кількість градацій, то сусідні рівні починають зливатись, і вже не можуть бути з впевненістю розмежовані. На практиці часто використовують лише п'ять основних нечітких оцінок шкали і цього виявляється достатньо при порівнянні двох альтернатив або критеріїв. Зробленим лінгвістичним судженням експертів надаються відповідні чисельні оцінки від 1 до 9. В табл. Б.1 через  $w_{ij}$  позначена оцінка значимості критерію  $i$

по відношенню до критерію  $j$ . На основі всіх визначених попарних оцінок  $w_{ij}$  далі будується матриця парних порівнянь  $\mathbf{W} = [w_{ij}]_1^9$ .

У нашому випадку досліджувана система характеризується дев'ятьма критеріями  $x_i$ ,  $i = \overline{1,9}$ . Матриця парних порівнянь, отримана в результаті опитування експертів, представлена у табл. Б.2.

Таблиця Б.2

Матриця попарних порівнянь

|            | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $E_1$ | $E_2$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|------------|------------|------------|---------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha_1$ | 1          | 1          | 4       | 4       | 2     | 2     | 1     | 1     | 1     |
| $\alpha_2$ | 1          | 1          | 4       | 4       | 2     | 2     | 1     | 1     | 1     |
| $\mu_1$    | 1/4        | 1/4        | 1       | 1       | 1/2   | 1/2   | 1/4   | 1/4   | 1/4   |
| $\mu_2$    | 1/4        | 1/4        | 1       | 1       | 1/2   | 1/2   | 1/4   | 1/4   | 1/4   |
| $E_1$      | 1/2        | 1/2        | 2       | 2       | 1     | 1     | 1/2   | 1/2   | 1/2   |
| $E_2$      | 1/2        | 1/2        | 2       | 2       | 1     | 1     | 1/2   | 1/2   | 1/2   |
| $R_1$      | 1          | 1          | 4       | 4       | 2     | 2     | 1     | 1     | 1     |
| $R_2$      | 1          | 1          | 4       | 4       | 2     | 2     | 1     | 1     | 1     |
| $R_3$      | 1          | 1          | 4       | 4       | 2     | 2     | 1     | 1     | 1     |

Будується матриця попарних порівнянь наступним чином [213]. Нехай  $w_1, w_2, \dots, w_n$  – шукані значення коефіцієнтів відносної значимості критеріїв;

$\mathbf{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  – набір коефіцієнтів відносної важливості (рангів);

$n$  – кількість частинних критеріїв.

Для кожного елементу матриці парних порівнянь справедливо  $w_{ij} = w_i / w_j$ .

За своїм змістом ранги  $w_i$  – це значення внесків відповідних частинних критеріїв, іншою мовою коефіцієнти переважності цих критеріїв.

В реальних ситуаціях елементи матриці парних порівнянь є неточними через те, що вони відображають суб'єктивну думку експерта. В цих умовах значення  $\mathbf{W}$  можна обчислити як вектор, що мінімізує функціонал

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_{ij} - w_i/w_j)^2 \rightarrow \min.$$

Іншим, широко поширеним методом пошуку рангів критеріїв на основі матриці парних порівнянь є наближений метод, запропонований Т. Сааті [213]. Згідно цього методу наближені значення вектора рангів знаходяться як середнє геометричне величин кожної рядки матриці парних порівнянь, і далі вони нормалізуються діленням на суму середніх геометричних:

$$w'_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n w_{ij}}, \quad w_i = w'_i / \sum_{i=1}^n w'_i.$$

Показником надійності визначення рангів є індекс узгодженості (ІУ) матриці парних порівнянь  $\mathbf{A}$ , що дає інформацію про ступінь порушень чисельної (кардинальної  $w_{ij} = w_i/w_j$ ) і транзитивної (порядкової) узгодженості парних порівнянь. ІУ розраховується на основі оцінки максимальної величини власного значення матриці  $\lambda_{\max}$ :

$$ІУ = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1),$$

де  $n$  – розмірність матриці  $\mathbf{A}$ . На основі ІУ розраховується показник відношення узгодженості ВУ:  $ВУ = ІУ / УВ$ , де  $УВ$  – значення узгодженості випадкової матриці такого ж порядку. При цьому в [213] на основі досвіду розв'язання великої кількості багатокритеріальних задач вказується, що для узгодженості парних відношень ВУ має бути не менше 10%.

## Б.4. Оптимізація допустимих значень конструкторських параметрів

```

% Функція, що повертає значення об'єму паралелепіпеду допусків
% Input: x - вектор, елементами якого є допуски
% Output: f - об'єм паралелепіпеду допусків
function f = myfun(x)
f = -abs(x(1)*x(2)*x(3)*x(4)*x(5)*x(6)*x(7)*x(8)*x(9));
%-----

% Функція, що повертає значення згортки допусків з однаковими вагами
% Input: x - вектор, елементами якого є допуски
% Output: f - згортка допусків
function f = myfun(x)
f = -abs(sum(x));
%-----

% Функція, що повертає значення згортки допусків з вагами
% Input: x - вектор, елементами якого є допуски
% Output: f - згортка допусків з вагами
function f = myfun(x)
f = -abs( 0.17*(x(1)+x(2))+0.04*(x(3)+x(4))+0.08*(x(5)+x(6))+0.14*(x(7)+x(8)+x(9)) );
%-----

% circlecon(x) - функція, що реалізує нелінійні обмеження  $c(x) \leq 0$  за критерієм міцності кераміки
function [c,ceq] = circlecon(x)
N=[6e-6; 40e-6; 0.292; 0.330; 1.31e5; 0.1e5; 0.2e-3; 0.75e-3; 1.55e-3]; N=N+x; % Номінальні значення
alfa1=N(1); alfa2=N(2); m1=N(3); m2=N(4); E1=N(5); E2=N(6); R1=N(7); R2=N(8); R3=N(9);
t=130; % Перепад температури
% Значення тиску
P=(alfa1-alfa2)*t/((1-2*m1)/E1-(1-2*m2)/E2+((2-m1)/E1)*R1^2/(R2^2-R1^2)+((2-m2)/E2)*R3^2/(R3^2-R2^2));
c=abs(P)*(R1^2+R2^2)/(R2^2-R1^2)-34.36e6; ceq = [];
%-----

% circlecon1(x) - функція, що реалізує нелінійні обмеження  $c(x) \leq 0$  за критерієм міцності компаунда
function [c,ceq] = circlecon1(x)
N=[6e-6; 40e-6; 0.292; 0.330; 1.31e5; 0.1e5; 0.2e-3; 0.75e-3; 1.55e-3]; N=N+x; % Номінальні значення
alfa1=N(1); alfa2=N(2); m1=N(3); m2=N(4); E1=N(5); E2=N(6); R1=N(7); R2=N(8); R3=N(9);
t=130; % Перепад температури
% Значення тиску
P=(alfa1-alfa2)*t/((1-2*m1)/E1-(1-2*m2)/E2+((2-m1)/E1)*R1^2/(R2^2-R1^2)+((2-m2)/E2)*R3^2/(R3^2-R2^2));
c=abs(P)*(R2^2+R3^2)/(R3^2-R2^2)-54e6; ceq = [];
%-----

% Script - оптимізація допусків за допомогою максимізації їх об'єму (допуски зверху)
clear all; close all;
display 'Вхідні дані';
N=[6e-6; 40e-6; 0.292; 0.330; 1.31e5; 0.1e5; 0.2e-3; 0.75e-3; 1.55e-3]; % Номінальні значення
Nizhne=[4e-6; 35e-6; 0.25; 0.31; 1e5; 0.05e5; 0.19e-3; 0.74e-3; 1.1e-3]; % Нижнє мінімальне значення параметрів (з ТУ)
Verhni=[8e-6; 45e-6; 0.35; 0.35; 1.5e5; 0.15e5; 0.21e-3; 0.76e-3; 2e-3]; % Верхнє максимальне значення параметрів (з ТУ)
% display 'Вихідні дані';
% Виразуємо максимальні значення допусків як половина діапазона
M=(Verhni-Nizhne)/2;
x0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]; % початкове значення допусків
%
%Оптимізація за критерієм міцності кераміки
lb=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]; ub=M;
nonlcon = @circlecon; [x,fval] = fmincon(@myfun, x0, [], [], [], [], lb, ub, nonlcon)
%
%Оптимізація за критерієм міцності компаунду
lb=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]; ub=x;

