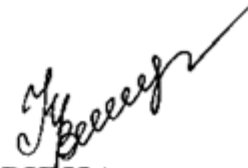


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ЛЕВКОВИЧ МАР'ЯНА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 004.942; 674.047

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНИХ
І ТЕПЛОМАСООБМІННИХ ПРОЦЕСІВ У СЕРЕДОВИЩАХ
З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ**

Спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Львів – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному лісотехнічному університеті України Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор
Соколовський Ярослав Іванович,
Національний лісотехнічний університет України,
завідувач кафедри інформаційних технологій

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Костробій Петро Петрович,
Національний університет «Львівська політехніка»,
завідувач кафедри прикладної математики

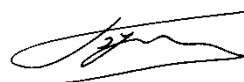
доктор технічних наук, професор
Михальов Олександр Ілліч,
Національна металургійна академія України,
завідувач кафедри інформаційних технологій і систем

Захист відбудеться 24 жовтня 2019 року о 14.00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.05 у Національному університеті «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12, 226 ауд. головного корпусу).

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічній бібліотеці Національного університету «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. Професорська, 1).

Автореферат дисертації розіслано «20» вересня 2019 р.

Учений секретар спеціалізованої
вченої ради, д.т.н., професор



Р.А.Бунь

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Технологічний процес сушіння капілярно-пористих матеріалів характеризується впливом на матеріал одразу кількох факторів – навантаження, вологості та температури. Зміна хоча б одного з них у капілярно-пористому матеріалі, до якого належить деревина, призводить до утворення деформацій та їх переходу з одного виду в інші, що зумовлює повне чи часткове відновлення початкового фізичного стану. Така здатність матеріалу характеризує наявність ефекту «пам'яті», що є заснований на залишкових деформаціях. Окрім залишкової «пам'яті», деревина, як складний природний полімерний матеріал, характеризується стохастичною неоднорідністю структури та значною мінливістю реологічних властивостей. Досліджувати вище наведені властивості у капілярно-пористих матеріалах, а також детермінований хаос, складну природу просторових кореляцій та самоорганізацію дозволяє математичний апарат дробових інтегро-диференціальних операторів. Саме на такому підході повинне базуватися розроблення математичних моделей процесів в'язко-пружного деформування та тепло-масоперенесення у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння деревини. На сьогодні досить не значна кількість праць присвячена питанням розроблення алгоритмічного та програмного забезпечення для дослідження процесів деформування та неізотермічного вологоперенесення, враховуючи властивості еридитарності та самоорганізації капілярно-пористих матеріалів, що дає змогу оцінити залишкові та пружні значення напруження під час сушіння.

За цих умов *актуальним є наукове завдання* підвищення ефективності математичного моделювання процесів тепло-масоперенесення та деформування деревини з урахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації у процесі сушіння для зменшення залишкових напружень у деревині й визначення такого напружено-деформаційного стану, який не перевищує границі міцності матеріалу.

Зв'язок роботи із науковими програмами, планами, темами. Результати представлених досліджень виконані у межах науково-дослідних робіт Національного лісотехнічного університету України, а саме:

- “Математичне і програмне забезпечення автоматизації розрахунку багато-фазних термодинамічних систем”, № держреєстрації 0110U000657, 2011–2012 рр.;
- “Програмно-алгоритмічні засоби та інформаційні технології автоматизації досліджень енерго-ефективних процесів сушіння деревини”, № держреєстрації 0113U001268, 2013–2014 рр.;
- “Математичне моделювання нерівноважних деформаційно-релаксаційних і тепло-масообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою”, № держреєстрації 0115U002316, 2015–2017 рр.

У межах перелічених науково-дослідних робіт автором розроблено математичні моделі деформаційних і тепло-масообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою, адаптовано чисельний метод їх реалізації, розроблено алгоритм

ідентифікації та встановлено закономірності процесів теплоперенесення, деформації і напруження деревини під час сушіння.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є побудова та дослідження математичних моделей деформаційно-релаксаційних, волого- та теплообмінних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням їхньої фрактальної структури, розроблення скінченно-різницевих схем для апроксимації цих математичних моделей. Для поставленої мети необхідно було розв'язати такі завдання:

- побудувати математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів на підставі дробового інтегро-диференціального апарату в процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів;
- синтезувати двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації матеріалу під час сушіння деревини;
- отримати аналітичні розв'язки та розробити алгоритм чисельного методу реалізації математичних моделей в'язко-пружної деформації у процесі сушіння деревини з урахуванням фрактальної структури;
- розробити алгоритмічне та програмне забезпечення для реалізації математичної моделі процесу тепло- та вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою;
- здійснити ідентифікацію дробово-диференціальних параметрів реологічних моделей за експериментальними даними повзучості деревини;
- встановити закономірності процесів тепло-масоперенесення і деформування деревини у процесі сушіння, враховуючи ефекти «пам'яті» та самоорганізації.

Об'єкт дослідження – процеси деформування та тепло-масоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою під час сушіння.

Предмет дослідження – математичні моделі та методи аналізу в'язко-пружних і тепло-масообмінних процесів з урахуванням ефектів пам'яті та структурної неоднорідності капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, під час сушіння.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи досліджень:

- методи механіки спадкових середовищ, математичної фізики та апарату дробового інтегро-диференціювання для побудови математичних моделей;
- інтегральний метод перетворення Лапласа для відшукування аналітичних розв'язків математичних моделей в'язко-пружної деформації;
- скінченно-різницеві схеми з використанням методу предиктор-коректор для чисельної реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення;
- метод умовного задання відомих функцій та метод інтеграла Фур'є для визначення умов стійкості різницевих схем;
- метод Проні, ітераційний метод та покоординатного спуску для ідентифікації фрактальних параметрів моделей.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у такому:

- вперше побудовано двовимірні математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, котрі відрізняються від відомих наявністю дробово-диференціальних параметрів, які дають можливість оцінити залишкові та пружні значення деформацій під час сушіння деревини, а також враховувати ефекти «пам'яті» та самоорганізації, анізотропію реологічних та теплофізичних характеристик матеріалу;

- вперше розроблено двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння деревини з урахуванням дробового інтегро-диференціального апарату, що дає можливість розширити множину її реалізацій шляхом врахування ефекту «пам'яті» форми та структурної неоднорідності капілярно-пористого матеріалу для періоду сталої та падаючої швидкостей сушіння;

- вперше отримано різницеві схеми для апроксимації двовимірної математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, та для їх реалізації адаптовано метод предиктор-коректор із встановленням умов стійкості, що забезпечує врахування ерідитарності та самоорганізації деревини під час сушіння;

- адаптовано метод розщеплення двовимірних ядер повзучості для дробово-диференціальних реологічних моделей під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, який дозволив за експериментальними даними для одновимірних моделей визначити функцію швидкості об'ємної та зсувної повзучості, здійснити ідентифікацію фрактальних параметрів, враховуючи пружні та залишкові деформації у процесі сушіння деревини;

- встановлено нові закономірності тепло-масообмінних та деформаційних процесів з урахуванням фрактальної структури деревини під час сушіння, що дають можливість враховувати ефекти «пам'яті» та самоорганізації матеріалу залежно від породи, тепломеханічних характеристик, технологічних параметрів агента сушіння, напряму анізотропії для періоду сталої та падаючої швидкості сушіння.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблено алгоритм чисельної реалізації моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у двовимірній області на підставі дробового інтегро-диференціального апарату в процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів. Для врахування ефекту «пам'яті» та самоорганізації, а також визначення такого напружено-деформаційного стану, який би не перевищував границі міцності матеріалу та підвищував його якості у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, розроблено алгоритм ідентифікації фрактальних параметрів реологічних моделей. Розроблено програмне забезпечення для скінченно-різницевого розрахунку теплообмінних та деформаційно-релаксаційних процесів, унаслідок чого можливо проаналізувати динаміку зміни температури, вологовмісту та компонент напружено-деформаційного стану

деревини під час сушіння враховуючи її фрактальну структуру та технологічні параметри періоду сталої та падаючої швидкості сушіння.

