

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Львівська політехніка»

БОРЕЦЬКА ІРИНА БОГДАНІВНА



УДК 004.94; 674.047

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОГО  
ПРОЦЕСУ СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ З УРАХУВАННЯМ ГРАНИЦІ  
ФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ**

01.05.02 – математичне моделювання  
та обчислювальні методи

**Автореферат**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Львів – 2019

## Дисертацією є рукопис

Роботу виконано на кафедрі інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України Міністерства освіти і науки України, м. Львів

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор  
**Соколовський Ярослав Іванович**,  
Національний лісотехнічний університет України,  
завідувач кафедри інформаційних технологій

**Офіційні опоненти:** доктор фізико-математичних наук, професор  
**Костробій Петро Петрович**,  
Національний університет «Львівська політехніка»,  
завідувач кафедри прикладної математики

доктор технічних наук, професор  
**Гребеннік Ігор Валерійович**,  
Харківський національний університет радіоелектроніки,  
завідувач кафедри системотехніки

Захист відбудеться 13 грудня 2019 року о 14<sup>00</sup> годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.05 у Національному університеті «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12, 226 ауд. головного корпусу).

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічній бібліотеці Національного університету «Львівська політехніка» (79013, м. Львів, вул. Професорська, 1).

Автореферат розіслано «12» листопада 2019 року.

Учений секретар  
спеціалізованої вченої ради  
доктор технічних наук, професор



Р.А. Бунь

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Інтенсифікація технологій сушіння колоїдних капілярно-пористих матеріалів зумовлює подальший розвиток математичного моделювання процесів тепломасоперенесення, фазових перетворень і деформування, які б адекватно описували закономірності видалення вологи у висушуваних матеріалах. Процеси сушіння вологісних матеріалів, зокрема природного походження, характеризуються значною енергозатратністю. Це зумовлено великою питомою теплою випаровування вологи у значних об'ємах. Процес сушіння капілярно-пористих матеріалів супроводжується поглибленням зони випаровування вологи у середину матеріалу. Наявність рухомої границі фазових перетворень на межі розділу фаз з різними теплофізичними і механічними характеристиками суттєво ускладнює математичні моделі деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів. Моделювання тепломасоперенесення з фазовими переходами у процесі сушіння зводяться до розв'язання задач Стефана, які є найскладнішими навіть для незначних змін густини матеріалу у зоні випаровування. Однак випаровування води зумовлює зміну її об'єму майже в тисячу раз, а видалення парогазової суміші з області зони випаровування вимагає значних затрат енергії. З поглибленням зони випаровування в об'ємі висушеного матеріалу спостерігається суттєве зростання тиску біля фронту випаровування. Отже, врахування енергетичних витрат кінетики переміщення пари і конвективного перенесення тепла у зоні випаровування висушуваних матеріалів, його впливу на процеси деформування дозволяє встановити закономірності формування кінцевого продукту із заданими фізико-механічними та структурними характеристиками із зменшенням тривалості процесу сушіння.

Тому існує об'єктивна необхідність побудови математичних моделей неізотермічного вологоперенесення і дослідження впливу термодифузії на масоперенесення і деформування при сушінні капілярно-пористих матеріалів з врахуванням руху зони випаровування для нестационарних режимів сушіння та розроблення ефективних аналітико-числових методів їх реалізації. Такі математичні моделі та методи аналізу дадуть змогу розробляти нові та вдосконалювати існуючі технологічні процеси гідроскопічного оброблення органічних матеріалів, зокрема деревини.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційну роботу виконано в межах науково-дослідних робіт Національного лісотехнічного університету України, зокрема: «Математичне і програмне забезпечення автоматизації розрахунку багатofазних термодинамічних систем», № держреєстрації 0110U000657, 2010-2012 рр.; «Програмно-алгоритмічні засоби та інформаційні технології автоматизації досліджень енергоефективних процесів сушіння деревини», № держреєстрації 0113U001268, 2013-2014 рр.; «Математичне моделювання нерівноважних деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою» № держреєстрації 0115U002316, 2015-2017 рр.

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є побудова математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язкопружного деформування у капілярно-пористих матеріалах у процесі конвективного сушіння з рухомими межами фазового переходу, розроблення та вдосконалення аналітико-числових методів реалізації таких моделей для областей з рухомими межами.

Для досягнення поставленої мети передбачено вирішення таких задач:

- синтезувати математичну модель тепломасоперенесення з врахуванням границь фазового переходу для капілярно-пористої пластини;
- побудувати математичну модель реологічної поведінки капілярно-пористої пластини в умовах неізотермічного вологоперенесення з врахуванням рухомих меж зони випаровування;
- побудувати двовимірну математичну модель тепломасоперенесення анізотропних середовищах з врахуванням границі фазових переходів;
- розробити ефективні аналітично-числові методи та прикладне програмне забезпечення для реалізації таких математичних моделей;
- провести обчислювальні експерименти та встановити закономірності впливу неізотермічного вологоперенесення та в'язкопружного деформування на кінетику фазових переходів у процесі сушіння деревини.

*Об'єкт дослідження* – процес конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів.

*Предмет дослідження* – нелінійні математичні моделі та аналітико-числові методи аналізу процесу конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з рухомими межами випаровування вологи.

**Методи дослідження.** У дисертаційній роботі використано такі методи дослідження: методи механіки спадкових середовищ і математичної фізики для розроблення математичних моделей; методи інтегральних перетворень, скінченних різниць, варіаційні та апроксимаційні методи для реалізації математичних моделей; методи об'єктно-орієнтованого аналізу та проектування програмного забезпечення; методи статистичного моделювання для перевірки адекватності моделей.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у такому:

- побудовано нову нелінійну математичну модель неізотермічного вологоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомої границі зони випаровування вологи, яка, на відміну від інших, дає змогу визначити зміну температурно-вологісних полів у висушуваній деревині у довільний момент часу залежно від координати фазового переходу, теплофізичних характеристик матеріалу, нестационарних режимних параметрів агента сушіння;
- отримав подальший розвиток аналітично-числовий метод для визначення неізотермічного вологоперенесення, тривалості процесу сушіння для нестационарних багатоетапних режимів агента сушіння з врахуванням зміни границі фазового переходу та температури фазового переходу;
- побудовано нову двовимірну нелінійну математичну модель процесу конвективного сушіння анізотропних пористих матеріалів з урахуванням руху границі фазових переходів, яка дозволяє врахувати вплив головних компонентів та орієнтації осей тензора теплоперенесення на нестационарні температурні поля у призматичному тілі;
- вперше узагальнено та обґрунтовано аналітично-числовий метод для визначення теплоперенесення в ортотропній пластині з рухомою границею фазового переходу у процесі конвективного сушіння та встановлення зміни рухомих меж фазового переходу у прямокутній області з врахуванням анізотропії теплофізичних характеристик матеріалу;
- побудовано нову математичну модель в'язкопружного деформування капілярно-пористої пластини в умовах зміни вологоперенесення з врахуванням зони випаровування вологи та отримано узагальнення гіпотези збереження незворотних деформацій на випадок в'язкопружного деформування капілярно-пористих матеріалів.

**Практичне значення одержаних результатів.** Розроблені аналітико-числові методи, алгоритмічне та програмне забезпечення можуть бути використані для створення систем автоматизованого розрахунку температури, вологовмісту, тиску та компонентів напружень під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини з урахуванням зони випаровування вологи та змінних технологічних параметрів агента конвективного сушіння.

Отримано розрахункові співвідношення для визначення температури фазового переходу з урахуванням градієнтів тепловологоперенесення, часу сушіння, для якого відносна насиченість досягає границі фазового переходу, та повного часу конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини.

Результати дисертаційної роботи використано в ТзОВ «Суховільський ДОК» (Городоцький р-н, Львівська обл., акт від 21.05.2018 р.) для аналізу розподілів температури, вологовмісту та компонентів в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння з урахуванням рухомих меж зони випаровування вологи, що дає можливість обґрунтування режимних змінних параметрів конвективного сушіння деревини за умови забезпечення необхідної якості продукції. Результати наукових досліджень використано та відображено у програмах навчальних дисциплін кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України: «Моделювання систем», «Проектування САЕ/CAD/CAM систем» та «Автоматизовані системи моделювання об'єктів і процесів» (акт від 11.12.2017 р.).