```

```

nonlcon = @circlecon1; [x,fval] = fmincon(@myfun, x0, [], [], [], [], lb, ub, nonlcon)
%-----

% Script. Оптимізація допусків за допомогою максимізації їх об'єму (допуски знизу)
clear all; close all;
display 'Вхідні дані';
N=[6e-6; 40e-6; 0.292; 0.330; 1.31e5; 0.1e5; 0.2e-3; 0.75e-3; 1.55e-3]; % Номінальні значення
Nizhne=[4e-6; 35e-6; 0.25; 0.31; 1e5; 0.05e5; 0.19e-3; 0.74e-3; 1.1e-3]; % Нижнє мінімальне значення параметрів (з ТУ)
Verhni=[8e-6; 45e-6; 0.35; 0.35; 1.5e5; 0.15e5; 0.21e-3; 0.76e-3; 2e-3]; % Верхнє максимальне значення параметрів (з ТУ)
% display 'Вихідні дані';
M=(Verhni-Nizhne)/2; % максимальні значення допусків як половина діапазона
x0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]; % початкове значення допусків

%Оптимізація за критерієм міцності кераміки
lb=-M; ub=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
nonlcon = @circlecon; [x,fval] = fmincon(@myfun, x0, [], [], [], [], lb, ub, nonlcon)
%
%Оптимізація за критерієм міцності компаунду
lb=x; ub=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
nonlcon = @circlecon1; [x,fval] = fmincon(@myfun, x0, [], [], [], [], lb, ub, nonlcon)

```

## Б.5. Моделювання напружень у кераміці і компаунді при оптимальних значеннях параметрів

```

% Script %
% xt - верхня границя параметрів
% xd - нижня границя параметрів
% P – обчислене значення контактного тиску
% P1-P9 – проміжні змінні
% t – перепад температур при термоударі
% Q – вектор, в першому рядку записані значення напружень компаунда, а в другому рядку – напруження
% кераміки
% x – вектор, стовпцями якого є мінімальні і максимальні значення параметрів, одержані в optimization3.m
% A – вектор з мінімальними і максимальними значеннями напружень
%-----
t=130; x=[xd xt];
Z=zeros(9,5000); % Формуємо пустий масив, куди запишуться дані про границі параметрів
Q=zeros(2,5000); % Формуємо пустий масив, куди запишуться дані міцності кераміки і компаунда
for k=1:5000
    for i=1:9
        z=rand(1); %Формується випадкове число від 0 до 1
        z= round(z); %округлення до цілого числа
        if z==0
            y(i)=x(i,1); % використовуємо нижню межу із першого стовпця
        else y(i)=x(i,2); % використовуємо верхню межу із першого стовпця
        end
    end
    end
y=y'; Z(:,k)=y; k=k+1;
P1=((1+y(3))*y(1)-(1+y(4))*y(2))*t; P4=(y(7)^2)*(1+y(3)); P5=(y(8)^2)*(1-y(3));
P6=y(5)*(y(8)^2-y(7)^2); P2=(P4+P5)/P6; P7=(y(9)^2)*(1+y(4));
P8=(y(8)^2)*(1-y(4)); P9=y(6)*(y(9)^2-y(8)^2); P3=(P7+P8)/P9; P=P1/(P2+P3);
%Формуємо два елементи вектора з напруженнями
Q(1,k)= P*(y(7)^2+y(8)^2)/(y(8)^2-y(7)^2); Q(2,k)=P*(y(8)^2+y(9)^2)/(y(9)^2-y(8)^2);
end
Q(:,1)=[-34, -53]; Q=-Q; A=[min(Q(1,:)) max(Q(1,:)); min(Q(2,:)) max(Q(2,:))]

```

## Б.6. Математична модель контактного тиску у кераміці і компаунді конструкції дискового конденсатора

Методика розрахунку напружень і деформацій в кераміці, які виникають від дії частини компаунда, що адгезіє із боковою (циліндричною) поверхнею конденсатора, базується на схемі, наведеній на рис. Б.1. Розглянемо розрахункову схему взаємодії керамічного диску з тією частиною компаунда, яка адгезує з його торцевими поверхнями. В подальшому всі величини, що характеризують кераміку, будемо позначати індексом 1, а компаунд – 2.

Розглянемо керамічний диск, який адгезіє по торцях з компаундом. Вважаємо товщину диску  $H$  і товщину контактуючого шару компаунда  $h$  малими у порівнянні з радіусом  $R_1$  диску (рис. Б.1) і внесемо наступні припущення: напруженнями від хімічної усадки компаунда нехтуємо; КЛТР кераміки  $\alpha_1$  і компаунда  $\alpha_2$  відмінні, частіше  $\alpha_1 < \alpha_2$ ; деформації відбуваються за законом Гука, вірною є гіпотеза плоских перерізів; вважаємо, що температура поля диску і компаунда постійні за висотою і радіусом.

Герметизація керамічних дисків здійснюється за нормальної температури шляхом занурення їх у компаунд з наступним поміщенням конденсаторів у розігріту до температури  $+100^\circ\text{C}$  термошафу. При цьому кожна зі складових частин конструкції розширюється майже вільно. Після дво- тригодинної витримки при вказаній температурі відбувається процес часткового утворення адгезійних зв'язків і полімеризації компаунда. При подальшому підвищенні температури і витримці конденсаторів протягом 18 годин при температурі  $+150^\circ\text{C}$  ці процеси завершуються, після чого вільна деформація елементів конструкції вже неможлива, і на контактувальних поверхнях виникає розподілене по площі навантаження інтенсивності  $q$  (рис. Б.1). При стаціонарній температурі вважаємо її постійною по радіусу кола. Виділимо в диску двома співвісними циліндричними поверхнями радіусів  $r$  і  $r+dr$ , відповідно, і двома площинами, що проходять через вісь диску і такими, які утворюють між собою кут  $d\varphi$ , елемент товщиною  $H$  (рис. Б.2).

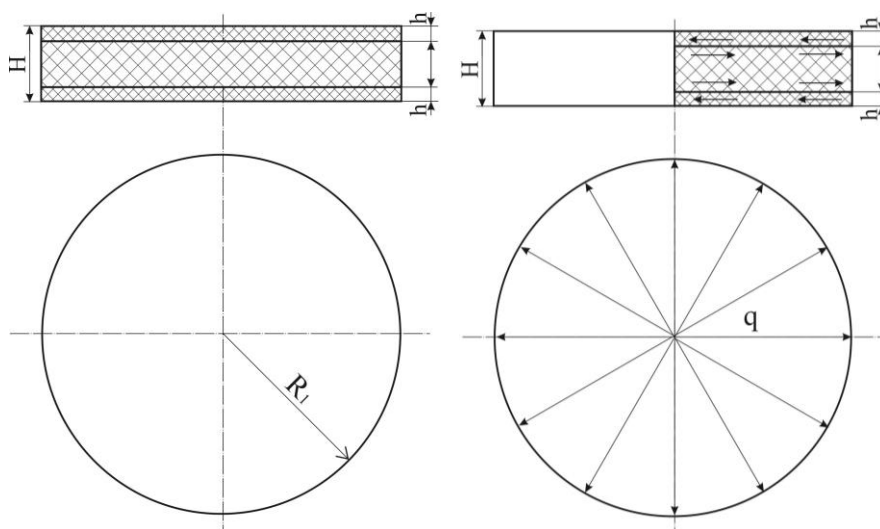


Рис. Б.1. Керамічний диск конденсатора, що адгезує по торцях з герметиком, і схема його навантаження

Аналогічний елемент товщиною  $h$  виділимо в компаунді.