Одержані в роботі результати використано для розрахунку тепло-масообмінних та деформаційно-релаксаційних процесів під час конвективного сушіння деревини з урахуванням її властивостей еридитарності та самоорганізації, що дозволяє підвищити якість висушеної деревини на ВКФ «Ледас-Україна» (м. Хуст, Закарпатська область, акт від 23.08.2018 р.) шляхом прогнозування пружних та залишкових значень напружень, розроблення композитних матеріалів на основі деревини. Результати наукових досліджень використано у навчальному процесі кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України для викладання дисциплін: «Моделювання систем», «Математичне моделювання в інформаційних технологіях», «Чисельні методи», «Автоматизовані системи наукових досліджень», а також під час виконання бакалаврських і магістерських робіт за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» (акт від 17.05.2018 р.).

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертаційної роботи належать особисто здобувачу. У роботах, опублікованих у співавторстві, автору дисертації належать: [1, 12-14] – побудова двовимірних моделей в'язкопружної деформації в умовах неізотермічного вологоперенесення з урахуванням фрактальної структури капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, отримання аналітичних розв'язків представлених моделей та алгоритму чисельної реалізації; [4, 10, 16, 22] – дослідження та розроблення одновимірних моделей деформаційно-релаксаційних процесів під час сушіння деревини на підставі похідних дробового порядку; [5-9, 15, 17-20] – побудова математичної моделі тепломасоперенесення у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації, розроблення скінченно-різницевої схем для апроксимації та алгоритму чисельної реалізації отриманої моделі; встановлення умов стійкості; [2, 11, 21] – ідентифікація дробових інтегро-диференціальних параметрів реологічних моделей за експериментальними даними повзучості деревини, встановлення закономірностей процесів деформування та тепло-і вологоперенесення під час сушіння деревини.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

– 14-th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering ‘TCSET-2018’ (Lviv, 2018);

– XI, XII and XIII International Scientific and Technical Conferences “Computer Science and Information Technologies” ‘CSIT’ (Lviv, 2016, 2017, 2018);

– I-st and II-nd International Conferences “Data Stream Mining & Processing” ‘DSMP’ (Lviv, 2016, 2018);

– 18-th International Conference on System Analysis and Information Technology ‘SAIT-2016’ (Kyiv, 2016);

- 14-th International Conference “The Experience of Designing and Application of CAD System in Microelectronics” ‘CADSM-2017’ (Lviv, 2017);
- IV Міжнародній науково-практичній конференції «Проблеми інформатики та комп’ютерної техніки» ‘ПІКТ-2015’ (Чернівці, 2015);
- III Міжнародній конференції з автоматичного управління та інформаційних технологій ‘ICASIT-2015’ (Київ, 2015);
- X Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем» ‘МДС’ (Чернігів, 2015);
- 14 Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем» ‘МОДС’ (Київ, Жукін, 2016);
- XXIV Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» ‘APAMS-2018’ (Львів, 2018);
- 1-st International Workshop on Informatics & Date-Driven Medicine (Львів, 2018);
- Науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу Національного лісотехнічного університету України в період 2015–2018 рр.

Публікації. Основні результати досліджень опубліковані у 22 працях, зокрема: 8 статей [1-8], у тому числі 6 статей у наукових фахових виданнях [1-6]; 14 публікацій у матеріалах наукових конференцій; праці [2, 7, 9-15] включено до наукометричної бази Scopus.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота загальним обсягом 202 сторінки складається зі вступу, анотації, п’ятих розділів, висновків, списку використаних джерел із 209 найменувань та п’ятих додатків. Основний текст викладено на 124 сторінках. Робота містить 29 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету та завдання дисертаційної роботи, відзначено наукову новизну та практичну цінність отриманих результатів, наведено відомості про особистий внесок здобувача та апробацію одержаних результатів дисертаційної роботи.

У **першому розділі** проведено аналіз розвитку дробового інтегро-диференціального апарату та його використання для моделювання прямих та обернених задач у різних галузях науки, зокрема процесів в’язко-пружної деформації та тепломасоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів. Вчені F. Mainardi, I. Podlubny, В. Учайкин, В. Васильев, С. Самко, А. Бутковский, Н. Вірченко, Г. Лопушанська, П. Костробій, А. Нахушев, Р. Нигматуллин, Odibat, Friedrich, Miller and Boss, Oldham and Spanier, Chen and Moore, Ahmad and Sivasundaram застосовували нецілочисельне інтегро-диференціювання до моделювання систем, яким характерні біологічна мінливість реологічних властивостей, ефекти «пам’яті», структурна неоднорідність, просторова не локальність, детермінований хаос та самоорганізація. Неоднозначність застосування математичного апарату дробових операторів інтегрування та диференціювання пояснюється відсутністю явної фізичної, геометричної

та ймовірнісної інтерпретації таких операцій, накладанням властивостей нецілочисельного апарату диференціювання та різних підходів до його визначення – Рімана–Ліувілля, Капуто, Грюнвальда–Летнікова, Вейля, Маршо, Рісса, Райта.

Дослідження деформаційно-релаксаційних процесів у працях С.В. Ерохіна, Е.Н. Огородникова, В.П. Радченко, М. Javidі, S.W. Welch показали, що застосування дробового інтегро-диференціального апарату для таких процесів дозволяє більш адекватно, виходячи з фізичних міркувань, узагальнювати експериментальні дані для ідентифікації параметрів моделей. Зокрема праці Я.І. Соколовського та В.М. Шиманського присвячено дослідженням в умовах регулярного та нерегулярного режимів процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів, що дає можливість враховувати ефекти «пам'яті» та самоорганізації деревини. На початковому етапі знаходяться дослідження, присвячені питанням пошуку ефективного методу ідентифікації фрактальних параметрів моделей, зокрема у частково це відображено у роботах В.П. Голуб, С.В. Ерохіна та А.С. Овсиенко.

Праці Б.І. Гайвась, Б.Н. Уголева, І.М. Крошного та Г.С. Шубина присвячено розробленню математичних моделей неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів під час сушіння. Для розв'язку математичних моделей тепло-масоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою використовують і аналітичні, і чисельні методи реалізацій. У працях Р.П. Мейланова, Л.А. Фильштинського, Y. Povstenko, В.У. Datsko, L. Kexue та Я.Д. П'янило найбільшу перевагу для аналізу та виведення самих дробових інтегро-диференціальних рівнянь надають аналітичним методам, наприклад: інтегральний метод перетворення Лапласа, Мелліна, Фур'є, функції Гріна, спектральний метод з використанням многочленів Лагерра. Проте, оскільки аналітичні методи є обмежено застосованими, то більш ефективними та простішими у застосуванні є чисельні методи, зокрема метод скінченного елемента та скінчених різниць. Використання скінченно-різницевої апроксимації для реалізацій математичних моделей, що забезпечує врахування еридитарності та самоорганізації матеріалу, у своїх працях застосовували В.Д. Бейбалаев, А.К. Баззаев, Ф.И. Таукенова, В. Головизин, V.E. Lynch, I. Turner, Q. Liu та F. Liu.

У результаті проведеного аналізу можна зазначити, що використання нецілочисельного інтегро-диференціювання для моделювання деформаційних та тепло-масообмінних процесів, зокрема під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, дає можливість описати нові властивості матеріалу, такі як ефекти «пам'яті», самоорганізації, неоднорідності структури та її самоподібність.