**Особистий внесок здобувача.** Усі наукові результати дисертаційної роботи належать особисто здобувачеві. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належить: [1, 7, 9, 12, 17] – розроблення нелінійної математичної моделі напружень і деформацій з урахуванням границі фазових переходів; [2, 6, 11, 14-16, 18] – аналітично-числові методи, реалізація математичних моделей; [4, 8, 13, 19, 21] – математичне моделювання закономірностей вологоперенесення з урахуванням границі фазових переходів; [3, 5, 20, 22] – розроблення програмного забезпечення для реалізації математичних моделей.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи висвітлено у доповідях та обговорено на: X, XIII та XVI міжнародних науково-технічних конференціях «Системний аналіз та інформаційні технології», SAIT-2008, SAIT-2011, SAIT-2014 (м. Київ, 2008, 2011, 2014); Міжнародній науковій конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту», ISDMCI-2011 (м. Євпаторія, 2011); VI науково-практичній конференції з міжнародною участю «Математичне та імітаційне моделювання систем», МОДС-2011 (м. Чернігів, 2011); IV международной научно-практической конференции «Современные энергосберегающие технологии (сушка и термовлажностная обработка материалов)», СЭТТ-2011 (м. Москва, 2011); VI<sup>th</sup> and XIII<sup>th</sup> International Conferences on Computer Science and Informational Technologies, CSIT-2011, CSIT-2018 (м. Львів, 2011, 2018); Міжнародній науковій конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми штучного інтелекту» (м. Херсон, 2014); International Conference «Advanced Computer Information Technologies» (Чеська Республіка, м. Чеське Будейовіце, 2018); 15th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems, CADSM-2019 (Polyana-Svalyava, 2019); науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу Національного лісотехнічного університету України в період 2008–2018 рр.

**Публікації.** Основні результати роботи опубліковано у 22 працях, зокрема: 10 статей [1-10], у тому числі 8 статей у наукових фахових виданнях України [1, 3-8] та закордонному періодичному видання [2]; 12 публікацій у матеріалах наукових конференцій, праці [1, 2] включено до наукометричної бази Scopus.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота загальним обсягом 208 сторінки складається зі вступу, п'ятих розділів, висновків, списку використаних джерел з 204 найменувань та 4 додатків. Основний текст викладено на 138 сторінках. Робота містить 56 рисунків та 5 таблиць.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, охарактеризовано наукову новизну і практичне значення результатів, наведено дані про публікації та апробацію результатів досліджень, відзначено особистий внесок автора, описано структуру та обсяг роботи.

У **першому розділі** описано огляд та проведено аналіз літератури в області математичного моделювання неізотермічного вологоперенесення та в'язкопружного деформування у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема з урахуванням рухомих меж зони випаровування вологи.

Побудова математичних моделей процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів базується на фундаментальних енергетичних та термодинамічних підходах, закладених та розвинутих у працях О.В. Ликова, Я.С. Підстригача, Я.Й. Бурака, І.В. Сергієнка, Р.М. Кушніра М.В. Булавацького, Є.Я. Чаплі, С.І. Ляшка, І.І. Ляшка, П.П. Костробія, Я.Д. П'янила, А.Я. Бомби, В.Г. Карнаухова, Ю.Ф. Снежкіна, М.І. Нікітенка, О.Ю. Чернухи та їх учнів з використанням методів нерівноважної термодинаміки та механіки спадкових середовищ співвідношення для моделювання складних фізико-механічних процесів.

Вагомий внесок у розроблення математичних моделей тепломасоперенесення та деформування у процесі конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, здійснили Г.С. Шубин, П.С. Серговський, І.В. Кречетов, П.В. Білей, Я.І. Соколовський, Б.І. Гайвась, І.М. Озарків, Н.В. Скуратов, J.-G. Salin, Н.М. Сорокова, Б.Н. Уголєв, К.А. Роценс, О.О. Пінчевська, Б.П. Поберейко, І.М. Крошний, А. Ranta-Maunus, S. Svensson, T. Toratti, О.Р. Дорняк, П.П. Луцик та інші вчені.

Переважає більшість процесів сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, супроводжується поглибленням зони випаровування вологи у середині матеріалу (Т. Шервудом, Г.С. Шубин, Д.Е. Игошин, П.В. Акулич, Н.Н. Гринчик, А. Datta, S.K. Wilson). Границя самого фазового переходу залежить від часу, а її ідентифікація здійснюється у процесі знаходження рішення, що зумовлює нелінійність досліджуваних математичних моделей.

Існують декілька підходів у моделюванні процесів тепломасоперенесення у матеріалах під час сушіння з врахуванням руху поглиблення зони випаровування. Зокрема, критерій фазового переходу, що змінюється за координатою тіла, враховується у граничних умовах. При іншому підході моделювання процесу видалення вологи розглядається у рамках задач Стефана, які є найскладнішими навіть для незначних змін густини матеріалу у зоні випаровування.

Аналітичні дослідження здійснювалися для обмежених випадків наперед відомого закону руху границі, наприклад, лінійного або параболічного. Для цього

використовувалися методи теплових потенціалів, контурного інтегрування, степеневих рядів, «миттєвих» власних функцій Грінберга. Отримання аналітичних розв'язків крайової задачі узагальненого типу в області з рухомою границею фазового переходу за довільним законом зводилося до інтегро-диференціальних рівнянь, зокрема інтегральних рівнянь Вольтера II-го роду зі складними ядрами (Р.В. Арутюнян, В. Кег, М. Prat, Р. Perre). Тому встановлювалися лише якісні результати поведінки таких систем. Досить ефективним методом розв'язання задач нагрівання та кінетики сушіння вологих матеріалів є метод диференціальних рядів.

Числові методи реалізації математичних моделей тепломасоперенесення, які базуються в основному на методах скінчених елементів (об'ємів), граничних елементів та різницевих методах, наведено у працях Л. Сегерлінда, О. Зінкевича, Д.В. Федасюка, Л.М. Журавчак, В.І. Кудіна, В.А. Толока, Й.В. Людкевича, Я.Г. Савули, Г.А. Шинкаренка, С.І. Гоменюка.

Для чисельних реалізацій математичних моделей тепломасоперенесення з фазовими переходами використовуються два основних підходи. Для першого використовуються методи з виділенням границі розділу фаз на кожному часовому шарі за рахунок використання динамічних незалежних змінних або використання динамічних сіток постійної структури із закріпленням вузлів на границях розділу фаз (Г.И. Марчук, С.В. Патанков, А. Simal). Для другого підходу використовуються методи наскрізного розрахунку, зокрема з використання узагальненого формування класичної задачі Стефана, у якій невідомим виступає не температура, а ентальпія (А.А. Самарський, А.Н. Васильєв, W.F. Ames, W.E. Schiesser). Адаптація до границі розділу фаз здійснюється за рахунок використання змінного кроку за часом. У цьому аспекті, важливими є варіаційні методи формування математичних моделей теплоперенесення з використанням методів штрафних функцій.

Розроблення математичних моделей в'язкопружних капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння базується на моделях наслідкової повзучості (Р.И. Нигматулин, В.А. Минненков). Рівняння балансу енергії дисипації на поверхні фазового переходу дає можливість сформулювати умови для зони поглиблення випаровування, враховуючи зберігання незворотних деформацій при фазових переходах. Однак такі моделі описують реологічну поведінку різних середовищ для неперервної історії деформування. Для випадку, коли у процесі деформування капілярно-пористих середовищах наявні фазові переходи і процес деформування на їх границі характеризується розривами, то необхідно враховувати вплив передісторії навантаження до фазового переходу на подальший розвиток напружено-деформованого стану середовища.