Розглянемо кераміку, позначивши  $\sigma_r$  нормальні радіальні напруження на циліндричній поверхні елемента, що має радіус  $r$ ,  $\sigma_t$  –

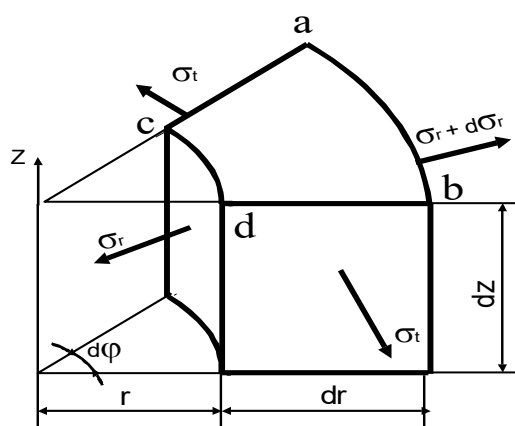


Рис. Б.2. Розрахункова схема конденсатора

нормальні напруження на плоских бокових гранях елемента (окружні напруження). По циліндричній поверхні  $r + dr$  радіальні напруження отримують приріст  $d\sigma_r$ .

Внаслідок осової симетрії диску і навантаження, дотичні напруження по бокових гранях елемента відсутні, а нормальні напруження є головними. Вказаний на рис. Б.1. напрям навантаження

$q$  будемо вважати додатним.

Помноживши напруження на площі граней, отримуємо діюче на елемент зусилля:  $\sigma_r H d\varphi$  – на внутрішній циліндричній поверхні,  $(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) H d\varphi$  – на зовнішній,  $\sigma_t H dr$  – на бокових гранях,  $q r d\varphi dr$  – на основах елемента. Оскільки всі сили – компланарні вектори, а товщиною  $H$  у порівнянні з радіусом ми нехтуємо, то отриману систему сил можна вважати такою, що сходиться. Оскільки умова рівності нулю суми проекцій всіх сил на напрям, перпендикулярний до бісектриси кута  $d\varphi$ , виконується тотожно, то для рівноваги елемента необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил на

напряг вказаної бісектриси дорівнювала нулю. Покладаючи  $\sin(d\varphi/2) \approx d\varphi/2$  і відкидаючи член третього порядку малості, після нескладних перетворень отримаємо

$$\sigma_{r_1} + r \frac{d\sigma_{r_1}}{dr} - \sigma_{t_1} = -\frac{2q}{H} r. \quad (\text{Б.1})$$

Позначимо  $U_l$  – радіальне переміщення циліндричної поверхні радіусу  $r$ . Тоді переміщення циліндричної поверхні радіусу  $r + dr$  дорівнює  $u_1 + du_1$ , абсолютне радіальне видовження елемента дорівнює  $du_1$ , а відносні радіальні та окружні видовження (деформації) елемента, відповідно дорівнюють

$$\varepsilon_{r_1} = du_1/dr_1, \quad (\text{Б.2})$$

$$\varepsilon_{t_1} = u_1/r. \quad (\text{Б.3})$$

Скористаємось законом Гука для плоского напруженого стану елемента, позначимо  $E_l$  – модуль пружності,  $\mu_l$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу і з врахуванням залежностей (Б.2) і (Б.3), отримуємо

$$\sigma_{r_1} = \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{du_1}{dr} + \mu_1 \frac{u_1}{r} \right), \quad \sigma_{t_1} = \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left( \frac{u_1}{r} + \mu_1 \frac{du_1}{dr} \right). \quad (\text{Б.4})$$

Підставляючи вираз (Б.4) у (Б.1), отримаємо після перетворень

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(u, r)}{dr} \right] = -\frac{1-\mu_1}{E_1 H} \cdot 2q. \quad (\text{Б.5})$$

Розв'язок (Б.5) за умов  $|u_1| = \text{const}$  і  $\sigma_{r_1} = 0$  при  $r = k$  має вигляд

$$u_1 = -\frac{(1-\mu_1^2)2qr^2}{3E_1\mu} - \frac{1-\mu_1^2}{3E_1\mu} \cdot \frac{2+\mu_1}{1+\mu_1} \cdot 2qR_1r. \quad (\text{Б.6})$$

Тоді з (Б.4) напруження у кераміці



$$\sigma_{r_1} = \frac{2qR_1}{3H}(2 + \mu_1)\left(1 - \frac{r}{R_1}\right), \quad \sigma_{t_1} = \frac{2qR_1}{3H}(2 + \mu_1)\left(1 - \frac{1 - 2\mu_1}{2 + \mu_1} \cdot \frac{r}{R_1}\right). \quad (\text{Б.7})$$

Аналогічні формули можна записати для елемента компаунда, якщо у (Б.7) замість товщини  $H$  підставити  $h$ , а замість інтенсивності  $2q$  підставити  $-q$ , враховуючи, що якщо кераміка розтягнута, то компаунд стиснутий і навантажений контактним навантаженням тільки з одного торця

$$\sigma_{r_2} = -\frac{qR_1}{3h}(2 + \mu_2)\left(1 - \frac{r}{R_1}\right), \quad \sigma_{t_1} = \frac{qR_1}{3h}(2 + \mu_2)\left(1 - \frac{1 - 2\mu_2}{2 + \mu_2} \cdot \frac{r}{R_1}\right) \quad (\text{Б.8})$$

Для визначення  $q$  запишемо умову сумісності деформацій:  $\varepsilon_{t_1} = \varepsilon_{t_2}$  при  $r = R_1$ . При перепаді температури  $t$  відносні окружні деформації за рахунок вільного розширення і під дією контактного навантаження  $q$  можуть бути представлені у вигляді

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) + \alpha t \quad (\text{Б.9})$$

Підставляючи в (Б.9) значення напружень із (Б.7) і (Б.8) при  $r = R_1$  і задовольняючи умову сумісності деформацій, отримаємо

$$q = \frac{3(\alpha_2 - \alpha_1)t}{R_1} \cdot \left( \frac{2(1 - \mu_1)}{HE_1} + \frac{1 - \mu_2}{hE_2} \right)^{-1} \quad (\text{Б.10})$$

Підставляючи вираз (Б.10) у залежності (Б.7) і (Б.8), отримаємо вирази радіальних і окружних напружень. Із (Б.10) випливає, що при  $t > 0$ , (при підвищенні температури)  $q > 0$ , тобто напрям  $q$  вибрано правильно. При  $t < 0$ , (зниженні температури) напрям  $q$  є протилежним до вказаного на рис. Б.1.

Аналіз залежностей (Б.7) і (Б.8) показує, що абсолютні величини напружень у кераміці і компаунді збільшуються і зменшуються разом з ростом і зменшенням абсолютної величини контактного навантаження  $q$  і досягають

максимальних значень при  $r = 0$ , тобто в центрі керамічного і компаундного дисків. Тому міцність кераміки і компаунда є сенс оцінювати за максимальними значеннями напружень, тобто при  $r = 0$ .

Проаналізуємо напружений стан керамічного диску. Під дією розподіленого навантаження  $q$  при від'ємному перепаді температури елемент диску, показаний на рис. Б.2, знаходиться під тиском в двох взаємно перпендикулярних напрямках радіальними і окружними напруженнями. При цьому, очевидно, він буде розтягуватись у напрямі повздовжньої осі  $Z$ . Дійсно, за узагальненим законом Гука осьові деформації

$$\varepsilon_{z_1} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{z_1} - \mu(\sigma_{r_1} + \sigma_{t_1})], \quad (\text{Б.11})$$

де  $\sigma_{z_1} = 0$ . Оскільки знаки  $\sigma_{r_1}$ ,  $\sigma_{t_1}$  в центрі диску при від'ємному перепаді температури є від'ємними, то  $\varepsilon_{z_1} > 0$ . Отже, диск розтягується у напрямі осі  $Z$ . Вираз (Б.11) показує, що міцність диску може бути описана другою теорією міцності. Однак, слід врахувати, що одночасно з вказаним раніше розтягом, в кераміці в осьовому напрямі виникають напруження стиску, викликані дією лише тієї частини компаунда, яка адгезує з циліндричною поверхнею диску.