У **другому розділі** побудовано двовимірну математичну модель тепло-масоперенесення капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, у процесі сушіння, що описується взаємозв'язаною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних із дробовим порядком за часом t та просторовими координатами x_1 та x_2 :

$$c\rho \frac{\partial^\alpha T(t, x_1, x_2)}{\partial t^\alpha} = \lambda_1 \frac{\partial^\beta T(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^\beta} + \lambda_2 \frac{\partial^\beta T(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^\beta} + \varepsilon\rho_0 r \frac{\partial^\alpha U(t, x_1, x_2)}{\partial t^\alpha}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^\alpha U(t, x_1, x_2)}{\partial t^\alpha} = a_1 \frac{\partial^\beta U(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^\beta} + a_2 \frac{\partial^\beta U(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^\beta} + a_1 \delta \frac{\partial^\beta T(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^\beta} + a_2 \delta \frac{\partial^\beta T(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^\beta}, \quad (2)$$

з граничними умовами третього роду:

$$\lambda_i \frac{\partial^\gamma T}{\partial x_i^\gamma} \Big|_{x_i=0, l_i} + \rho_0 (1-\varepsilon) \beta^* (U|_{x_i=0, l_i} - U_p) = \alpha^* (T|_{x_i=0, l_i} - t_c), \quad (3)$$

$$a_i \delta \frac{\partial^\gamma T}{\partial x_i^\gamma} \Big|_{x_i=0, l_i} + a_i \frac{\partial^\gamma U}{\partial x_i^\gamma} \Big|_{x_i=0, l_i} = \beta^* (U_p - U|_{x_i=0, l_i}) \quad (4)$$

та початковими умовами для періоду сталої швидкості сушіння:

$$T(0, x_1, x_2) = T_0(x_1, x_2), U(0, x_1, x_2) = U_0. \quad (5)$$

Для періоду падаючої швидкості процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів, що характеризується значеннями чисел Фур'є та Біо – $F_o \approx 0.1$, $Bi \approx 100$, початковий вологовміст описується такою квадратичною функцією:

$$U|_{t=0} = U_{II} - \left[1 - \left(\frac{x_1 - l_1/2}{l_1/2} \right)^2 \right] \times \left[1 - \left(\frac{x_2 - l_2/2}{l_2/2} \right)^2 \right] (U_{II} - U_{II}), \quad (6)$$

де $(t, x_1, x_2) \in D, D = [0, \tau_{\max}] \times [0, l_1] \times [0, l_2]$, T – температура, U – вологовміст, U_{II} – вологовміст у центрі капілярно-пористого матеріалу, U_{II} – вологовміст на поверхні, $c(T, U)$ – питома теплоємність, $\rho(U)$ – густина, ρ_0 – базисна густина, ε – коефіцієнт фазового переходу, r – питома теплота пароутворення, $\lambda_i(T, U)$ ($i=1,2$) – коефіцієнти теплопровідності, $a_i(T, U)$ ($i=1,2$) – коефіцієнти вологопровідності, $\delta(T, U)$ – термоградієнтний коефіцієнт, t_c – значення температури середовища, $U_p(t_c, \varphi)$ – рівноважний вологовміст, φ – відносна вологість агента сушіння, $\alpha^*(t_c, v)$ – коефіцієнт теплообміну, v – швидкість руху агента сушіння, $\beta^*(t_c, \phi, v)$ – коефіцієнт вологообміну, α – дробовий порядок похідної за часом ($0 < \alpha \leq 1$), β, γ – дробові показники похідної за просторовими координатами ($1 < \beta \leq 2$), ($0 < \gamma \leq 1$).

На підставі використання дробового інтегро-диференціального апарату розроблено скінченно-різницевої схеми для апроксимації математичної моделі (1)-(6). Отже, різницеву апроксимацію дробової похідної α на часовому відрізку $[t^k, t^{k+1}]$, враховуючи формулу Рімана–Ліувілля можна записати так:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \Big|_{t^k} \approx \frac{u^{k+1} - \alpha u^k}{\Gamma(2-\alpha) \Delta t^\alpha}, \quad (\Delta t = t^{k+1} - t^k). \quad (7)$$

Використовуючи формулу Грюнвальда–Летнікова, різницевої апроксимації дробової похідної β за просторовими координатами x_1 та x_2 записуємо, відповідно:

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial x_i^\beta} \Big|_{x_i(n_i)} \approx \frac{1}{h_i^\beta} \sum_{j=0}^m q_j u_{ni-j+1}, \quad i=1,2; h_i = x_{i(n_i+1)} - x_{i(n_i)}; q_0 = 1, q_j = (-1)^j \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-j+1)}{j!}. \quad (8)$$

Адаптовано метод предиктор-коректор для чисельної реалізації двовимірної математичної моделі неізотермічного вологоперенесення з урахуванням фрактальної

структури капілярно-пористих матеріалів під час сушіння. Отримано різницеву схему для чисельної реалізації системи диференціальних рівнянь (1) та (2), враховуючи вирази апроксимацій (7) та (8):

$$c\rho \frac{T_{n,m}^{k+1} - \alpha T_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta t^\alpha} = \frac{\lambda_1}{h_1^\beta} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^{k+\omega} + \frac{\lambda_2}{h_2^\beta} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^{k+\omega} + \varepsilon\rho_0 r \frac{U_{n,m}^{k+1} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta t^\alpha}, \quad (9)$$

$$\frac{U_{n,m}^{k+1} - \alpha U_{n,m}^k}{\Gamma(2-\alpha)\Delta t^\alpha} = \frac{a_1}{h_1^\beta} \sum_{j=0}^n q_j U_{n-j+1,m}^{k+\omega} + \frac{a_2}{h_2^\beta} \sum_{j=0}^m q_j U_{n,m-j+1}^{k+\omega} + \frac{a_1\delta}{h_1^\beta} \sum_{j=0}^n q_j T_{n-j+1,m}^{k+\omega} + \frac{a_2\delta}{h_2^\beta} \sum_{j=0}^m q_j T_{n,m-j+1}^{k+\omega}. \quad (10)$$

У випадку, коли $\omega=1$, отримуємо неявну скінченно-різницеву схему, а за $\omega=0$ – явну схему.

Для визначення умов стійкості отриманих різницевих рівнянь (9)–(10) зв'язаного тепло-масоперенесення використано метод умовного задання відомих функцій системи, згідно з котрим знайдено таке співвідношення:

$$\Delta t^\alpha \left(\frac{C_1}{h_1^\beta} + \frac{C_2}{h_2^\beta} \right) \leq \frac{(\alpha+1)C_3}{(2+\beta)\Gamma(2-\alpha)}, \quad (11)$$

де $C_1 = \lambda_1, a_1; C_2 = \lambda_2, a_2; C_3 = (c\rho - \varepsilon\rho_0 r), (1+\delta)^{-1}$.

Покладаючи, що фрактальні параметри α, β приймають цілочисельні значення, проведено аналіз та порівняння, згідно з котрим виявлено, що знайдена умова стійкості (11) збігається із умовою стійкості для класичних рівнянь теплопровідності.

Отже, розроблено двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення та адаптовано метод її чисельної реалізації з урахуванням фрактальної структури капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння, що дає можливість досліджувати ефекти «пам'яті», самоорганізації та просторової нелокальності, анізотропію теплофізичних характеристик для періоду сталої та падаючої швидкості процесу сушіння. Встановлено умови стійкості для різницевої схеми зв'язаного тепло-масоперенесення та показано їхню збіжність із умовами стійкості та збіжності для класичних рівнянь теплопровідності шляхом їхнього порівняння та аналізу.

У **третьому розділі**, використовуючи методи механіки спадкових середовищ та дробовий інтегро-диференціальний апарат, побудовано одновимірну математичну модель Кельвіна капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фрактальної структури під час сушіння та наведено дробово-диференціальні аналоги моделей Максвелла та Фойгта. Отримано дробово-диференціальну модель Кельвіна:

$$E_1 \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma(t) + (E_1 + E_2)\sigma(t) = E_1 E_2 (\varepsilon(t) + \tau^\beta D_t^\beta \varepsilon(t)), \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad (12)$$

де t – час, τ – час релаксації, E_1 – модуль пружності елемента Фойгта для моделі Кельвіна, E_2 – модуль пружності для моделі Кельвіна, $\sigma(t)$ – напруження, $\varepsilon(t)$ – деформація, D_t^α, D_t^β – дробові похідні за часом t з порядком, відповідно, α, β .