Тому існує об'єктивна необхідність побудови математичних моделей неізотермічного вологоперенесення і дослідження впливу термодифузії на масоперенесення і деформування при сушінні капілярно-пористих матеріалів з врахуванням руху зони випаровування для нестационарних режимів сушіння та розроблення ефективних аналітико-числових методів їх реалізації. Такі математичні моделі та методи аналізу дадуть змогу розробляти нові та вдосконалювати існуючі технологічні процеси гідроскопічного оброблення органічних матеріалів, зокрема деревини, оскільки багаточисленні області застосування таких матеріалів вимагають розуміння закономірностей формування кінцевого продукту із заданими фізико-механічними та структурними характеристиками. Виходячи з проведеного аналізу, визначено мету та задачі досліджень.

У **другому розділі** побудовано математичну модель тепломасоперенесення у процесі сушіння з врахуванням границі фазового переходу для капілярно-пористої деревної пластини товщиною  $2L$  ( $-L \leq z \leq L$ ,  $z$  – координата). Пластина віднесена до декартової системи координат. У процесі сушіння пластина контактує з газовим середовищем, яке є сумішшю сухого повітря та пари. Вважаємо, що теплові умови на поверхнях пластини однакові і процес сушіння симетричний відносно серединної поверхні. В процесі сушіння у пластині виникає сушена зона та зона насичена вологістю. Межа контакту  $L_m$  цих зон поширюється в глибину пористої пластини.

Математична модель процесу тепломасоперенесення у пластині під час сушіння з врахуванням зміни у часі границі фазового переходу  $L_m$  будується наступним чином. Рівняння перенесення тепла в області  $0 \leq L_m \leq L$  має вигляд:

$$(\Pi(c_v\rho_v + c_a\rho_a) + (1-\Pi)c_s\rho_s) \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_c \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z} \right) + F, \quad (1)$$

де  $\lambda_c$  – коефіцієнт теплопровідності,  $c_v, c_a, c_s$  – питомі теплоємності пари, повітря, деревного скелету,  $\rho_v, \rho_a, \rho_s$  – густини цих же компонентів вологої пластини,  $F$  – внутрішнє джерело;  $\Pi$  – пористість матеріалу,  $T = T(z, \tau)$  – температура,  $\tau$  – час.

Вплив пористої структури деревної пластини враховується введенням в рівняння Стефана-Максвелла ефективних коефіцієнтів бінарної взаємодії. Система рівнянь Стефана-Максвелла доповнюється рівнянням фільтрації Дарсі з ефективними характеристиками в'язкості  $\mu_g$  і проникливості  $K_g$  та рівнянням стану ідеального газу. Тоді запишемо рівняння Стефана-Максвелла відносно функцій  $\rho_a, \rho_v$  таким чином:

$$\rho_a \frac{K_g}{\mu_g} \vec{\nabla} \left( \frac{\rho_a}{M_a} + \frac{\rho_v}{M_v} \right) RT + D' \vec{\nabla} \rho_a = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \left( \rho_v \frac{K_g}{\mu_g} \vec{\nabla} \left( \frac{\rho_a}{M_a} + \frac{\rho_v}{M_v} \right) RT + D' \vec{\nabla} \rho_v \right) = 0, \quad (3)$$

де  $K_g$  – коефіцієнт проникливості, залежний від радіуса капілярів,  $\mu_g$  – коефіцієнт динамічної в'язкості газу.

Записана нелінійна система диференціальних рівнянь (2)-(3) чинна в області сушіння, яка обмежена граничною поверхнею та поверхнею, що визначається координатою  $L_m$ . Для подальших досліджень прийемо, що на рухомій поверхні  $z = L_m$  густина пари рівна густині насиченої пари, тобто  $\rho_v = \rho_{v0}$ . Умови на граничних поверхнях  $z = L$  запишемо так:

$$\rho_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial z} + D' \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = -j, \quad \rho_a = \rho_{a0}, \quad (4)$$

де  $j = \tilde{\beta}(\rho_v - \rho_{v0})$ ;  $\tilde{\beta}$  – коефіцієнт масообміну. Оскільки задача масоперенесення в подальшому розв'язується в квазістаціонарній постановці, а  $T_m$  – невідома температура фазового переходу є залежною від тиску насичення, то вважатимемо  $T_m = f(P_n)$ , де  $P_n$  – тиск насиченої пари.

Рівняння балансу енергії на рухомій межі фазових переходів  $z = L_m$  запишемо у вигляді:

$$-\lambda_c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_m+0} = r_k \frac{K_g}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial z} \Big|_{z=L_m+0}, \quad T = T_m. \quad (5)$$



Граничні умови на границі  $z=L$  виражають теплообмін між поверхнями пластини і агентом сушіння за законом Ньютона

$$\lambda_c \frac{\partial T}{\partial z} + \tilde{\alpha}(T - T_a(\tau)) = 0, \quad (6)$$

де  $\tilde{\alpha}$  – коефіцієнт теплообміну;  $T_a(\tau)$  – змінна в часі температура агента сушіння. Для моделювання змінних у часі багатоетапних режимів сушіння функція  $T_a(\tau)$  може бути представлена у вигляді полінома від експоненціальних функцій

$$T_a(\tau) = T_1 + (T_2 - T_1) \sum_{i=1}^N (a_i e^{-b_i \tau}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N (\alpha_i e^{-b_i \tau}) \quad (7)$$

Тут для зручності перепозначено:

$$\alpha_0 = T_1, \alpha_i = (T_2 - T_1) a_i; D' = D^{1_{ij}} = (1/D_i^\infty + (1 - \alpha_{ij} z_i)/D_{ij})^{-1}, \quad (8)$$

$D^{1_{va}} = D^{1_{av}} = D'$  – ефективний коефіцієнт дифузії;  $D_{va} = D_{av} = D_{ij}$  – ефективний бінарний коефіцієнт дифузії в макропорах; другий доданок у виразі  $D_v^\infty = D^\infty$  враховує ефект течіння Кнудсена пари в мікропорах. Параметри  $\alpha_i, b_i, (i=\overline{1, N})$  визначаються шляхом апроксимації конкретного температурного режиму агента сушіння.

У початковий момент температура пластини задовольняє умові

$$T(t=0) = f(z), \quad (9)$$

де  $f(z)$  – функції температури для періодів сталої та падаючої швидкостей сушіння.

Швидкість руху межі  $\bar{z}_m = L_m/L$  розділу фазового переходу визначається з умов балансу маси, де  $\rho_L$  – густина води

$$\frac{d\bar{z}_m}{d\tau} = - \frac{j(\bar{z}_m)}{\Pi \rho_L L}, \quad (10)$$

Рівняння (1)–(10) складають нелінійну математичну модель, яка описує конвективний процес сушіння капілярно-пористого тіла (пластини) з врахування рухомої границі фазових переходів.

Розроблено аналітико-числовий метод реалізації математичної моделі для нестационарного режиму агента сушіння, що змінюється за експоненціальним законом (7). Для цього перейдемо до безрозмірної системи координат, використавши заміни  $\tau = a_T t / L^2, \bar{z} = z/L, \bar{z}_m = L_m/L$ , де  $\bar{z}_m$  – безрозмірна координата межі фазового переходу. Аналітичний розв'язок моделі представлено у вигляді

$$T = \chi_0 + \sum_{i=1}^N \chi_i e^{-b_i \tau} + T^*, \quad (11)$$

де  $T_1 = \chi_0 + \sum_{i=1}^N \chi_i e^{-b_i \tau}$  представляє розв'язок рівняння теплопровідності, який задовольняє граничним умовам задачі, але не задовольняє початковій умові. Натомість  $T^*$  є розв'язком задачі теплопровідності, який задовольняє початковій умові і однорідним граничним умовам. Побудовано функцію впливу математичної моделі з однорідними граничними умовами:

$$G(\bar{z}, \bar{z}_m, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} 2H_T \frac{\frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} \left( \cos \mu_n (1 - \xi) + H_T \frac{\sin \mu_n (1 - \xi)}{\mu_n} \right) e^{-\mu_n^2 \tau}}{\cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) \left( (\mu_n^2 + H_T^2) (1 - \bar{z}_m) + H_T \right)}, \quad (12)$$

де  $\mu_n$  – корені трансцендентного рівняння  $tg \mu_n (1 - \bar{z}_m) = -\mu_n / H$ . Використовуючи крайові умови, отримано формули для визначення  $\chi_0$  і  $\chi_i, (i=\overline{1, n})$ .