При зниженні температури між розглянутою частиною компаунда і керамічним диском виникає направлена паралельно осі циліндрів сила взаємодії  $\bar{N}$  (рис. Б.3), обумовлена різницею осьових деформацій кераміки і компаунда. Вираз для цієї сили, отриманий з умов рівності абсолютних осьових деформацій компаунда і кераміки, має вигляд

$$N = (\alpha_1 - \alpha_2) t \left( (E_1 \pi R_1^2)^{-1} + [E_2 \pi (2R_1 h + h^2)]^{-1} \right)^{-1}. \quad \text{Тоді стискуючі осьові}$$

напруження в кераміці і розтягувальні в компаунді мають вигляд (Б.12, Б.13 табл. Б.1). Формули для визначення контактного тиску  $P_1$ , радіальних і окружних напружень в кераміці і компаунді, що адгезують лише по циліндричній поверхні, (Б.14)...(Б.17) наведені в таблиці Б.1. Оскільки кераміка являє собою крихкий

матеріал, що вона погано опирається розтягу і для оцінки міцності диску конденсатора може бути використана друга теорія міцності, за якою

$$\sigma_{ек61} = \sigma_{11} - \mu(\sigma_{12} + \sigma_{13}) \leq [\sigma_1], \quad (\text{Б.18})$$

де  $\sigma_{11} \geq \sigma_{12} \geq \sigma_{13}$  – головні напруження в кераміці. В нашому випадку, внаслідок принципу суперпозиції, головні напруження є алгебраїчними сумами однойменних напружень, що виникають при адгезії кераміки і компаунда тільки по торцях, з однієї сторони, і лише по циліндричній поверхні – з іншої. Відповідність між номерами головних напружень і назвами напружень можна встановити після алгебраїчного порівняння величин осьових, радіальних і окружних напружень. Якщо умова (Б.18) не виконується, то можливе руйнування керамічного диску.

Можна запропонувати і іншу гіпотезу руйнування конденсатора від дії тільки контактної зусилля  $q$ . Розглянемо елемент (рис. Б.4), розташований біля зовнішньої поверхні конденсатора. Зі сторони компаунда по площині торця кераміка піддається впливу лише розподіленого навантаження  $q$ , яке можна вважати дотичним напруженням  $\tau=q$ . Але за законом парності дотичних напружень таке ж  $\tau$  діє і в площинах, перпендикулярних площині торця, і можна вважати, що виділений елемент знаходиться в умовах, близьких до чистого зсуву. Але тоді в площинах, нахилених під кутом  $45^\circ$  до торця, діють максимальні розтягувальні напруження  $\sigma_1 = \tau$  і стискувальні  $\sigma_3 = -\tau$ . Таким чином, за будь-якого напрямку навантаження  $q$ , тобто при охолодженні або розігріві від вихідного рівноважного стану, конденсатор. Окрім стиску і зсуву, буде і під дією розтягу, чому кераміка опирається гірше, ніж іншим видам навантажень. І якщо значення  $q$  близьке до значення границі міцності кераміки на розтяг, то можливе її руйнування.

Для перевірки цих гіпотез нижче приведені результати розрахунків інтенсивності контактної навантаження і напружень в кераміці конденсатора К15-5, герметизованого епоксидним компаундом ЭК-242.

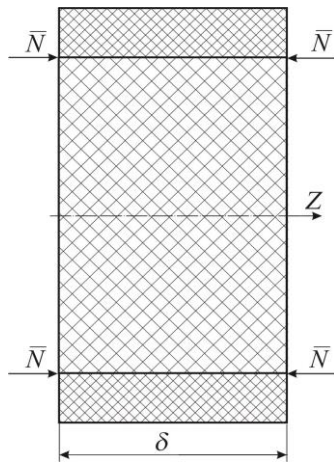


Рис. Б.3. Розрахункова схема осьових сил, що стискають кераміку

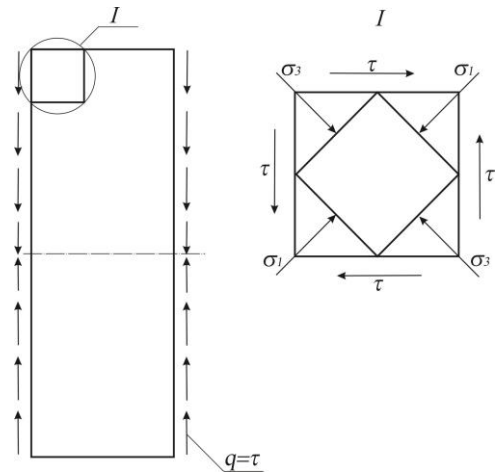


Рис. Б.4. До другої гіпотези руйнування кераміки конденсатора

Таблиця Б.1.

Контактний тиск і напруження в елементах конструкції

| Формули   | Номери формул |
|---|---------------|
| $\sigma_{z_1} = (\alpha_2 - \alpha_1)t \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \cdot \frac{R_1^2}{2R_1h + h^2} \right)^{-1}$                               | (Б.12)        |
| $\sigma_{z_2} = (\alpha_1 - \alpha_2)t \left( \frac{1}{E_1} \cdot \frac{2R_1h + h^2}{R_1^2} + \frac{1}{E_2} \right)^{-1}$                               | (Б.13)        |
| $P_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)t \left( \frac{1 - 2\mu_1}{E_1} + \frac{R_1^2(1 - 2\mu_2) + (R_1 + h)^2(1 + \mu_2)}{E_2[(R_1 + h)^2 - R_1^2]} \right)^{-1}$ | (Б.14)        |
| $\sigma_{r_1} = \sigma_{t_1} = -P_1$  | (Б.15)        |
| $\sigma_{r_2} = \frac{P_1 R_1^2}{(R_1 + h)^2 - R_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{(R_1 + h)^2}{R^2} \right)$   | (Б.16)        |
| $\sigma_{t_2} = \frac{P_1 R_1^2}{(R_1 + h)^2 - R_1^2} \cdot \left( 1 + \frac{(R_1 + h)^2}{R^2} \right)$   | (Б.17)        |

Розрахунок виконаний при  $t = 100^\circ C$ , тобто при перепаді температури від  $+40^\circ C$  (температура скловання компаунда) до  $-60^\circ C$  (мінімальної температури термоударів). При номінальних значеннях ФМХ компаунда і кераміки і геометричних розмірів елементів конструкції, розраховувались значення

напружень. Аналіз цих результатів показав, що максимальні напруження, які виникають у кераміці при адгезії з компаундом по циліндричній поверхні, є у 18 разів меншими за напруження, що виникають при адгезії по торцевих поверхнях. Знайдене за залежністю (Б.12) значення  $\sigma_{z_1}$  дорівнює  $-2,851$  МПа. Сумарні значення радіальних і окружних, а також еквівалентних напружень у кераміці приведені у таблиці Б.2. Розраховані значення  $q$  і  $\sigma_{екв1}$  слід порівнювати зі значеннями границі міцності для кераміки. Шляхом випробувань зразків, виконаних з тієї ж кераміки, що і конденсатори, була отримана границя міцності кераміки при розтягу, що дорівнює  $8$  МПа. Аналізуючи дані таблиці Б.2, можна дійти висновку про прийнятність першої гіпотези руйнування кераміки. Найбільш вірогідними випадками мають бути руйнування, що зароджуються у центрі керамічного диску. Через порівнюваність величин значень руйнуючих напружень і контактного зусилля  $q$ , можна припустити виконання і другої гіпотези руйнування по похилим майданчикам.