Використовуючи метод перетворення Лапласа та властивості дробових інтегро-диференціальних операторів, знайдено аналітичні співвідношення у інтегральній формі для визначення деформацій ε та напруження σ капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння:

$$\sigma_M(t) = c_M t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha} \right) + E \tau^{\beta-\alpha} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{(t-z)^\alpha}{\tau^\alpha} \right) D_z^\beta \varepsilon(z) dz, \quad (13)$$

$$\varepsilon_M(t) = \frac{1}{E \tau^\beta} \int_0^t \left(\frac{\tau^\alpha (t-z)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} + \frac{(t-z)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) \sigma(z) dz, \quad (14)$$

$$\sigma_K(t) = c_K t^{\alpha-1} A(t) + \frac{E_2}{\tau^\alpha} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} A(t-z) (\varepsilon(z) + \tau^\beta D_z^\beta \varepsilon(z)) dz, \quad (15)$$

$$\varepsilon_K(t) = \tilde{c}_K t^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left(-\frac{t^\beta}{\tau^\beta} \right) + \frac{1}{E_2 \tau^\beta} \int_0^t (t-z)^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left(-\frac{(t-z)^\beta}{\tau^\beta} \right) \left[\tau^\alpha D_z^\alpha \sigma(z) + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1} \sigma(z) \right] dz, \quad (16)$$

$$\sigma_F(t) = E D_t \int_0^t \left(\frac{\tau^\alpha (t-z)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\tau^\beta (t-z)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \right) \varepsilon(z) dz, \quad (17)$$

$$\varepsilon_F(t) = c_F t^{\beta-1} E_{\beta-\alpha,\beta} \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta-\alpha} \right) + \frac{1}{E \tau^\beta} \int_0^t (t-z)^{\beta-1} E_{\beta-\alpha,\beta} \left(-\left(\frac{t-z}{\tau}\right)^{\beta-\alpha} \right) \sigma(z) dz, \quad (18)$$

де $c_F = \varepsilon^{(\beta-1)}(0+) + \tau^{\alpha-\beta} \varepsilon^{(\alpha-1)}(0+)$, $c_M = \sigma^{(\alpha-1)}(0+) - E \tau^{\beta-\alpha} \varepsilon^{(\beta-1)}(0+)$,

$c_K = \sigma^{(\alpha-1)}(0+) - E_2 \tau^{\beta-\alpha} \varepsilon^{(\beta-1)}(0+)$, $\tilde{c}_K = \varepsilon^{(\beta-1)}(0+) - \frac{\tau^{\alpha-\beta}}{E_2} \sigma^{(\alpha-1)}(0+)$,

$A(t) = E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{(E_1 + E_2)t^\alpha}{E_1 \tau^\alpha} \right)$, $f^{(\alpha-1)}(0+) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi$.

Враховуючи представлені у інтегральній формі реологічні моделі, визначено ядра повзучості та релаксації, термодинамічні характеристики, що дають можливість оцінити пружні та залишкові значення напруження деревини у процесі сушіння. Досліджено та побудовано одновимірні моделі процесу в'язко-пружної деформації під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням їх властивостей самоорганізації та ефектів «пам'яті».

У **четвертому розділі** побудовано двовимірні математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою під час сушіння на основі використання властивостей апарату дробового інтегро-диференціювання та досліджень в'язко-пружних середовищ в умовах взаємодії з процесами теплоперенесення. У загальному вигляді математичну модель двовимірного деформування капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації у процесі сушіння для реологічних моделей можна описати за допомогою рівнянь рівноваги з дробовим порядком γ ($0 < \gamma \leq 1$) за просторовими координатами x_1 та x_2 :

$$\begin{aligned} & C_{11} \left(\frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_1^\gamma} (1 - \bar{R}_{11}) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1}}{\partial x_1^\gamma} + \tilde{R}_{11} \right) + C_{12} \left(\frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_1^\gamma} (1 - \bar{R}_{12}) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T2}}{\partial x_1^\gamma} + \tilde{R}_{12} \right) + \\ & + 2C_{33} \left(\frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_2^\gamma} (1 - \bar{R}_{33}^2) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_2^\gamma} + \tilde{R}_{33}^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$C_{21} \left(\frac{\partial^\gamma \varepsilon_{11}}{\partial x_2^\gamma} (1 - \bar{R}_{21}) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1}}{\partial x_2^\gamma} + \tilde{R}_{21} \right) + C_{22} \left(\frac{\partial^\gamma \varepsilon_{22}}{\partial x_2^\gamma} (1 - \bar{R}_{22}) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T2}}{\partial x_2^\gamma} + \tilde{R}_{22} \right) +$$

$$+ 2C_{33} \left(\frac{\partial^\gamma \varepsilon_{12}}{\partial x_1^\gamma} (1 - \bar{R}_{33}^1) - \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_1^\gamma} + \tilde{R}_{33}^1 \right) = 0, \quad (20)$$

де $\varepsilon^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$, $\varepsilon_T = (\varepsilon_{T1}, \varepsilon_{T2}, \varepsilon_{T3})^T$ – вектори деформацій, компоненти другого вектора зумовлені зміною температури ($\Delta T = T - T_0$) та вмісту вологи ($\Delta U = U - U_0$):

$$\varepsilon_{T1} = \alpha_{11} \Delta T + \beta_{11} \Delta U, \quad \varepsilon_{T2} = \alpha_{22} \Delta T + \beta_{22} \Delta U, \quad \varepsilon_{T3} = 0, \quad (21)$$

$\alpha_{11}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{22}$ – коефіцієнти температурного розширення та вологісного всихання; C_{ij} – компоненти тензора пружності ортотропного тіла, $\bar{R}_{ij}, \tilde{R}_{ij}$ – значення інтегралів:

$$\int_0^t R_{ij}(t-z, T, U) dz = \bar{R}_{ij}, \quad \int_0^t R_{ij}(t-z, T, U) \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T1, T2}}{\partial x_k^\gamma} dz = \tilde{R}_{ij}, \quad (k=1, 2), \quad (22)$$

$$\int_0^t R_{ij}(t-z, T, U) \frac{\partial^\gamma \varepsilon_{T3}}{\partial x_2^\gamma} dz = \tilde{R}_{33}^2, \quad (i, j=1, 2),$$

R_{ij} – ядра релаксації дробово-диференціальних моделей.

Задамо такі граничні та початкові умови:

$$\varepsilon_{ij}|_{x_j=0} = 0, \quad \varepsilon_{ij}|_{x_j=l_j} = 0, \quad \varepsilon_{ij}|_{t=0} = 0, \quad (j=1, 2). \quad (23)$$

Для дослідження деформацій та напружень у деревині під час сушіння враховуючи її властивості ерідитарності та самоорганізації у різних напрямках анізотропії, побудовано двовимірні математичні моделі Фойгта, Максвелла та Кельвіна у диференціальній та інтегральній формі. Представлення у інтегральній формі моделей напружено-деформованого стану деревини у процесі сушіння отримано за допомогою методу перетворення Лапласа та властивостей нецілочисельного інтегро-диференціювання.

Двовимірна дробово-диференціальна модель Фойгта:

$$\sigma_{ii} = \frac{C_{ii}}{\Gamma(1-\alpha)} D_t^\alpha \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} [p_1(\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + p_2(\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi))] d\xi +$$

$$+ \frac{2E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_t^\beta \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} [(\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi))] d\xi, \quad (24)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)} D_t^\alpha \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} (\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi)) d\xi + \frac{E\tau^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_t^\beta \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} (\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi)) d\xi. \quad (25)$$

Двовимірні дробово-диференціальні моделі Кельвіна та Максвелла:

$$\sigma_{ii} = C_i G(t) + A \int_0^t G(t-\xi) [p_1(\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi)) + 2BD_i^\beta (\varepsilon_{11}(\xi) - \varepsilon_{T1}(\xi))] d\xi +$$

$$+ A \int_0^t G(t-\xi) [p_2(\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi)) + 2BD_i^\beta (\varepsilon_{22}(\xi) - \varepsilon_{T2}(\xi))] d\xi, \quad (26)$$

$$\sigma_{12} = C_3 G(t) + A \int_0^t G(t-\xi) [2C_{33} (\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi)) + BD_i^\beta (\varepsilon_{12}(\xi) - \varepsilon_{T3}(\xi))] d\xi, \quad (27)$$

$$\text{де } G(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-At^\alpha), \text{ Kelvin} \\ t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\right), \text{ Maxwell} \end{cases} \quad B = \begin{cases} \frac{E_1 E_2 \tau^\beta}{(E_1 + E_2)}, \text{ Kelvin} \\ E_2 \tau^\beta, \text{ Maxwell} \end{cases}, \quad A = \begin{cases} \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \tau^\alpha}, \text{ Kelvin} \\ \frac{1}{\tau^\alpha}, \text{ Maxwell} \end{cases} \text{ для моделей}$$

Максвелла та Кельвіна – $\begin{cases} i=1 \rightarrow p_1=C_{11}, p_2=C_{12} \\ i=2 \rightarrow p_1=C_{21}, p_2=C_{22} \end{cases}$; для моделі Фойгта – $\begin{cases} i=1 \rightarrow p_1=1, p_2=\nu_2 \\ i=2 \rightarrow p_1=\nu_1, p_2=1 \end{cases}$.