Для знаходження  $T^*(\bar{z}, \bar{z}_m, \tau)$  використаємо функцію (12), що задовольняє умовам  $T_m(\bar{z}_m, \tau) = 0, u(1, \tau) = 0$ .

Якщо початковий розподіл температури рівномірний, тобто  $T(\bar{z}, 0) = T_0$ , то отримано

$$T_0^*(\bar{z}, \bar{z}_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} \frac{2T_0 H_T}{\Delta_n} \left( \frac{\sin \mu_n (1 - \bar{z}_m)}{\mu_n} - \frac{H_T}{\mu_n^2} (\cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) - 1) \right), \quad (13)$$

Температуру при нестационарному конвективному сушінні можна записати

$$T(\bar{z}, \tau) = \chi_0(\bar{z}) + \sum_{i=1}^N \chi_i(\bar{z}) e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} Z_n(\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (14)$$

де

$$Z_n(\bar{z}_m) = \frac{2T_0 H_T}{\Delta_n} \left( \frac{\sin \mu_n (1 - \bar{z}_m)}{\mu_n} - \frac{H_T}{\mu_n^2} (\cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) - 1) \right) + (Z_{n1} - Z_{n2}), \quad (15)$$

$$Z_{n1} = \sum_{i=1}^N C_i \left( -\frac{\cos(\sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\cos(\sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} + \frac{\cos(\mu_n (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\cos(\mu_n (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right), \quad (16)$$

$$Z_{n2} = \sum_{i=1}^N \frac{C_i H_T}{\mu_n} \left( \frac{\sin(\sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\sin(\sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} - \frac{\sin(\mu_n (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\sin(\mu_n (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right). \quad (17)$$

При цьому  $T^* = T_0^* + T_{\chi}^*$  задовольняє умовам  $T^*(\bar{z}_m, \bar{z}_m) = T^*(\bar{z}_m, 1) = 0$ .

Формула (14) дозволяє обчислити температуру в довільній точці пластини в довільний момент часу сушіння залежно від координати площини фазового переходу.

Для математичного моделювання масоперенесення у процесі конвективного сушіння введемо безрозмірні змінні  $\rho_a = \rho_{a0} \bar{\rho}_a$ ,  $\rho_v = \rho_n \bar{\rho}_v$ ,  $z = L \bar{z}$  та проінтегрувавши рівняння системи (2)-(3), отримаємо математичну модель у вигляді:

$$\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} + b \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + a \frac{1}{\bar{\rho}_a} \frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} = 0, \quad (18)$$

$$\bar{\rho}_v \left( \frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} + b \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} \right) + a \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \beta \cdot a (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) = 0, \quad (19)$$

а крайові умови (4), (5) приймуть вигляд:

$$j = \beta' \rho_n (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}), \quad \bar{\rho}_a = 1 \text{ на поверхні } \bar{z} = 1, \quad \bar{\rho}_v = 1 \text{ на поверхні } \bar{z} = \bar{z}_m. \quad (20)$$

Встановлено співвідношення для визначення безрозмірної густини пари, тиску пари в довільній точці  $\bar{z}$  деревної пластини у процесі сушіння. Отримано рівняння для знаходження зміни відносної вологості в часі та рівняння руху межі розділу фаз висушеної та вологої зон

$$\frac{d\bar{z}_m^*}{dt} = \frac{j(\bar{z}_m^*)}{\Pi \rho_L L} = \frac{\beta \rho_n}{\Pi \rho_L L} \left( - (a_1 + A_1 \bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m^* + A_1^2 \bar{z}_m^{*2}} \right). \quad (21)$$

Отримано розв'язок рівняння (21) при початковій умові  $\bar{z}_m^* = 0$  для  $\tau = 0$ .

У процесі конвективного сушіння важливою характеристикою є тривалість сушіння. На основі запропонованого підходу визначено час, при якому відносна насиченість досягає значення  $\bar{z}_m^*$ . Його можна подати формулою

$$2H_m A_1 \tau = \ln \left| \frac{2A_1 \phi - A_3}{2A_1 \sqrt{A_2 - A_3}} \right| + \frac{1}{2} (A_3^2 - 4A_1^2 A_2) \left( \frac{1}{(2A_1 \phi - A_3)^2} - \frac{1}{(2A_1 \sqrt{\phi A_2 - A_3})^2} \right). \quad (22)$$

Також отримано формулу для визначення повного часу сушіння деревної пластини з урахованням рухомої границі фазового переходу.

На основі математичних моделей проаналізовано залежності зміни температури у процесі сушіння (рис. 1) для різних значень безрозмірного часу  $F_0$  та зміни межі випаровування (рис. 2) у деревній пластині ( $\rho_0=460 \text{ кг/м}^3$ ) для різних значень температури та вологості агента конвективного сушіння.

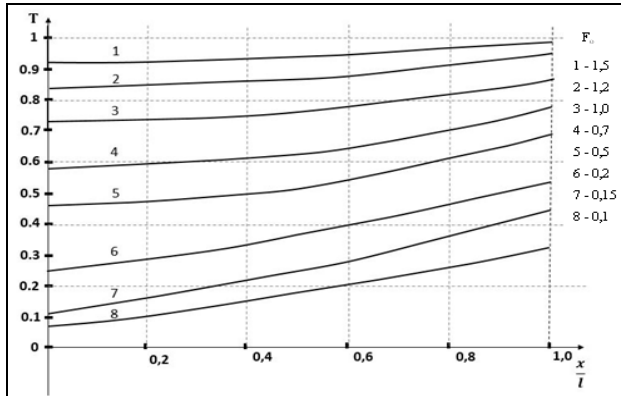


Рис. 1. Зміна відносної температури у процесі сушіння деревної пластини залежно від безрозмірного часу  $F_0$

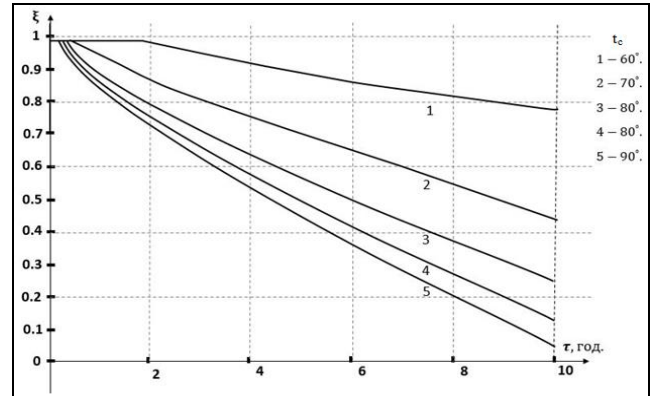


Рис. 2. Зміна межі випаровування у деревній пластині у процесі сушіння для різних значень температури середовища  $t_c$

Перевірка адекватності математичних моделей здійснювалася за допомогою порівняння результатів чисельного моделювання з наявними експериментальними даними перенесення вологості у висушуваній деревині. Також результати моделювання співставленні з відомими розрахунковими моделями на початковому етапі нагрівання деревини. Аналіз результатів свідчить про задовільну збіжність чисельних та експериментальних значень.

У **третьому розділі** здійснено математичне моделювання впливу термодифузії на масоперенесення вологи при сушінні деревної пластини. Математична модель дослідження масоперенесення в осушеній зоні пластини при врахуванні дифузійного, конвективного та теплового потоків описується системою диференціальних рівнянь:

$$\rho_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( (D + 1,064 \sqrt{RT/M_v} \varepsilon) \cdot \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial z} + \delta \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) = 0, \quad (23)$$

$$\rho_a \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + D \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial z^2} = 0, \quad (24)$$

де  $\varepsilon$  – коефіцієнт молекулярного течіння пари. Тут вважаємо, що густина повітря зв'язана з температурою безпосередньо через густину пари.