Таблиця Б.2

Значення напружень в кераміці конденсаторів

| Напруження,<br>МПа | $r/R_1$ |         |         |         |         |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                    | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| $\sigma_{z_1}$     | -30,227 | -23,060 | -15,897 | -8,726  | -1,567  |
| $\sigma_{t_1}$     | -30,227 | -25,213 | -20,194 | -15,180 | -10,167 |
| $\sigma_{екв1}$    | 15,890  | 12,112  | 8,337   | 4,553   | 0,786   |

*Перевірка адекватності математичної моделі досліджуваному об'єкту.*  
Для перевірки теоретичних висновків був поставлений наступний експеримент. Десять конденсаторів товщиною  $0,52 \cdot 10^{-2}$  м до заливки піддавались трикратному термоциклюванню від  $+85^\circ\text{C}$  до  $-60^\circ\text{C}$  і пройшли це випробування без руйнувань. Після цього для виявлення ступеня впливу на міцність конденсаторів лише компаунда, що огортає торці конденсатора, 5 екземплярів із вказаних вище конденсаторів по поверхні були обмотані неадгезуючою до компаунда фтороплівкою товщиною  $15 \cdot 10^{-6}$  м. Інші 5

екземплярів конденсаторів для виявлення ступеня впливу лише компаунда, що огортає циліндричну поверхню, були по торцях закриті такою є фтороплівкою. Підготовлені вказаним чином всі 10 конденсаторів пройшли весь цикл технології заливки і полімеризації компаунда без ушкоджень і піддавались термоударам. Після першого термоудару всі конденсатори були зруйновані. Характер руйнування кераміки, що адгезує з компаундом лише по торцю, показаний на фотографіях (рис. 1.7). Напрямі тріщин показує, що руйнування кераміки відбулося від її деформації в осьовому напрямі або від розтягувальних зусиль, направлених під кутом  $45^\circ$  до площин зсуву, тобто торцевих площин кераміки, які з'єднані з компаундом. Таке руйнування добре описується другою теорією міцності або моделлю чистого зсуву, наведеною вище. П'ять конденсаторів, у яких торцеві поверхні були захищені від адгезії, розгерметизувались через розтріскування компаунду по колу на границі торцевої і циліндричної частин конденсатора. Це розтріскування відбулось через вільне стискування компаунда по торцевій поверхні конденсатора і неможливість слідування за ним компаунда, нанесеного на незахищену циліндричну поверхню кераміки.

Встановлено, що чим більше адгезія компаунда до кераміки і чим більше різниця у значеннях їх ФМХ, перш за все в КЛТР, тим більші зусилля зсуву при зміні температури від стану рівноваги і тим більшими є деформації розтягу.

## Додаток В

Дані експериментів і програми для розв'язання задачі  
забезпечення працездатності літакового відповідача

Таблиця В.1

Матриця стратегії проведення ПФЕ типу 2<sup>6</sup>

| № досліджу | План           |                |                |                |                |                | Вплив (парний)                |                               |                               |                               |                               |                               | Експеримент                   |                               |                               |                               |                               |                               | Розрахункові дані             |                               |                               |                                |                                |                                |                                |                                |                               |   |                               |                                   |  |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|---|-------------------------------|-----------------------------------|--|
|            | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> | X <sub>6</sub> | X <sub>1</sub> X <sub>2</sub> | X <sub>1</sub> X <sub>3</sub> | X <sub>1</sub> X <sub>4</sub> | X <sub>1</sub> X <sub>5</sub> | X <sub>1</sub> X <sub>6</sub> | X <sub>2</sub> X <sub>3</sub> | X <sub>2</sub> X <sub>4</sub> | X <sub>2</sub> X <sub>5</sub> | X <sub>2</sub> X <sub>6</sub> | X <sub>3</sub> X <sub>4</sub> | X <sub>3</sub> X <sub>5</sub> | X <sub>3</sub> X <sub>6</sub> | X <sub>4</sub> X <sub>5</sub> | X <sub>4</sub> X <sub>6</sub> | X <sub>5</sub> X <sub>6</sub> | P <sub>11</sub> <sup>(n)</sup> | P <sub>12</sub> <sup>(n)</sup> | P <sub>13</sub> <sup>(n)</sup> | P <sub>14</sub> <sup>(n)</sup> | P <sub>15</sub> <sup>(n)</sup> | P <sub>1</sub> <sup>(n)</sup> | σ <sup>2</sup> (P <sub>1</sub> <sup>(n)</sup> ) | P <sub>1</sub> <sup>(n)</sup> | (ΔP <sub>1</sub> <sup>(n)</sup> ) | (ΔP <sub>1</sub> <sup>(n)</sup> ) <sup>2</sup> |
| 1          | +              | +              | +              | +              | +              | +              | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | 680                            | 690                            | 710                            | 700                            | 720                            | 700                           | 250   | 699,37                        | 0,63                              | 0,40   |
| 2          | -              | +              | +              | +              | +              | -              | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | 690                            | 690                            | 700                            | 690                            | 680                            | 690                           | 50  | 686,25                        | 3,75                              | 14,06  |
| 3          | +              | -              | +              | +              | +              | +              | -                             | +                             | +                             | +                             | -                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | 720                            | 680                            | 690                            | 700                            | 710                            | 700                           | 250   | 699,37                        | 0,63                              | 0,40   |
| 4          | -              | -              | +              | +              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | 690                            | 700                            | 690                            | 680                            | 690                            | 690                           | 50  | 683,25                        | 3,75                              | 14,06  |
| 5          | +              | +              | -              | +              | +              | +              | +                             | +                             | +                             | +                             | -                             | +                             | +                             | +                             | -                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | 660                            | 680                            | 700                            | 680                            | 680                            | 680                           | 200   | 676,25                        | 3,75                              | 14,06  |
| 6          | -              | +              | -              | +              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | +                             | +                             | +                             | -                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | 660                            | 640                            | 660                            | 680                            | 660                            | 660                           | 200   | 663,13                        | 3,13                              | 9,80   |
| 7          | +              | -              | -              | +              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 680                            | 700                            | 680                            | 660                            | 680                            | 680                           | 200   | 676,25                        | 3,75                              | 14,06  |
| 8          | -              | -              | -              | +              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 640                            | 660                            | 660                            | 660                            | 680                            | 660                           | 200   | 663,13                        | 3,13                              | 9,80   |
| 9          | +              | +              | +              | -              | +              | +              | +                             | +                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 670                            | 670                            | 660                            | 670                            | 680                            | 670                           | 50  | 667,49                        | 2,51                              | 6,30   |
| 10         | -              | +              | +              | -              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | 650                            | 650                            | 650                            | 650                            | 650                            | 650                           | 0   | 654,37                        | 4,37                              | 19,10  |
| 11         | +              | -              | +              | -              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 670                            | 650                            | 670                            | 670                            | 690                            | 670                           | 200   | 667,49                        | 2,51                              | 6,30   |
| 12         | -              | -              | +              | -              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 650                            | 640                            | 650                            | 650                            | 660                            | 650                           | 250   | 654,37                        | 4,37                              | 19,10  |
| 13         | +              | +              | -              | -              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 630                            | 640                            | 620                            | 650                            | 660                            | 640                           | 250   | 644,37                        | 4,37                              | 19,10  |
| 14         | -              | +              | -              | -              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 630                            | 630                            | 650                            | 610                            | 630                            | 630                           | 200   | 631,25                        | 1,25                              | 1,56   |
| 15         | +              | -              | -              | -              | +              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 620                            | 630                            | 640                            | 660                            | 650                            | 640                           | 250   | 644,37                        | 4,37                              | 19,10  |
| 16         | -              | -              | -              | -              | +              | +              | +                             | +                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 630                            | 640                            | 630                            | 630                            | 620                            | 630                           | 50  | 631,25                        | 1,25                              | 1,56   |
| 17         | +              | +              | +              | -              | +              | +              | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | +                             | 620                            | 610                            | 600                            | 580                            | 590                            | 600                           | 250   | 601,25                        | 1,25                              | 1,56   |
| 18         | -              | +              | +              | +              | -              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 590                            | 590                            | 610                            | 570                            | 690                            | 590                           | 200   | 588,44                        | 1,56                              | 2,43   |
| 19         | +              | -              | +              | +              | -              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 600                            | 600                            | 600                            | 600                            | 600                            | 600                           | 0   | 601,25                        | 1,25                              | 1,56   |
| 20         | -              | -              | +              | +              | -              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 590                            | 600                            | 610                            | 590                            | 590                            | 590                           | 50  | 558,44                        | 1,56                              | 2,43   |
| 21         | +              | +              | -              | +              | -              | +              | -                             | -                             | +                             | +                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | -                             | 580                            | 580                            | 560                            | 580                            | 600                            | 580                           | 200   | 578,13                        | 1,87                              | 3,50   |