Розроблено алгоритм чисельного методу реалізації двовимірної математичної моделі в'язко-пружного деформування деревини, враховуючи її фрактальну структуру у процесі сушіння, що базується на використанні різницевої апроксимації. Отримано скінченно-різницеву схему для апроксимації рівнянь рівноваги (19) та (20) на основі використання формули Рімана–Ліувілля :

$$\begin{aligned} & \frac{C_{11}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left[(1-\bar{R}_{11}) \left(\varepsilon_{11(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{11(n,m)}^k \right) - \left(\varepsilon_{T1(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{T1(n,m)}^k \right) \right] + C_{11} \tilde{R}_{11} + \\ & + \frac{C_{12}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left[(1-\bar{R}_{12}) \left(\varepsilon_{22(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{22(n,m)}^k \right) - \left(\varepsilon_{T2(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{T2(n,m)}^k \right) \right] + C_{12} \tilde{R}_{12} + \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \left[(1-\bar{R}_{33}^2) \left(\varepsilon_{12(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{12(n,m)}^k \right) - \left(\varepsilon_{T3(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{T3(n,m)}^k \right) \right] + 2C_{33} \tilde{R}_{33}^2 = 0, \\ & \frac{C_{21}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \left[(1-\bar{R}_{21}) \left(\varepsilon_{11(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{11(n,m)}^k \right) - \left(\varepsilon_{T1(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{T1(n,m)}^k \right) \right] + C_{21} \tilde{R}_{21} + \\ & \frac{C_{22}}{\Gamma(2-\gamma)h_2^\gamma} \left[(1-\bar{R}_{22}) \left(\varepsilon_{22(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{22(n,m)}^k \right) - \left(\varepsilon_{T2(n,m+1)}^k - \gamma \varepsilon_{T2(n,m)}^k \right) \right] + C_{22} \tilde{R}_{22} + \end{aligned} \quad (29)$$

$$+ \frac{2C_{33}}{\Gamma(2-\gamma)h_1^\gamma} \left[(1-\bar{R}_{33}^1) \left(\varepsilon_{12(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{12(n,m)}^k \right) - \left(\varepsilon_{T3(n+1,m)}^k - \gamma \varepsilon_{T3(n,m)}^k \right) \right] + 2C_{33} \tilde{R}_{33}^1 = 0.$$

Адаптовано метод розщеплення двовимірних ядер повзучості для дробово-диференціальних реологічних моделей у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, що дозволяє визначити ядра зсувної повзучості та функцію швидкості об'ємної повзучості за експериментальними даними для одновимірних моделей, здійснити ідентифікацію дробово-диференціальних параметрів моделей та дослідити ефекти «пам'яті» і самоорганізації деревини. Для дробово-диференціальної моделі Кельвіна ядра зсувної та швидкості об'ємної повзучості:

$$\begin{aligned} \Pi_{зс(K)}(t-\xi) &= \frac{(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2 \tau^\beta (1+\nu_0)} (t-\xi)^{\beta-1} \left(E_{\beta,\beta} \left(-\frac{E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2 \tau^\beta (1-\nu_1 \nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) + \right. \\ & \left. + \nu_0 E_{\beta,\beta} \left(-\frac{\nu_2 E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2 \tau^\beta (1-\nu_1 \nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{об(K)}(t-\xi) &= \frac{(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2 \tau^\beta (1-2\nu_0)} (t-\xi)^{\beta-1} \left(E_{\beta,\beta} \left(-\frac{E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2 \tau^\beta (1-\nu_1 \nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) - \right. \\ & \left. - 2\nu_0 E_{\beta,\beta} \left(-\frac{\nu_2 E_{11}(E_1 + E_2)}{2E_1 E_2 \tau^\beta (1-\nu_1 \nu_2)} (t-\xi)^\beta \right) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Отже, побудовано двовимірні в'язко-пружні моделі у середовищах з фрактальною структурою, що дозволяють розширити множину її реалізацій

у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з урахуванням початкового значення навантаження, вологості та температури, анізотропії тепломеханічних та реологічних характеристик, самоорганізації, структурної неоднорідності та ефекту «пам'яті» матеріалу. Розроблено алгоритм чисельного методу реалізації отриманої моделі та адаптовано метод розщеплення двовимірних дробово-диференціальних ядер, що дозволяють враховувати під час сушіння у деревині залишкові та в'язко-пружні значення напруження.

У п'ятому розділі встановлено закономірності моделювання процесів тепло-та вологоперенесення, в'язкопружного деформування деревини з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації під час сушіння, розроблено алгоритм ідентифікації дробово-диференціальних моделей та наведено його результати.

Для ідентифікації фрактальних параметрів реологічних моделей капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння було використано метод Проні та ітераційний метод. Застосування ітераційного методу має два етапи. На першому етапі приймаючи, що параметри α, β функції деформації цілочисельні, на основі методу найменших квадратів здійснюється пошук початкового значення напруження, часу релаксації, модуля пружності. Отримані результати ідентифікації на першому етапі враховуються у наступному етапі, де значення дробово-диференціальних параметрів отримуються шляхом мінімізації виразів, що описують закон повзучості для реологічних моделей. Для обох етапів цільові функції:

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{F,K,M}^{kl}(t_i, \tau, \sigma_0, E))^2 \Rightarrow \min, \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{F,K,M}(t_i, \alpha, \beta))^2 \Rightarrow \min. \quad (32)$$

Для уточнення ідентифікованих параметрів використано метод покоординатного спуску. Результати ідентифікації та експериментальні дані для моделей Фойгта та Максвелла за вологості деревини ($W = 30\%$) та, відповідно, модулів пружності ($E_F = 16.7 \cdot 10^3$ МПа, $E_M = 15.3 \cdot 10^3$ МПа,) зображено на рис. 1, а, б. Враховуючи статистичний критерій, що базується на коефіцієнті кореляції, знайдено відповідні оцінки розходження результатів для моделей – $r_F = 0.889$; $r_M = 0.992$.

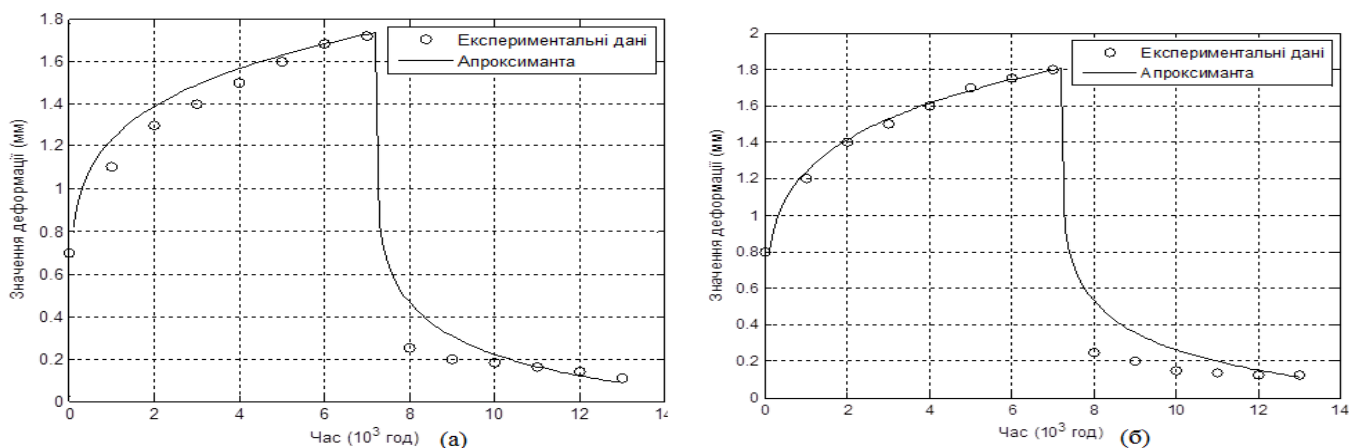


Рис. 1. Ідентифікація дробово-диференціальних параметрів моделі Фойгта (а) та моделі Максвелла (б)

Досліджено динаміку зміни температури та вологовмісту для періоду сталої та падаючої швидкості сушіння (рис. 2, а, б) деревини сосни, берези та дуба із базисною густиною відповідно – $\rho_{0(p)} = 460 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{0(b)} = 530 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{0(o)} = 560 \text{ кг/м}^3$. Встановлено такі закономірності: незалежно від породи деревини, з урахуванням її фрактальної структури температура на кінці бруска зростає швидше, ніж у центрі; через неоднорідність структури капілярно-пористого матеріалу можна спостерігати процес уповільнення нагрівання; деревина з ефектами «пам'яті» та самоорганізації із нижчою базисною густиною нагрівається швидше та має суттєвіший вплив на динаміку зміни температури та вологості на відміну від твердих порід деревини; зменшення параметрів α, β моделі тепломасоперенесення призводить до пришвидшення процесу вологовиділення. Проведено верифікацію та валідацію отриманих результатів шляхом порівняння із експериментальними даними динаміки температури та вологовмісту деревини у процесі сушіння.