Граничні умови мають вигляд:

$$\rho_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial z} + (D + 1,064 \varepsilon \sqrt{RT/M_v}) \cdot \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial z} + \delta \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -j, \quad (25)$$

$$\rho_a = \rho_{a0}, z = L, \quad \rho_v = \rho_n, \quad j = \beta(\rho_v - \rho_0), \quad z = L_m,$$

де  $\beta$  – коефіцієнт масообміну,  $\rho_n$  – густина насиченої пари для даної температури,  $\rho_0$  – густина пари в середовищі поза пластинною,  $\rho_{a0}$  – густина повітря на зовнішніх поверхнях пластини.

Встановлено співвідношення для визначення густини пари і тиску в довільній точці пластини

$$\bar{\rho}_v = -A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(\bar{z} - \bar{z}_m) - 2A\delta'(T - T_m)}, \quad (26)$$

$$P(\bar{z}, \bar{z}_m) = \left( -A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(\bar{z} - \bar{z}_m) - 2A\delta'(T(\bar{z}, \bar{z}_m) - T_m)} \right) \frac{\rho_n}{M_v} RT(\bar{z}, \bar{z}_m). \quad (27)$$

Далі, використовуючи (26), (27) та лінеаризовані граничні умови (25) на поверхні  $\bar{z}=1$ , визначено густину потоку  $j$  та втрачену масу вологи у процесі сушіння пластини. Встановлені залежності дозволили отримати рівняння для визначення зміни відносної вологості в часі та рівняння руху межі розділу фаз у процесі сушіння деревної пластини при початковій умові  $\tau=0$ ,  $\bar{z}_m^* = z_m = 0$ :

$$\frac{d\bar{z}_m^*}{d\tau} = \frac{j(\bar{z}_m^*)}{\Pi\rho_L L} = \frac{\beta\bar{z}_m^*}{\Pi\rho_L L} \left( - (a_1 + B\bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3\bar{z}_m^* + A_1^2\bar{z}_m^{*2} - 2A\delta'(T_1 - T_m)} \right). \quad (28)$$

Встановлено залежність для визначення часу, при якому відносна насиченість у висушуваній пластині досягає значення  $\bar{z}_m^*$  за умови  $\partial(T_1 - T_m)/\partial\bar{z}_m^* \ll 1$ , але з врахуванням термоградієнтної складової

$$2H_1 A_1 \tau = \ln \left| \frac{2A_1\phi - (A + \rho_0)}{2A_1\sqrt{A_2} - A_3} \right| + \frac{1}{2} \left( A_3^2 - 4A_1^2 (A_2 - 2A\delta'(T_1 - T_m)_{z_m=1}) \right) \left( \frac{1}{(2A_1\phi - A_3)^2} - \frac{1}{(2A_1 A_2 \sqrt{\phi} - A_3)^2} \right). \quad (29)$$

Проведено числовий аналіз досліджених закономірностей неізотермічного вологоперенесення з урахуванням зони випаровування вологи у процесі конвективного сушіння деревної пластини ( $\rho_0=460$  кг/м<sup>3</sup>). Зокрема, рис. 3 характеризує розподіл відносної концентрації тиску пари  $P/P_0$  для різних значень процесу сушіння, а рис. 4 характеризує залежність температури фазового переходу  $T_m(\bar{z}_m)$  від товщини пластини у процесі конвективного сушіння.

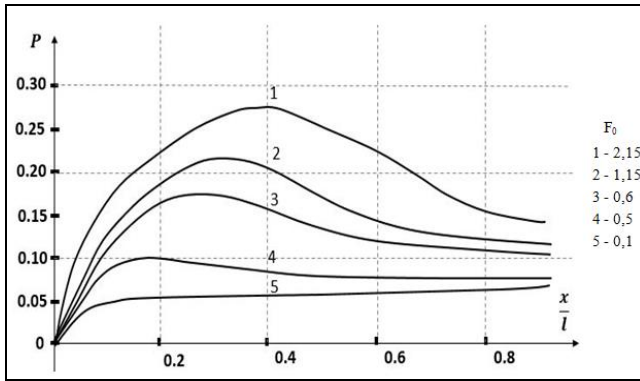


Рис. 3. Зміна тиску пари у процесі сушіння деревної пластини для різних значень часу сушіння

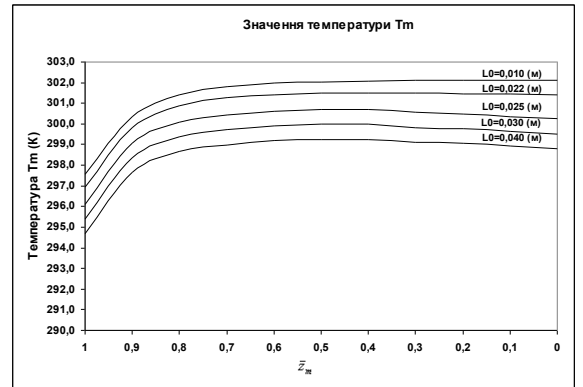


Рис. 4. Залежність температури фазового переходу  $T_m(\bar{z}_m)$  від товщини пластини

Також отримано формулу для визначення повного часу сушіння деревини з урахуванням зміни рухомих меж фазового переходу. Знайдено аналітичну залежність для визначення температури фазового переходу з врахуванням градієнта температури за товщиною пластини.

$$\left( H_T \sqrt{A_2} x_1 + x_2 \right) T_m^2 + \left( x_1 (1 + H_T \Psi) \sqrt{A_2} - x_2 T_{mk} / \alpha_{mk} + r_k K_g T_{mk} H_T \sqrt{A_2} \right) T_m + r_k K_g T_{mk} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) = 0. \quad (30)$$

Тут введені позначення:

$$-\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} + r_k K_g = x_1; \quad r_k K_g (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \alpha_{mk}) = x_2; \quad -r_k K_g T_{mk} H_T \sqrt{A_2} = x_3.$$

Коефіцієнти отриманого рівняння є функціями координати фазового переходу, питомої температури пароутворення, коефіцієнтів тепло- та масообміну, коефіцієнтів провідності та динамічної в'язкості газу, параметрів режиму сушіння, відносних насиченостей вологою поверхні шару і сушильного середовища та градієнта температури, середньої температури скелету. Якщо у цій формулі знехтувати впливом градієнта фазового переходу, то отримаємо наступну залежність температури фазового переходу

$$T_m = \frac{r_k K_g T_{mk} (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) - H_T \sqrt{A_2})}{H_T \sqrt{A_2} (-\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} + r_k K_g) + r_k K_g (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \alpha_{mk})}. \quad (31)$$

З цієї формули випливає, що температура фазового переходу є нелінійною функцією від коефіцієнта теплообміну та масообміну матеріалу, температури агента сушіння, питомої теплоти пароутворення, місцезнаходження координати фазового переходу.

У **четвертому розділі** побудовано двовимірну математичну модель процесу конвективного сушіння анізотропних пористих матеріалів з урахуванням руху границі фазових переходів. Визначено вплив головних компонентів та орієнтації головних осей тензора теплоперенесення на нестационарні температурні поля у призматичному брусі прямокутного поперечного перерізу  $\{2L_1, 2L_2\}$  з урахуванням руху границь фазових переходів. Розроблено аналітично-числовий метод та побудовано алгоритми для реалізації нелінійної математичної моделі при змінних температурних режимах середовища. Вважаємо, що умови сушіння за довжиною бруса є однакові. Тому, розглядаємо задачу розподілу тепла і утворення осушеної зони в його поперечному перетині, зовнішній контур якого в змінних  $x_1, x_2$  описується рівнянням

$$F_0 = (x_1^2 - L_1^2)(x_2^2 - L_2^2) = 0. \quad (32)$$

У процесі теплообміну тіла з сушильним агентом утворюється осушена зона, яка поширюється від зовнішньої поверхні в глибину тіла. Нехай сушену й вологу зони розділяє циліндрична поверхня, твірні якої паралельні осі бруса, а замкнутий контур її поперечного перерізу є їх напрямною лінією. Її рівняння має вигляд:

$$F_m = F_0 - \varepsilon(\tau), \quad (33)$$

де  $\varepsilon(\tau)$  – невідома функція часу.