## Продовження таблиці В.1

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |     |     |        |      |       |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------|------|-------|
| 22 | - | + | - | + | - | + | - | + | - | + | + | - | + | - | + | - | + | - | - | + | - | 560 | 540 | 560 | 580 | 560 | 560 | 200 | 565,01 | 5,01 | 25,10 |
| 23 | + | - | - | + | - | + | - | - | + | - | + | + | - | + | - | - | + | - | - | + | - | 600 | 580 | 560 | 580 | 580 | 580 | 200 | 578,13 | 1,87 | 3,50  |
| 24 | - | - | - | + | - | + | + | + | - | + | - | + | - | + | - | - | + | - | - | + | - | 540 | 560 | 580 | 560 | 560 | 560 | 200 | 565,01 | 5,01 | 25,10 |
| 25 | + | + | + | - | - | + | + | + | - | - | + | + | - | - | + | - | - | + | + | - | - | 580 | 570 | 570 | 570 | 560 | 570 | 50  | 569,37 | 0,63 | 0,40  |
| 26 | - | + | + | - | - | + | - | - | + | + | - | + | - | - | + | - | - | + | + | - | - | 560 | 570 | 560 | 560 | 550 | 560 | 50  | 556,25 | 3,75 | 14,06 |
| 27 | + | - | + | - | - | + | - | + | - | - | + | - | + | + | - | - | - | + | + | - | - | 560 | 560 | 580 | 570 | 590 | 570 | 250 | 569,37 | 0,63 | 0,40  |
| 28 | - | - | + | - | - | + | + | - | + | + | - | - | + | + | - | - | - | + | + | - | - | 580 | 570 | 560 | 540 | 550 | 560 | 250 | 556,25 | 3,75 | 14,06 |
| 29 | + | + | - | - | - | + | + | - | - | - | + | - | - | - | + | + | + | - | + | - | - | 550 | 550 | 550 | 550 | 550 | 550 | 0   | 546,25 | 3,75 | 14,06 |
| 30 | - | + | - | - | - | + | - | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | - | + | - | - | 530 | 530 | 530 | 530 | 530 | 530 | 0   | 533,13 | 3,13 | 9,80  |
| 31 | + | - | - | - | - | + | - | - | - | - | + | + | + | + | - | + | + | - | + | - | - | 530 | 550 | 540 | 560 | 570 | 550 | 250 | 546,25 | 3,75 | 14,06 |
| 32 | - | - | - | - | - | + | + | + | + | + | - | + | + | + | - | + | + | - | + | - | - | 530 | 550 | 510 | 530 | 530 | 530 | 200 | 533,13 | 3,13 | 9,80  |
| 33 | + | + | + | + | + | - | + | + | + | - | - | + | + | + | - | + | + | - | + | - | - | 350 | 370 | 390 | 370 | 370 | 370 | 200 | 372,49 | 2,49 | 6,20  |
| 34 | - | + | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | + | + | - | + | + | - | + | - | - | 340 | 360 | 360 | 380 | 360 | 360 | 200 | 369,37 | 0,63 | 0,40  |
| 35 | + | - | + | + | + | - | - | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | - | + | - | - | 370 | 380 | 360 | 370 | 370 | 370 | 50  | 372,49 | 2,49 | 6,20  |
| 36 | - | - | + | + | + | - | + | - | - | + | + | - | - | - | + | + | + | - | + | - | - | 340 | 360 | 380 | 350 | 370 | 360 | 250 | 359,37 | 0,63 | 0,40  |
| 37 | + | + | - | + | + | - | + | - | + | + | - | - | + | + | - | - | - | + | + | - | - | 360 | 370 | 350 | 360 | 340 | 350 | 250 | 349,37 | 0,63 | 0,40  |
| 38 | - | + | - | + | + | - | - | + | - | - | + | - | + | + | - | - | - | + | + | - | - | 320 | 330 | 340 | 350 | 360 | 340 | 250 | 336,25 | 3,75 | 14,06 |
| 39 | + | - | - | + | + | - | - | - | + | - | - | + | - | - | + | - | - | + | + | - | - | 330 | 350 | 340 | 370 | 360 | 350 | 250 | 349,37 | 0,63 | 0,40  |
| 40 | - | - | - | + | + | - | + | + | - | - | + | + | - | - | + | - | - | + | + | - | - | 340 | 340 | 320 | 340 | 360 | 340 | 200 | 336,25 | 3,75 | 14,06 |
| 41 | + | + | + | - | + | - | + | + | - | + | - | + | - | + | - | - | + | - | - | + | - | 350 | 340 | 330 | 340 | 340 | 340 | 50  | 340,61 | 0,61 | 0,37  |
| 42 | - | + | + | - | + | - | - | - | + | - | + | + | - | + | - | - | + | - | - | + | - | 320 | 310 | 350 | 340 | 330 | 330 | 250 | 327,49 | 2,51 | 6,30  |
| 43 | + | - | + | - | + | - | - | + | - | + | - | - | + | - | + | - | + | - | - | + | - | 340 | 340 | 340 | 340 | 340 | 340 | 0   | 340,61 | 0,61 | 0,37  |
| 44 | - | - | + | - | + | - | + | - | + | - | + | - | + | - | + | - | + | - | - | + | - | 330 | 330 | 320 | 330 | 340 | 330 | 50  | 327,49 | 2,51 | 6,30  |
| 45 | + | + | - | - | + | - | + | - | - | + | - | - | - | + | - | + | - | + | - | + | - | 310 | 330 | 340 | 320 | 300 | 320 | 250 | 317,49 | 2,51 | 6,30  |



## Продовження таблиці В.1

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |     |     |     |     |     |     |        |      |       |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------|------|-------|
| 46 | - | + | - | - | + | - | - | + | + | - | + | - | - | + | - | + | - | + | - | + | - | + | - | 300 | 300 | 310 | 300 | 290 | 300 | 50  | 304,37 | 4,37 | 19,10 |
| 47 | + | - | - | - | + | - | - | - | - | + | - | + | + | - | + | + | - | + | - | + | - | + | - | 310 | 320 | 330 | 340 | 300 | 320 | 250 | 317,49 | 2,51 | 6,30  |
| 48 | - | - | - | - | + | - | + | + | + | - | + | + | + | - | + | + | - | + | - | + | - | + | - | 310 | 320 | 280 | 290 | 300 | 300 | 250 | 304,37 | 4,37 | 19,10 |
| 49 | + | + | + | + | - | - | + | + | + | - | - | + | + | - | - | + | - | - | - | - | - | - | + | 280 | 270 | 290 | 250 | 260 | 270 | 250 | 274,37 | 4,37 | 19,10 |
| 50 | - | + | + | + | - | - | - | - | - | + | + | + | + | - | - | + | - | - | - | - | - | - | + | 260 | 260 | 270 | 250 | 260 | 260 | 50  | 261,25 | 1,25 | 1,56  |
| 51 | + | - | + | + | - | - | - | + | + | - | - | - | - | + | + | + | - | - | - | - | - | - | + | 270 | 270 | 260 | 270 | 280 | 270 | 50  | 274,37 | 4,37 | 19,10 |
| 52 | - | - | + | + | - | - | + | - | - | + | + | - | - | + | + | + | - | - | - | - | - | - | + | 260 | 260 | 260 | 280 | 260 | 260 | 200 | 261,25 | 1,25 | 1,56  |
| 53 | + | + | - | + | - | - | + | - | + | - | - | - | + | - | - | - | - | + | + | - | - | - | + | 270 | 250 | 230 | 250 | 250 | 250 | 200 | 251,25 | 1,25 | 1,56  |
| 54 | - | + | - | + | - | - | - | + | - | + | + | - | + | - | - | - | - | + | + | - | - | - | + | 240 | 240 | 230 | 250 | 240 | 240 | 50  | 238,13 | 1,87 | 1,50  |
| 55 | + | - | - | + | - | - | - | - | + | - | - | + | - | + | + | - | + | + | - | - | - | - | + | 270 | 250 | 260 | 240 | 230 | 250 | 250 | 251,25 | 1,25 | 1,56  |
| 56 | - | - | - | + | - | - | + | + | - | + | + | + | - | + | + | - | + | + | - | - | - | - | + | 220 | 240 | 230 | 250 | 260 | 240 | 250 | 238,13 | 1,87 | 3,50  |
| 57 | + | + | + | - | - | - | + | + | - | - | - | + | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | + | 240 | 260 | 240 | 220 | 240 | 240 | 200 | 242,49 | 2,49 | 6,20  |
| 58 | - | + | + | - | - | - | - | - | + | + | + | + | - | - | - | - | + | - | + | + | + | + | + | 230 | 230 | 250 | 230 | 210 | 230 | 200 | 229,37 | 0,63 | 0,40  |
| 59 | + | - | + | - | - | - | - | + | - | - | - | - | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | + | 240 | 250 | 230 | 240 | 240 | 240 | 50  | 242,49 | 2,49 | 6,20  |
| 60 | - | - | + | - | - | - | + | - | + | + | + | - | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | + | 210 | 250 | 240 | 230 | 220 | 230 | 250 | 229,37 | 0,63 | 0,40  |
| 61 | + | + | - | - | - | - | + | - | - | - | - | - | - | - | - | - | + | + | + | + | + | + | + | 220 | 220 | 220 | 220 | 220 | 220 | 0   | 219,37 | 0,63 | 0,40  |
| 62 | - | + | - | - | - | - | - | + | + | + | + | - | - | - | - | + | + | + | + | + | + | + | + | 210 | 210 | 210 | 210 | 210 | 210 | 0   | 206,25 | 3,75 | 14,06 |
| 63 | + | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | 230 | 220 | 220 | 210 | 220 | 220 | 50  | 219,37 | 0,63 | 0,40  |
| 64 | - | - | - | - | - | - | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | 200 | 210 | 220 | 210 | 210 | 210 | 50  | 206,25 | 3,75 | 14,06 |