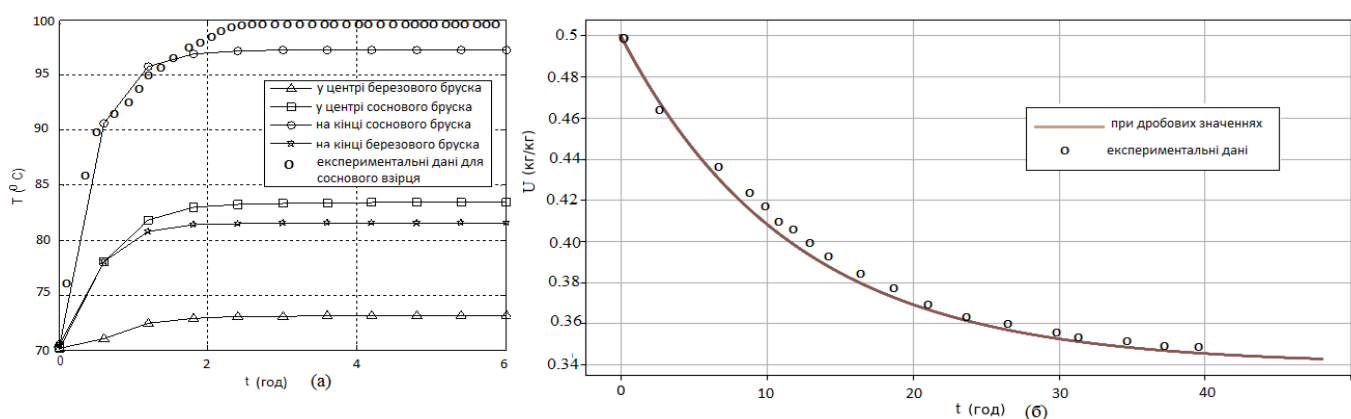


Рис. 2. Зміна температури у різних геометричних точках сосни та берези (а) вологовмісту дуба з урахуванням фрактальної структури (б)

На рис. 3,а, зображено зміну напруження деревини сосни під час сушіння з модулем пружності $E = 10200 \text{ МПа}$ для реологічних моделей при дробово-диференціальних параметрах – $\alpha = 0.9$, β змінний. Для моделей Максвелла та Кельвіна криві напруження майже збігаються, що пояснюється іншими дослідниками так: триелементні схеми, які містять два однойменні елементи, механічно еквівалентні двоелементним схемам. Встановлено, що навантаження матеріалу з урахуванням фрактальної структури впливає на поведінку реологічної моделі у процесі сушіння. Отже, багатократність чи значне навантаження призводить до зниження пружності капілярно-пористого матеріалу, а отже, до збільшення значення залишкових деформацій. Оскільки для моделі Фойгта механічна схема складається із пружного і в'язкого елементів, не з'єднаних між собою послідовно, то за тривалої дії постійного напруження деформації будуть необмежено зростати, що доведено іншими дослідженнями, та можна бачити із рис. 3, б. Зокрема, найбільшого значення деформація досягає із врахуванням моделі Фойгта для м'яких порід деревини. Встановлено, що для порід деревини із більшою пружністю ефект пам'яті спостерігається у більшій мірі та частка залишкових

деформацій під час сушіння у них менша, на відміну від хвойних порід. Окрім цього, зміна лише одного параметра реологічної моделі на нецілочисельний, як можна бачити з рис. 3,б, призводить до зменшення деформації, зокрема найбільш виражено це відбувається на породах деревини із меншим модулем пружності. Встановлені закономірності співставлені із результатами, одержаними іншими дослідниками у часткових випадках та відомими теоретичними даними, звідки можна зробити висновки про адекватність моделей та методів їх реалізації.

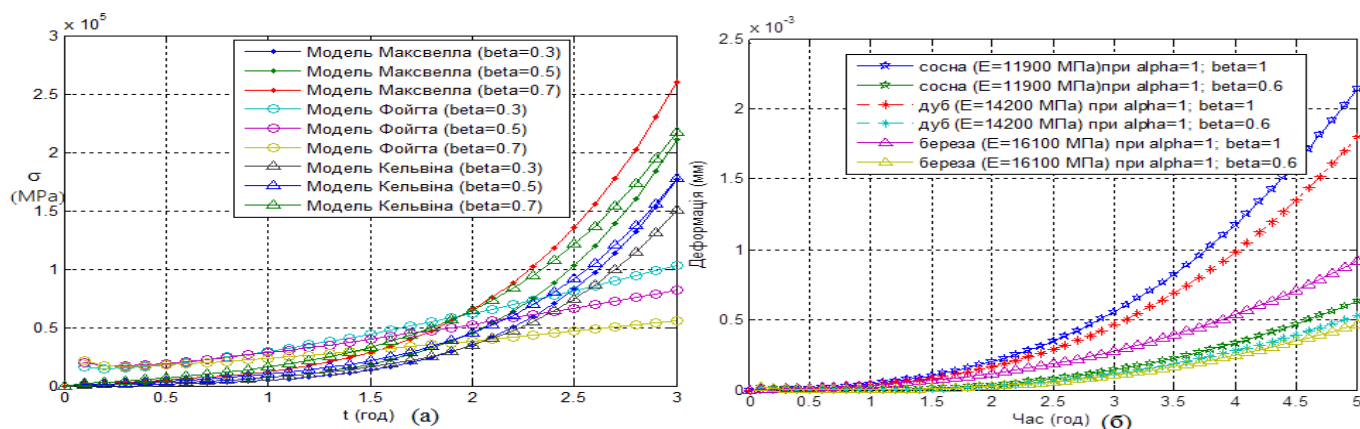


Рис. 3. Залежності напруження для реологічних моделей при фрактальних параметрах (а) та деформацій дробово-диференціальної моделі Фойгта залежно від породи деревини (б)

Проведено аналіз двовимірних моделей деформування деревини під час сушіння. Із рис. 4,а,б можна зробити такі висновки: із збільшенням часу деформації та напруження у радіально-тангентальному напрямі анізотропії дещо зменшуються; найбільшого значення деформації та напруження досягає сосновий взірець, а найменшого – дубовий. Встановлено, що деформації у радіальному напрямі анізотропії під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фрактальної структури більші, ніж у тангентальному. Отже, можна відзначити вплив фрактальної структури матеріалу на криві напруження та деформації, зокрема для порід деревини із меншою базисною густиною.