Температура пористого призматичного ортотропного тіла в осушеній зоні описується рівнянням:

$$(\Pi(C_v \rho_v + C_a \rho_a) + (1 - \Pi)C_s \rho_s) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + (\lambda_{12} + \lambda_{21}) \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} + F(x_1, x_2, \tau). \quad (34)$$

Тут індексами  $v, a, s$  позначимо компоненти пари, повітря та скелету, а  $\Pi, C_v, C_a, C_s, \rho_v, \rho_a, \rho_s$  – пористість, теплоємність, густину пари, повітря, скелету, відповідно;  $\lambda_{ij}$  – компоненти тензора теплопровідності;  $T$  – температура. На поверхнях тіла мають місце граничні умови третього роду.

Визначено головні коефіцієнти теплопровідності через коефіцієнти теплопровідності ортотропного матеріалу та встановлено взаємно однозначне перетворення координат:

$$x_1 = \lambda_{12} x'_1 / \Delta' + \sqrt{(\lambda_{22} - \lambda_2)} \cdot x'_2 / \Delta''; \quad x_2 = (\lambda_{11} - \lambda_1) x'_1 / \Delta' + \lambda_{21} x'_2 / \Delta''; \quad (35)$$

$$\Delta' = \sqrt{(\lambda_{11} - \lambda_1)^2 + \lambda_{12}^2}; \quad \Delta'' = \sqrt{(\lambda_{22} - \lambda_2)^2 + \lambda_{21}^2}.$$

Змінні  $(x'_1, x'_2)$  співпадають з головними напрямками анізотропії теплопровідності пластини. Якщо перейти до змінних  $\xi_1 = (\lambda / \lambda_1)^{1/2} x'_1, \xi_2 = (\lambda / \lambda_2)^{1/2} x'_2$ , то у зоні сушіння використовуємо рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial \tau^*} = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2} \right). \quad (36)$$

Важливим є отримання граничних умов на поверхнях ортотропної призми в змінних  $\xi_1, \xi_2$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i} \pm H_i \cdot (T - u(t)) = 0, \quad (37)$$

де  $H_i^* = \sqrt{\lambda_i / \lambda} \frac{l_1}{m_1 l_2 + m_2 l_1} H_i$ ,  $H_i = \tilde{\alpha}_i / \lambda_i$ ,  $\tilde{\alpha}_i$  – коефіцієнти теплообміну.

Контур поперечного перерізу бруса в змінних  $\xi_1, \xi_2$  описується рівнянням

$$F_0(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \cdot (\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) = 0. \quad (38)$$

Від цієї поверхні процес сушіння рухається всередину тіла. Враховуючи, що об'єм висушеної зони бруса є функцією часу, подаємо рівняння межі осушеної і вологої областей у вигляді:

$$F_m(\xi_1, \xi_2, \tau) = (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)(\xi_2^2 - \Delta_3^2) \cdot (\xi_2^2 - \Delta_4^2) - \delta \varepsilon(\tau) = 0. \quad (39)$$

Введемо такі величини:  $(T(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_m) / (T_{\Pi} - T_m) = \eta$ ,  $\beta = \rho_m c_m \bar{a} / \lambda_m = \bar{a} / \bar{a}_m$ ,  $\tau^* = \tau \bar{a}$ , де  $T_{\Pi}, T_m$  – температура на контурі поперечного перерізу бруса та на межі фазового переходу. З умови неперервності теплового потоку між поверхнями  $F_0$  і  $F_m$ , знаходимо величини  $\eta$ :

$$\eta = \left( (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)(\xi_2^2 - \Delta_3^2) \cdot (\xi_2^2 - \Delta_4^2) - \delta \varepsilon(\tau) \right) / (-\delta \varepsilon(\tau)), \quad \delta = \Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta_3^2 \Delta_4^2. \quad (40)$$

Визначено в явному вигляді рівняння кривої фазового переходу в перерізі бруса:

$$\xi_2 = \pm \sqrt{\delta_3 \pm \sqrt{\delta_4^2 + \frac{\delta \varepsilon(\tau)}{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}}}. \quad (41)$$

Для побудови аналітико-числового методу реалізації математичної моделі адаптовано рівняння теплового балансу в області з урахуванням рухомої межі фазового переходу, обмеженій зовнішнім контуром поперечного перерізу бруса і контуром границі фазового переходу:

$$\int_{F_m}^{F_0=0} \frac{d\eta}{d\tau^*} ds = \int_{F_0} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl + \beta \eta \frac{\partial V}{\partial \tau^*}, \quad V(F_m, F_0) = \int_{F_m=0}^{F_0=0} \int ds = \iint_{S_{\Pi}} ds - \iint_{S_{\Phi}} ds. \quad (42)$$

Для обчислення інтегралів, які входять у формулу (42), в явному вигляді отримано рівняння лінії контура фазового переходу, а також встановлено межі відповідних інтегралів. Подвійні інтеграли в (42) по поверхні між замкнутим контуром  $F_m$  і зовнішнім контуром  $F_0$  будемо знаходити як різницю між інтегралом по поверхні всього перерізу та інтегралом по поверхні  $S_{\Phi}$ , обмеженій контуром  $F_m$ .

Об'єм осушеної зони, віднесений до одиниці довжини бруса, що знаходиться між площинами  $F_0 = 0, F_m = 0$ , визначається за формулами:

$$V(F_0, F_m) = \int_{F_m=0}^{F_0=0} \int dx_1 dx_2 = 4L_1 L_2 - 4\sqrt{\lambda_1 / \lambda} \sqrt{\lambda_2 / \lambda} \int_0^{\gamma} \left( \delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) + \delta \varepsilon} \right)^{1/2} / \left( (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \right)^{1/4} d\xi_1. \quad (43)$$

Визначимо похідну від об'єму по часу, враховуючи залежність від часу величини  $\varepsilon(\tau^*)$  та залежність від часу верхньої границі інтегралу. На основі цього отримаємо:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau^*} = \sqrt{\lambda_1 / \lambda} \sqrt{\lambda_2 / \lambda} \frac{d\varepsilon}{d\tau} (J_v + J(\varepsilon) + A(\varepsilon)), \quad (44)$$

де  $A = f(\gamma(\tau^*), \tau^*) \frac{d\gamma(\tau^*)}{d\tau^*}$  – функціональна залежність,  $J_v, J(\varepsilon)$  – інтеграли. Тут функціями часу є межа інтегрування:

$$\gamma = \sqrt{\delta_1^2 + \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2^2}}, \quad \tau^* = 1/2 \sqrt{\delta_1^2 + \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2^2}} \cdot \Delta_1^2 \Delta_2^2 / 2 \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2^2} \frac{d\varepsilon}{d\tau^*}. \quad (45)$$

Запропонований підхід на основі рівняння теплового балансу (42) з фазовим переходом та залежностями (43)-(45) дозволив отримати рівняння для визначення межі фазового переходу у ортотропному брусі в процесі сушіння у вигляді:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau^*} |J_{s\Pi} - J_\Phi| = \varepsilon (c_1 J_{BB_1} + c_2 J_{BD}) + \varepsilon^2 I \beta \eta (J_V - A). \quad (46)$$

Інтеграли  $J_\Phi(\varepsilon)$ ,  $A(\varepsilon)$ ,  $J_V(\varepsilon)$  по межі фазового переходу визначаються числовим методом. Всі інші величини, які входять у це рівняння, обчислюємо з використанням фізико-теплових характеристик конкретного матеріалу деревини та режимних параметрів сушіння.