Таблиця В.2.

Матриця стратегії проведення ПФЕ типу 2<sup>4</sup>

| № досліду | План  |       |       |       | Парні впливи |          |          |          |          |          | Експеримент    |                |                |                |                | Розрахункові дані |                    |                   |                      |                              |
|-----------|-------|-------|-------|-------|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|--------------------|-------------------|----------------------|------------------------------|
|           | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | $z_1z_2$     | $z_1z_3$ | $z_1z_4$ | $z_2z_3$ | $z_2z_4$ | $z_3z_4$ | $P_{21}^{(n)}$ | $P_{22}^{(n)}$ | $P_{23}^{(n)}$ | $P_{24}^{(n)}$ | $P_{25}^{(n)}$ | $\bar{P}_2^{(n)}$ | $S^2\{P_2^{(n)}\}$ | $\hat{P}_2^{(n)}$ | $ \Delta P_2^{(n)} $ | $(\Delta \bar{P}_2^{(n)})^2$ |
| 1         | 2     | 3     | 4     | 5     | 6            | 7        | 8        | 9        | 10       | 11       | 12             | 13             | 14             | 15             | 16             | 17                | 18                 | 19                | 20                   | 21                           |
| 1         | +     | +     | +     | +     | +            | +        | +        | +        | +        | +        | 700            | 700            | 700            | 700            | 700            | 700               | 0                  | 702,50            | 2,50                 | 6,25                         |
| 2         | -     | +     | +     | +     | -            | -        | -        | +        | +        | +        | 780            | 760            | 740            | 740            | 740            | 740               | 200                | 743,98            | 5,02                 | 25,20                        |
| 3         | +     | -     | +     | +     | -            | +        | +        | -        | -        | +        | 660            | 670            | 680            | 690            | 700            | 680               | 250                | 673,76            | 6,24                 | 38,94                        |
| 4         | -     | -     | +     | +     | +            | -        | -        | -        | -        | +        | 690            | 700            | 710            | 700            | 700            | 700               | 50                 | 706,24            | 6,24                 | 38,94                        |
| 5         | +     | +     | -     | +     | -            | -        | +        | -        | +        | -        | 580            | 570            | 560            | 550            | 570            | 570               | 200                | 566,24            | 3,76                 | 14,14                        |
| 6         | -     | +     | -     | +     | -            | +        | -        | -        | +        | -        | 580            | 600            | 600            | 620            | 600            | 600               | 200                | 598,72            | 1,28                 | 1,64                         |
| 7         | +     | -     | -     | +     | +            | -        | +        | +        | -        | -        | 510            | 530            | 530            | 530            | 550            | 530               | 200                | 537,50            | 7,50                 | 56,25                        |
| 8         | -     | -     | -     | +     | -            | +        | -        | +        | -        | -        | 580            | 570            | 570            | 560            | 570            | 570               | 50                 | 569,98            | 0,02                 | 0,00                         |
| 9         | +     | +     | +     | -     | -            | +        | -        | +        | -        | -        | 390            | 400            | 410            | 400            | 400            | 400               | 50                 | 405,00            | 5,00                 | 25,00                        |
| 10        | -     | +     | +     | -     | +            | -        | +        | +        | -        | -        | 390            | 400            | 390            | 380            | 390            | 390               | 50                 | 395,00            | 5,00                 | 25,00                        |
| 11        | +     | -     | +     | -     | -            | +        | -        | -        | +        | -        | 400            | 380            | 360            | 380            | 380            | 380               | 200                | 376,26            | 3,74                 | 14,00                        |
| 12        | -     | -     | +     | -     | -            | -        | +        | -        | +        | -        | 280            | 370            | 390            | 370            | 370            | 370               | 50                 | 366,26            | 3,74                 | 14,00                        |
| 13        | +     | +     | -     | -     | +            | -        | -        | -        | -        | +        | 260            | 270            | 270            | 280            | 270            | 270               | 50                 | 268,74            | 1,26                 | 1,60                         |
| 14        | -     | +     | -     | -     | -            | +        | +        | -        | -        | +        | 260            | 250            | 260            | 270            | 260            | 260               | 50                 | 258,74            | 1,26                 | 1,60                         |
| 15        | +     | -     | -     | -     | -            | -        | -        | +        | +        | +        | 250            | 240            | 240            | 230            | 240            | 240               | 50                 | 240,00            | 0,00                 | 0,00                         |
| 16        | -     | -     | -     | -     | +            | +        | +        | +        | +        | +        | 230            | 230            | 230            | 230            | 230            | 230               | 0                  | 230,00            | 0,00                 | 0,00                         |

### В.3. Оптимізація допустимих значень конструкторських параметрів

```

% Script Оптимізація допусків за допомогою максимізації їх об'єму (допуски зверху)
%
% @myfun - оптимізація за критерієм максимального об'єму паралелепіеду допусків
% @myfun1 - оптимізація згортки критеріїв з однаковою вагою
% @circlecon - нелінійні обмеження
clear all; close all; display 'Вхідні дані';
N0=[250e-2;33.065e-3;32.01e-3;6.25e-6;600e-2;0.785e-6;32.01e-3;33.065e-3;0.395e-6;600e-2]; % Номінальні значення

[m, n]=size(N0);
%
% Обмеження, взяті з ТУ в задачі оптимізації на параметри
Nizhne=[150e-2; 33.03e-3; 32.0e-3; 2.5e-6; 500e-2; 0.32e-6; 32.00e-3; 33.030e-3; 0.165e-6; 500e-2];
% Нижнє мінімальне значення параметрів
Verhni=[350e-2; 33.1e-3; 32.02e-3; 10e-6; 700e-2; 1.25e-6; 32.02e-3; 33.100e-3; 0.630e-6; 700e-2];
% Верхнє максимальне значення параметрів
%
% display 'Вихідні дані';
% Вирахуємо максимальні значення допусків як половина діапазона
M=(Verhni-Nizhne)/2;
x0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]; % початкове значення допусків
%
%Оптимізація за критерієм потужності
lb= zeros(m, n); ub=M;
nonlcon = @circlecon; [x,fval] = fmincon(@myfun1, x0, [], [], [], [], lb, ub, nonlcon);
N0+x
%
%Оптимізація за критерієм потужності (допуски знизу)
lb=-M; ub= zeros(m, n);
nonlcon = @circlecon; [x,fval] = fmincon(@myfun1, x0, [], [], [], [], lb, ub, nonlcon);
N0+x;
%
%-----
% Функція, що реалізує нелінійні обмеження щодо мінімальної потужності  $c(x) \leq 0$ 
function [c,seq] = circlecon(x)
N0=[250e-2; 33.065e-3;32.01e-3;6.25e-6; 600e-2;0.785e-6; 32.01e-3;33.065e-3; 0.395e-6;600e-2];%Номінальні значення
N=N0+x;
% Значення потужності
P=(1/700)*(452.81+6.56*(N(2)-2.5)+11.56*(N(3)-32.01e-3)/0.01e-3+15.94*(N(4)-6.25e-6)/3.75e-6+49.06*(N(5)-6)+163.44*(N(6)-0.785e-6)/0.465e-6)*(476.87-5.62*(N(7)-32.01e-3)/0.01e-3+14.37*(N(8)-33.065e-3)/0.035e-3+68.13*(N(9)-0.395e-6)/0.035e-6+159.37*(N(10)-6)-10.62*(N(7)-32.01e-3)*(N(10)-6)/0.01e-3);
c=-P+600;
seq = [];
%
%-----
% Функція, що повертає значення об'єму паралелепіеду допусків
% Input: x - вектор, елементами якого є допуски
% Output: f - об'єм паралелепіеду допусків
function f = myfun(x)
f = -abs(x(1)*x(2)*x(3)*x(4)*x(5)*x(6)*x(7)*x(8)*x(9)*x(10));
%
%-----
% Функція, що повертає значення згортки допусків з однаковими вагами
% Input: x - вектор, елементами якого є допуски
% Output: f - згортка допусків
function f = myfun(x)
f = -abs(sum(x));