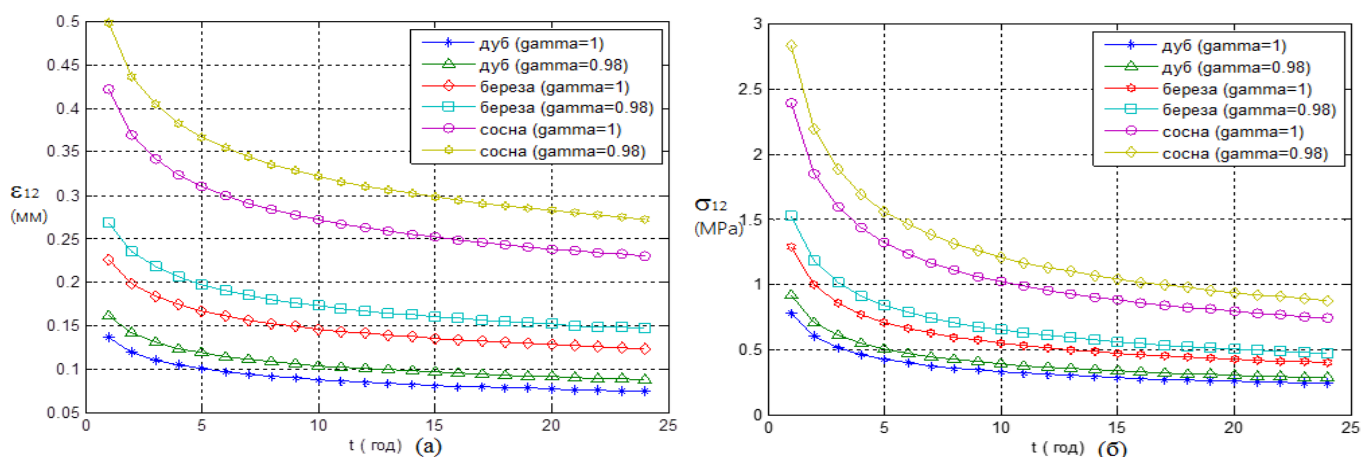


Рис. 4. Зміна компоненти деформацій ε_{12} (а) та компоненти напружень σ_{12} (б) для моделі Фойгта залежно від породи деревини

Отже, розроблено алгоритм ідентифікації дробово-диференціальних параметрів функцій повзучості та проаналізовано динаміку зміни температури, вологості та компонент напружено-деформаційного стану деревини з урахуванням фрактальної структури під час сушіння, що дозволяє враховувати ефекти «пам'яті», самоорганізації та залишкові деформації залежно від породи деревини, напряму анізотропії, реологічних та теплофізичних характеристик, параметрів агента сушіння для періоду сталої та падаючої швидкості сушіння. Проведено верифікацію та валідацію отриманих результатів шляхом порівняння із дослідженнями процесів деформування та теплоперенесення капілярно-пористих матеріалів з урахуванням цілочисельних та дробово-диференціальних параметрів за часом.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне наукове завдання розроблення та чисельної реалізації математичних моделей процесів деформування та тепломасоперенесення капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, під час сушіння з урахуванням еридитарності та самоорганізації, що дає можливість підвищити якість висушеного матеріалу.

1. Побудовано математичну модель тепломасоперенесення капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння на основі використання дробового інтегро-диференціального апарату, що дозволяє проаналізувати динаміку зміни температури та вологості деревини з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації матеріалу для періоду сталої та падаючої швидкостей сушіння. Розроблено скінченно-різницеві схеми для апроксимації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, що дає змогу провести реалізацію алгоритму чисельного методу. Встановлено умови стійкості різницевих схем, котрі шляхом порівняння узгоджуються із результатами інших досліджень.

2. На підставі нецілочисельного інтегро-диференціального апарату отримано аналітичні співвідношення у інтегральній формі для визначення деформацій та напружень дробово-диференціальних реологічних моделей, які дозволяють встановити динаміку напружено-деформаційного стану деревини у процесі сушіння з урахуванням еридитарності та самоорганізації матеріалу, отримати термодинамічні функції, ядра релаксації та повзучості дробово-диференціальних моделей.

3. Побудовано двовимірні математичні моделі деформаційних процесів капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, які дають можливість врахувати фрактальну структуру матеріалу залежно від початкових значень температури та вологовмісту, тепломеханічних характеристик анізотропії, різних порід деревини. Розроблено алгоритм чисельної реалізації двовимірних математичних моделей в'язко-пружної деформації капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, який дозволяє обчислити компоненти напружено-деформаційного стану деревини з урахуванням ефектів «пам'яті» та самоорганізації.

4. Проведено адаптацію методу розщеплення дробово-диференціальних ядер повзучості деревини, що дає можливість визначити ядра зсувної і функції швидкості

об'ємної повзучості за експериментальними даними одновимірних моделей в'язко-пружної деформації, ідентифікувати дробово-диференціальні параметри моделей з урахуванням фрактальної структури середовища та оцінити значення пружних і залишкових напружень капілярно-пористих матеріалів під час сушіння.

5. Встановлено закономірності чисельного моделювання неізотермічного вологоперенесення для періоду сталої та падаючої швидкості сушіння та в'язко-пружного деформування деревини у процесі сушіння з урахуванням фрактальної структури матеріалу залежно від породи, тепломеханічних характеристик та параметрів агента сушіння, що дає можливість оцінити залишкову деформацію матеріалу. Встановлено, що зменшення дробово-диференціальних параметрів моделей призводить до швидшого виділення вологості із матеріалу та зменшення деформацій, зокрема найбільш характерно це для деревини із меншим модулем пружності. Відмінність між кривими напруження із урахуванням фрактальної структури та без її урахування для твердіших порід не перевищує 16,7%, натомість різниця для порід із меншою густиною 19,6 – 24%. Проведено верифікацію і валідацію отриманих результатів шляхом порівняння із експериментальними даними та результатами чисельних досліджень, у котрих не враховано фрактальну структуру матеріалу або враховано по часі.

6. Розроблено алгоритм ідентифікації дробово-диференціальних параметрів моделей та прикладне програмне забезпечення для розрахунку тепломасообмінних і деформаційних процесів під час сушіння деревини з урахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації, що дають можливість визначити такий напружено-деформаційний стан деревини, який би мав не перевищувати границю міцності матеріалу та підвищувати його якість у технологічному процесі сушіння деревини. Результати досліджень прийняті для практичного використання на ВКФ «Ледас-Україна» (м. Хуст, Закарпатська обл.) та впроваджені у навчальний процес Національного лісотехнічного університету України.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Sokolovsky Ya., Levkovich M. Two-dimensional mathematical models of viscoelastic deformation using a fractional differentiation apparatus // International Journal of Modern Education and Computer Science. 2018. Vol. 10, No. 4. P. 1-9.
2. Mathematical models of biophysical processes taking into account memory effects and self-similarity / Ya. Sokolovsky, M. Levkovich, O. Mokrytska, Ya. Kaplunsky // Informatics & Data-Driven Medicine. 2018. Vol. 2255. P. 215-228. ISSN: 1613-0073 (SCOPUS).
3. Левкович М.В. Алгоритм ідентифікації дробово-експоненціальних ядер повзучості за експериментальними даними // Науковий вісник НЛТУ України. 2016. Вип. 26.1. С. 382-386.
4. Соколовський Я.І., Москвітіна М.В. Математичне моделювання деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології : зб. наук. пр. 2015. № 826. С. 175-184.

5. Соколовський Я.І., Левкович М.В. Чисельний метод дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології : зб. наук. пр. 2016. № 843. С. 288-296.
6. Соколовський Я., Яркун В., Левкович М. Алгоритмічне та програмне забезпечення для дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою // Науковий вісник НЛТУ України. 2016. Вип. 26.7. С. 308-318.
7. Sokolovskyy I., Levkovych M., Mokrytska O. Numerical modeling and analysis of physical properties in biomaterials with fractal structure // Informatics & Data-Driven Medicine. 2018. Vol. 2255. P. 180-192. ISSN: 1613-0073 (SCOPUS).
8. Соколовський Я., Москвітіна М. Числовий метод дослідження теплообміну на підставі похідних дробового порядку // Технічні вісті. 2015. 1(41), 2(42). С. 12-15.
9. Sokolovskyy Ya., Shymanskyi V., Levkovych M. Mathematical modeling of non-isothermal moisture transfer and visco-elastic deformation in the materials with fractal structure // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2016' : proc. of the 11th Intern. Sci. and Techn. Conf., 6-10 Sept. 2016. Lviv, 2016. P. 91-95. (SCOPUS)
10. Mathematical and software providing of research of deformation and relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovych, V. Yarkun // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2017': proc. of the 12th Intern. Sci. and Techn. Conf., 5-8 Sept. 2017. Lviv, 2017. P. 24-27. (SCOPUS)
11. Numerical simulation and analysis of systems with memory based on integro differentiation of fractional order / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovych, O. Mokrytska, Ya. Kaplunskyy // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2018': proc. of the 13th Intern. Sci. and Techn. Conf., 11-14 Sept. 2018. Lviv, 2018. P. 102-105. (SCOPUS, WEB of SCIENCE).
12. Mathematical modeling of two-dimensional deformation-relaxation processes in environments with fractal structure / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovych, O. Mokrytska, V. Atamanyuk // 2nd International Conference on Data Stream Mining and Processing 'DSMP 2018' : proc., 21-25 Aug., 2018. Lviv, 2018. P. 375-380. (SCOPUS).
13. Mathematical modeling of heat and moisture transfer and rheological behavior in materials with fractal structure using the parallelization of predictor-corrector numerical method / Ya. Sokolovskyy, V. Shymanskyi, M. Levkovych, V. Yarkun // 1st International Conference on Data Stream Mining and Processing : proc., 23-27 Aug., 2016. Lviv, 2016. P. 108-111. (SCOPUS)
14. Mathematical modeling of visco-elastic state of materials with fractal structure // Ya. Sokolovskyy, M. Levkovych, O. Mokrytska, V. Kryshchak // The Experience of Designing and Application of CAD System in Microelectronics 'CADSM 2017' : proc. of 14th Intern. Conf., 21-25 Feb., 2017. Lviv, Polyana, 2017. P. 35-38. (SCOPUS)
15. Mathematical modeling of anisotropic visco-elastic environments with memory based on integro-differentiation of fractional order / Ya. Sokolovskyy, M. Levkovych,