Синтезовано та досліджено двовимірну математичну модель теплоперенесення для нестационарних режимів у процесі сушіння капілярно-пористих тіл з урахуванням рухомої межі фазового переходу. Побудовано наближений аналітико-числовий розв'язок нелінійної задачі для триетапного режиму процесу сушіння для випадку, коли розв'язок двовимірної задачі (34)  $T(\xi_1, \xi_2, \tau)$  представлено у вигляді добутку одновимірних задач  $T(\xi_1, \xi_2, \tau) = T_1(\xi_1, \tau) T_2(\xi_2, \tau)$ . Шуканий розв'язок задачі визначення температури представлено у вигляді:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{BB_1} = \frac{\partial(T_1 T_2)}{\partial x_1} = T_2 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = T_2 \sqrt{\lambda_1 / \lambda} H_1(T_1 - u(\tau)) = H_1^*(T_1 - u_1(\tau)), \quad (47)$$

$$T_{1i}(\xi_i, \tau) = \varphi_{0i}(\xi_i) + \sum_{n=1}^p (\varphi_{ni}(\xi_i) \cos v_{ni}^2 \tau + \chi_n(\xi_i) \sin v_{ni}^2 \tau), \quad (i=1,2) \quad (48)$$

$$T_i^*(\xi_i, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{ni} \frac{\sin \mu_{ni}(\xi_i - \xi_{mi})}{\mu_{ni}} \exp(-\mu_{ni}^2 \tau), \quad (49)$$

де коефіцієнти  $A_{ni}$  є функціями частотних характеристик  $v_k$ ,  $\mu_k$ , пов'язаних з характеристиками нестационарного режиму процесу сушіння та величиною фазового переходу;  $\varphi_{ni}$ ,  $\chi_{ni}$  – визначаємо за допомогою гіперболічно-тригонометричних функцій.

Отримано формули для визначення температури у довільній точці деревного бруса у довільний момент часу сушіння залежно від координати площини фазового переходу, зміни температури та вологості агента сушіння.

У **п'ятому розділі** побудовано математичну модель реологічної поведінки деревної пластини з урахуванням зони випаровування вологи, яка поділяє пластину на дві області з різними структурними і реологічними властивостями залежно від зміни межі фазового переходу. У вологій зоні пластини, яка характеризується в'язкопружними властивостями, використано реологічну модель Кельвіна-Фойгта.

На її основі для випадку одновимірного вологісного поля у процесі сушіння деревної пластини товщиною  $2l$  з урахуванням реологічної поведінки деревини, отримано математичну модель у вигляді

$$\tau_0 \tau_1 \frac{\partial^2 \varepsilon_B(\tau)}{\partial \tau^2} + (\tau_0 + \tau_1) \frac{\partial \varepsilon_B(\tau)}{\partial \tau} + \varepsilon_B(\tau) = \frac{4G\tau_1 + 3K\tau_0}{18GK} \frac{\partial \sigma_B}{\partial \tau} + \frac{4G + 3K}{4G\tau_1 + 3K\tau_0} \sigma_B, \quad (50)$$

де  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – відповідно, напруження і деформації,  $G$ ,  $K$  – модулі пружності та об'ємного розширення;  $\tau_0$ ,  $\tau_1$  – часи релаксації. Граничні умови характеризують відсутність напружень і деформацій у деревній пластині на початку процесу

сушіння:  $\sigma=0$ ,  $\varepsilon=0$  для  $\tau=0$ . Напружено-деформівний стан деревної пластини у висушеній зоні з урахуванням деформації всихання  $\varepsilon_w$  описується законом Гука.

Шляхом інтегрування (50) з початковими умовами ( $\tau=0, \varepsilon=0, \partial\varepsilon/\partial\tau=0$ ) отримано математичну модель для визначення напружено-деформівного стану деревної пластини у процесі конвективного сушіння з урахування рухомої зони випаровування вологи  $z \leq z^*$  у вигляді:

$$\sigma(\tau) = A_0 \varepsilon(\tau) + A_1 \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} + A_2 \int_0^\tau \varepsilon(\tau') \exp(-b_0(\tau - \tau')) d\tau', \quad (51)$$

де введені такі позначення:  $A_0 = (E(\tau_0 + \tau_1)b_1 - 3(1-\nu)\tau_1\tau_0)/b_1^2$ ;  $A_1 = E\tau_0\tau_1/b_1$ ;

$$A_2 = \frac{E}{b_1^3} (b_1^2 - 3(1-\nu)(\tau_1 + \tau_0)(b_1 + 9(1-\nu)^2\tau_0\tau_1)); \quad b_0 = \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)\tau_1 + (1+\nu)\tau_0}; \quad b_1 = 2\tau_1(1-2\nu) + \tau_0(1+\nu).$$

Для висушеної зони  $z^* \leq z \leq l$  відповідно можна записати

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon + \varepsilon_w / 3) / (1-\nu). \quad (52)$$

Через  $E$  і  $\nu$  позначено модуль пружності та коефіцієнти Пуассона деревини, які у загальному випадку є функціями вологості і температури, тобто  $E = E(U, t)$ ,  $\nu = \nu(U, t)$ .

Для визначення деформацій  $\varepsilon_w$  у процесі сушіння деревної пластини, які входять у (51) та (52) з врахуванням зони випаровування вологи використано співвідношення:

$$\varepsilon_w = \beta_1 \Delta U^{(1)} = \beta_1 \Delta(U_1(z, \tau) - U_0), \quad 0 < z \leq z^*; \quad (53)$$

$$\varepsilon_w = \beta_2 \Delta U^{(2)} = \beta_2 \Delta(U_2(z, \tau) - U_0), \quad z^* < z \leq l,$$

де  $\beta_i$ ,  $U_i (i=1,2)$  – коефіцієнти всихання та значення вологовмісту,  $U_0$  – вологовміст у початковий момент процесу сушіння.

Приймаємо, що швидкість руху межі фазового переходу рівна  $V = -dz^*/d\tau = j/\rho$ , де  $j$  – потік вологи, який визначається за розробленими математичними моделями. Він може визначатися за формулою  $j = A/(1 - z^*/l)$ , де  $A = l/2t_1$  – стала, яка залежить від теплофізичних характеристик вологості:  $A = [D]MP_s/RTl$ . Такі допущення дозволяють здійснити перехід від часу до координати межі випаровування за формулою  $\xi_* = 1 - z^*/l = \sqrt{2A\tau/l}$ , оскільки  $\xi_*(\tau) = \sqrt{\tau}$ ,  $d\xi_*(\tau)/d\tau = (2\xi_*)^{-1}$ . У свою чергу це дозволяє визначити у явному вигляді деформації  $\varepsilon(\xi_*)$  на межі фазового переходу. Проведено дослідження напружень і деформацій у вологій та висушеній зонах деревної пластини. Показано, що напруження і деформації для різних значень зони випаровування характеризується немонотонністю у часі (рис. 5), зміщенням значення максимальних напружень у вологу зону і мають розрив на межі  $\xi_*$ .

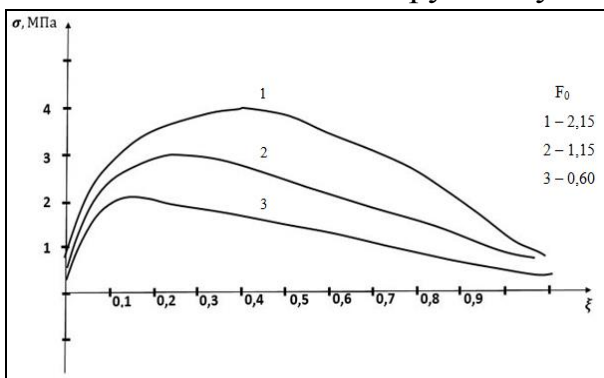


Рис. 5. Зміна напружень  $\sigma$  у деревній пластині для різних значень часу сушіння