```

## В.4. Моделювання потужності при оптимальних значеннях параметрів

```

% Script %
% xt - верхня границя параметрів
% xd - нижня границя параметрів
% P – обчислене значення потужності
% Q – вектор з значеннями всіх можливих потужностей
% x – вектор, стовпцями якого є мінімальні і максимальні значення параметрів, одержані в optimization4.m
% A – вектор з мінімальними і максимальними значеннями потужності
%-----
x=[xd xt];
Z=zeros(5,5000); % Формування пустого масиву, куди запишуться дані про границях параметрів
Q=zeros(1,5000); % Формування пустого масиву, куди запишуться дані про потужності
    for k=1:5000
        for i=1:5
            z=rand(1); %Формується випадкове число від 0 до 1
            z= round(z); %округлення до цілого числа
            if z==0
                y(i)=x(i,1); % використовуємо нижню межу із першого стовпця
            else y(i)=x(i,2); % використовуємо верхню межу із другого стовпця
            end
        end
        y=y'; Z(:,k)=y; k=k+1;
        P=(1/700)*(658.59+7.66*(y(1)-3.5)+7.34*(y(2)-6.25*10^(-6))/(3.75*10^(-6)))*(653.12+3.12*(y(3)-2.5)+4.37*(y(4)-
        33.065*10^(-3))/(0.035*10^(-3)) -8.12*(y(5)-32.01*10^(-3))/(10^(-5)) );
        % Формування елемента вектора з напруженнями
        Q(k)=P;
    end
Q(1)=601; A=[min(Q) max(Q)]

```

## Додаток Г

## Акти впровадження

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Перший проректор, проректор  
з науково-педагогічної та наукової роботи  
Хмельницького національного університету

*М. П. Войнаренко*  
Войнаренко М. П.  
“ 17 ” 2017 р.

**АКТ**

про використання результатів дисертації Горошка А. В. на тему  
«Методи оцінки конструкційної міцності і зниження  
вібрацій механічних систем на основі обернених задач»,  
поданої на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук  
наук за спеціальністю 05.02.09 – динаміка та міцність машин

Даний акт складений про те, що в навчальному процесі на кафедрі галузевого машинобудування і агроінженерії впроваджені і використовуються наступні результати дисертаційного дослідження Горошка А. В.:

- методи ідентифікації дисбалансів і пружно-інерційних характеристик гнучких роторів увійшли до курсу «Основи теорії коливань та віброзахист»;
- методи розв'язання з заданою точністю обернених задач ідентифікації математичних моделей механічних систем, а також метод пробних параметрів, увійшли до лекційного курсу та циклу лабораторних робіт з дисципліни «Основи наукових досліджень, теорія і практика експерименту».

При виконанні магістерських кваліфікаційних робіт з галузевого машинобудування для експериментального дослідження параметрів механічних систем використовується метод статистичної обробки вимірних значень; для проектного розрахунку на міцність – метод параметричного синтезу конструкторських параметрів.

Впровадження цих результатів в навчальний процес сприяє ширшому ознайомленню студентів з вирішенням проблем міцності і зниження вібрацій, що підвищує теоретичний і практичний рівень підготовки бакалаврів і магістрів, формує у студентів знання і навички володіння сучасним математичним апаратом для розв'язання практичних задач динаміки та міцності складних механічних систем.

Декан  
факультету інженерної механіки  
д.т.н., проф.

Олександренко В. П.

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Генеральний директор ВАТ «Адвіс»

Дунець І. І.

2016 р.

**АКТ**

впровадження у виробництво деяких результатів дисертаційних досліджень здобувача Горошка А.В. зі зниження вібрацій промислових машин шляхом розв'язання обернених задач динаміки

Даним актом підтверджується, що результати дисертаційних досліджень Горошка А.В., а саме: методи розв'язання обернених задач, завдяки яким вироблено методику вібродосліджень роторних машин, методи зниження вібрацій роторних машин шляхом балансування на експлуатаційних частотах роботи, рекомендації по вдосконаленню конструкції машин з метою зменшення їх віброактивності, використані фахівцями ВАТ «Адвіс» для зниження вібрацій промислових вентиляторів та повітряних компресорів.

Ефект від впровадження полягає у:

- зменшенні рівня вібрацій промислових вентиляторів і повітряних компресорів в цілому від 1,5 до 3,5 разів;
- збільшенню напрацювання до відмови з 2-3 місяців до 10-12 місяців;
- покращенні екологічного стану навколишнього середовища.


**Товариство з обмеженою відповідальністю «Нейл»**

29009, м. Хмельницький, вул. М. Красовського, 64  
 тел./факс +38 (0382) 72-00-74, 72-01-35  
 e-mail: info@nail.com.ua, www.nail.com.ua  
 р/р 26001017010320 у філії ВАТ "Укресімбанк" м. Хмельницький,  
 МФО 315609, код ЄДРПОУ 21336490 св. № 31833430

“ЗАТВЕРДЖУЮ”  
 Генеральний директор ТОВ «НЕЙЛ»  
 С.С. Федорук  
 «25» 01 2017 р.

**АКТ**

про впровадження наукових та прикладних результатів дисертаційної роботи  
 Горошка Андрія Володимировича  
 на тему «Методи оцінки конструкційної міцності і зниження  
 вібрацій механічних систем на основі обернених задач»

25.01.2017р.

м.Хмельницький

Комісія у складі технічного директора Таталока В.В. ТОВ «НЕЙЛ», головного технолога , Уроди Н.В. і головного механіка Кубова В.В. склала цей акт про те, що результати дисертаційної роботи Горошка Андрія Володимировича на тему «Методи оцінки конструкційної міцності і зниження вібрацій механічних систем на основі обернених задач» впроваджені на ТОВ «НЕЙЛ» у виробничий процес в наступному вигляді.

Методи розв'язання обернених задач ідентифікації динамічних характеристик роторів і відповідні рекомендації зі зниження вібрацій на експлуатаційних частотах обертання використані фахівцями ТОВ «НЕЙЛ» для зниження вібрацій промислових компресорів та вентиляторів.

Використання результатів роботи дозволило знизити вібрації компресорів Model TREK 22L фірми SULLAIR EUROPE у 1,6 рази та пилових ввентиляторів тип ВЦП-6-45 у 1,8 рази, підвищивши їх безпеку експлуатації, надійність та довговічність, а також знизити шум і покращити екологічну обстановку при виробничому процесі.

Голова комісії

Директор технічний ТОВ «НЕЙЛ»

В.В. Таталюк

Головний технолог ТОВ «НЕЙЛ»

Н.В. Урода

Головний механік ТОВ «НЕЙЛ»

В.М.Кубов