O. Mokrytska, V. Atamanyuk // Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering 'TCSET 2018' : proc. of 14th Intern. Conf., 20-24 Feb., 2018. Lviv, Slavske, 2018. P. 816-820. (SCOPUS)

16. Чисельне моделювання двовимірного тепломасоперенесення на підставі похідних дробового порядку / Я.І. Соколовський, М.В. Левкович, В.І. Яркун, Ю.Т. Ликтей, Р.П. Стельмах // 18-th International Conference on System Analysis and Information Technology, May 30 – June 2, 2016. Kyiv, 2016. С. 158-161.
17. Чисельне моделювання тепломасоперенесення в середовищах з фрактальною структурою з використанням розпаралелювання / Я.І. Соколовський, В.І. Яркун, М.В. Левкович, Р.П. Стельмах // 14 Міжнародна науково-практична конференція. "Математичне та імітаційне моделювання систем". Київ, Жукін, 2016. С. 75-78.
18. Моделювання неізотермічного вологоперенесення та деформування у середовищах з використанням алгоритмів розпаралелювання / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський, М.В. Левкович, В.І. Яркун // IV Науково-технічна конференція "Обчислювальні методи і системи перетворення інформації". Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, 2016. С. 88-92.
19. Чисельне моделювання тепломасоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я.І.Соколовський, М.В.Левкович, О.П.Герасимчук, В.І.Яркун // III Міжнародна конференція з автоматичного управління та інформаційних технологій 'ІСАСІТ-2015', 11-13 грудня 2015 р. Київ: НТУУ КПІ, 2015. С. 41-43.
20. Чисельне моделювання теплообмінних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І.Соколовський, М.В.Москвітіна, А.В.Нечепуренко, І.Б.Борецька // X Міжнародна науково-практична конференція «Математичне та імітаційне моделювання систем», 22-26 червня 2015. Чернігів, 2015. С. 45-49.
21. Математичні моделі деформаційно-релаксаційних процесів з використанням похідних дробового порядку / Я.І.Соколовський, М.В.Москвітіна, І.Б.Борецька, В.І.Яркун // Праці IV Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки», 26-29.05. 2015. Чернівці, 2015. С. 43-45.
22. Соколовський Я.І., Левкович М.В. Математичні моделі нерівноважних фізичних процесів з урахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Матеріали XXIV Всеукраїнської наукової конференції. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2018. С. 143-147.

АНОТАЦІЇ

Левкович М.В. Математичне моделювання деформаційних і тепломасообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет «Львівська політехніка», Міністерство освіти і науки України, Львів, 2019.

Дисертацію присвячено вирішенню актуального наукового завдання підвищення ефективності математичного моделювання процесів тепломасоперенесення та в'язко-

пружного деформування капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з врахуванням ефекту «пам'яті» та самоорганізації у процесі сушіння для забезпечення відповідної якості висушеного матеріалу, розроблення нових композитних матеріалів на основі деревини. Розроблено різницеві схеми для апроксимації математичних моделей процесів тепло-масоперенесення та в'язкопружного деформування у двовимірній області з урахуванням еридитарності та самоорганізації капілярно-пористих матеріалів під час сушіння. Адаптовано метод розщеплення двовимірних ядер повзучості для дробово-диференціальних реологічних моделей та здійснено ідентифікацію фрактальних параметрів моделей. Встановлено закономірності процесів тепловологоперенесення та в'язкопружного деформування деревини з фрактальною структурою під час сушіння.

Ключові слова: математична модель, дробовий інтегро-диференціальний апарат, фрактальна структура, деформаційний процес, тепломасоперенесення, ефект «пам'яті», ідентифікація фрактальних параметрів, процес сушіння.

Левкович М.В. Математическое моделирование деформационных и тепломассообменных процессов в средах с фрактальной структурой. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Национальный университет «Львівська політехніка», Министерство образования и науки Украины, Львов, 2019.

Диссертация посвящена решению актуальной научной задачи повышения эффективности математического моделирования процессов тепломассопереноса и вязкоупругой деформации капиллярно-пористых материалов, в частности древесины, с учетом эффекта «памяти» и самоорганизации в процессе сушки для обеспечения соответствующего качества высушиваемого материала, разработки новых композитных материалов на основе древесины. Разработано разностные схемы для аппроксимации математических моделей процессов тепломассопереноса и вязкоупругой деформации в двумерной области с учетом еридитарности и самоорганизации капиллярно-пористых материалов при сушке. Адаптирован метод расщепления двумерных ядер ползучести для дробно-дифференциальных реологических моделей и осуществлена идентификация фрактальных параметров моделей. Установлены закономерности процессов тепловлагопереноса и вязкоупругого деформирования древесины с фрактальной структурой при сушке.

Ключевые слова: математическая модель, дробный интегро-дифференциальный апарат, фрактальная структура, деформационный процесс, тепломассоперенос, эффект «памяти», идентификация фрактальных параметров, процесс сушки.

Levkovych M.V. Mathematical modeling of deformation and heat and mass transfer processes in environments with fractal structure. – On the rights of the manuscript.

Dissertation for the degree of a candidate of technical sciences by specialty: 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2019.

The dissertation is devoted to solving the actual scientific task of increasing the efficiency of mathematical modeling of heat and mass transfer processes and visco-elastic deformation of capillary-porous materials, in particular wood, taking into account the effect of "memory" and self-organization in the drying process to provide appropriate quality of dried material, the development of new composite materials based on wood. Based on a non-integral integro-differential apparatus the mathematical models of deformation and heat exchange processes in environments with fractal structure are constructed. Difference schemes are developed for approximation of mathematical models of processes of heat and mass transfer and visco-elastic deformation in a two-dimensional area taking into account the erydity and self-organization of capillary-porous materials during drying. The stability conditions for the system of difference schemes are established and the algorithm of their numerical solution is developed. Using the Laplace method, obtained the analytical dependence between the components of deformations and the stresses of fractional-differential rheological models. The method of decoupling of two-dimensional creep nuclei for fractional-differential rheological models is adapted, which made it possible to determine the shear nuclei and velocity of volumetric wood creep during drying. The algorithm of identification of fractal parameters of models is developed, which is based on the use of the iterative method and co-ordinate descent. The regularities of the processes of heat-moisture transfer and visco-elastic deformation of wood with fractal structure during drying are determined, depending on the change of fractional-differential parameters of models, the initial value of humidity and temperature, the parameters of the drying agent, the rheological and thermophysical characteristics of the material, the direction of anisotropy, the rock for the period steady and falling drying speed. Verification and validation of the obtained results were executed by comparison with experimental data and results of other researchers.

Key words: mathematical model, fractional integro-differential apparatus, fractal structure, deformation process, heat and mass transfer, memory effect, identification of fractal parameters, drying process.

Підписано до друку 12.09.2019 р.
Формат 60×90 1/16. Папір офсетний.
Друк на різнографі. Умовн. друк арк. 1,5. Обл.-видав. арк. 0,89.
Тираж 100 прим. Зам. 191436

Поліграфічний центр
Видавництва Національного університету «Львівська політехніка»
вул. Ф.Колесси, 4, 79013, Львів
Реєстраційне свідоцтво серії ДК №4459 від 27.12.2012 р.