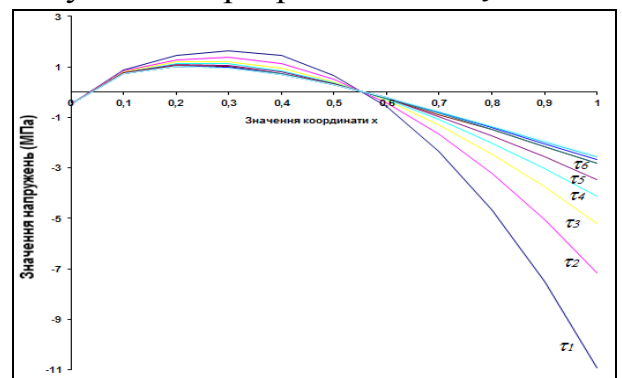


Рис. 6. Зміна напружень для  $\beta \cdot \beta_1 / \alpha_1 = 0,1$  у часі



Також досліджено вплив взаємозв'язку процесів дифузії тепла і вологи на зміну напружень у процесі сушіння деревної пластини (рис. 6). Аналіз залежностей свідчить про суттєвий вплив величин  $\alpha \cdot \beta_1 / \alpha_1$ ,  $\beta \cdot \beta_1 / \alpha_1$  ( $\alpha_1$  – коефіцієнт лінійного всихання) на зміну напружень. Зокрема, збільшення величини  $\beta \cdot \beta_1 / \alpha_1$  змінює не тільки кількісний, але і якісний характер напружень у деревній пластині. Для значень величини  $Lu \cdot \beta_1 / \alpha_1$  ( $Lu$  – критерій інерційності), які відповідають меншим значенням дифузії вологи у порівнянні з перенесенням тепла, якісний характер зміни напружень не спостерігається.

Проведене чисельне дослідження процесу тепломасоперенесення у деревині з урахуванням рухомих границь фазових переходів та його порівняння з наявними експериментальними даними зміни вологості і температури у матеріалі показали, що розроблені математичні моделі та числово-аналітичні методи можуть бути ефективно застосовані для моделювання конвективного процесу сушіння деревини з метою розроблення нових та вдосконалення існуючих технологічних режимів сушіння.

## ВИСНОВКИ

У дисертації вирішено актуальне наукове завдання побудови математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язкопружного деформування при конвективному сушінні капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з врахуванням руху зони випаровування для нестационарних режимів агента сушіння та розроблення ефективних аналітико-числових методів їх реалізації, що має важливе значення для обґрунтування раціональних режимів та підвищення ефективності технологічного процесу за умови забезпечення необхідної якості продукції.

1. Побудовано нелінійну математичну модель неізотермічного вологоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомих границь зони випаровування вологи, яка дозволяє отримати аналітичні залежності для визначення температури, вологості, густини пари, тиску пари у деревній пластині у довільний момент часу сушіння залежно від координати фазового переходу, теплофізичних характеристик матеріалу та параметрів агента сушіння.

2. Дістав подальший розвиток аналітично-числовий метод для визначення неізотермічного вологоперенесення при нестационарних режимах процесу сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу. Отримано рівняння для визначення рухомої межі розділу висушеної та вологої зон деревної пластини. Встановлено розрахункові співвідношення для визначення температури фазового переходу з урахуванням градієнтів перенесення та часу, для якого відносна насиченість досягає границь фазового переходу. Коефіцієнти отриманого рівняння є функціями координати фазового переходу, питомої температури пароутворення, коефіцієнтів тепло- та масообміну, коефіцієнтів провідності та динамічної в'язкості газу, параметрів режиму сушіння, відносних насиченостей вологої поверхні шару і сушильного середовища та градієнта температури, середньої температури матеріалу. Встановлені залежності для визначення повного часу сушіння з урахуванням рухомої границі фазового переходу.

3. Сформульована двовимірною математичною моделлю теплоперенесення для нестационарних режимів конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів з

урахуванням рухомих меж зони випаровування. На основі розробленого аналітико-числового методу реалізації даної моделі отримані формули для визначення температури деревного бруса у довільний момент часу сушіння залежно від координати рухомої межі фазового переходу та температури на межі випаровування.

4. Адаптовано рівняння теплового балансу з урахуванням рухомої межі фазового переходу. Це дозволило розробити аналітично-числовий метод для розрахунку теплоперенесення в ортотропній пластині з рухомою границею фазових переходів та отримати рівняння для визначення рухомих меж фазового переходу у прямокутній ортотропній. Побудовано алгоритм для визначення рухомої межі зони випаровування у деревному брусі та досліджено закономірності її зміни залежно від ортотропних теплофізичних характеристик матеріалу, температури і відносної вологості агента сушіння.

5. Побудовано математичну модель в'язкопружного деформування капілярно-пористої пластини в умовах зміни вологоперенесення з врахуванням зони випаровування вологи. Встановлено закономірності розвитку компонент напружень у деревині під час сушіння залежно від зміни температури, вологовмісту, зони випаровування вологи та технологічних параметрів агента сушіння. Показано немонотонність характеру розтягуючих напружень у часі для різних значень зон випаровування та зміщення їхнього максимуму у середину пластини зі збільшенням тривалості сушіння. Виявлено наявність стискаючих напружень у висушеній зоні пластини для початкових стадій процесу сушіння.

6. У результаті обчислювальних експериментів, проведених з використанням розроблених прикладних програмних засобів, встановлено закономірності впливу анізотропії теплофізичних та механічних характеристик деревини, її початкової вологості, геометричних параметрів і характеристик агента сушіння на зміну температурно-вологісного та в'язкопружного стану деревини під час конвективного сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу. Досліджено вплив термодифузії початкових значень температури і вологості, теплофізичних характеристик матеріалу та режимних параметрів агента сушіння на температуру фазових переходів. Встановлено закономірності протікання дифузійного і конвективного тепломасоперенесення для різних періодів процесу сушіння залежно від зони випаровування вологи. Виявлено задовільну узгодженість результатів чисельного моделювання з відомими експериментальними дослідженнями для часткових випадків.

7. Отримано узагальнення гіпотези збереження незворотних деформацій на випадок в'язкопружного деформування капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомої границі випаровування вологи.

8. Результати дисертаційної роботи використано в ТзОВ «Суховільський ДОК» (Городоцький р-н, Львівська обл.) для аналізу температури, вологовмісту та компонентів в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння з урахуванням рухомих меж зони випаровування вологи, що дає можливість раціонального вибору температурних режимів конвективного сушіння та забезпечення необхідної якості продукції. Результати наукових досліджень використано та відображено у програмах навчальних дисциплін кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

### Статті у наукових фахових виданнях

1. Соколовський Я.І., Борецька І.Б. Математичне моделювання конвективного сушіння деревини з врахуванням границь фазових переходів // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології: зб. наук. праць. 2015. № 826. С. 219-230.
2. Sokolovskyy Ya., Boretska I., Gayvas V. Mathematical modeling of moving boundaries of phase transition in the process of drying anisotropic plate // Journal of Engineering Research and Application. 2018. Vol. 8, No. 12. P. 57-63.
3. Гайвась Б.І., Борецька І.Б. Вплив режиму сушильного агента на осушення пористих тіл // Комп'ютерні технології друкарства: зб. наук. пр. 2011. № 26. С. 231-240.
4. Sokolovskyy Ya., Boretska I., Rozhak P. Computer-aided and drying and vesearch of chambers of wood drying by Means of SolidWorks API and COSMOSFloWorks // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2013. Вип. 17. С. 175-185.
5. Гайвась Б.І., Борецька І.Б. Осушення пористих тіл у сушильних камерах за м'яких режимів // Науковий вісник НЛТУ України. 2011. Вип. 21.9. С. 317-326.
6. Соколовський Я.І., Борецька І.Б., Дендюк М.В. Аналіз впливу зв'язку перенесення тепла і вологи на напружено-деформівний стан у деревній пластині // Науковий вісник НЛТУ України. 2010. Вип. 20.12. С. 309-314.
7. Соколовський Я.І., Борецька І.Б. Моделювання нелінійної реологічної поведінки деревини // Науковий вісник НЛТУ України. 2009. Вип. 19.2. С. 275-279.
8. Sokolovskyy Ya., Boretska I., Rozhak P. Computer-aided design and research of forest drying chambers by means of SolidWorks API // Техніка та енергетика. 2013. Вип. 185, част. 2. С. 215-218.
9. Sokolowskyu Ya., Boretska I., Yatsyshyn S., Kaspryshyn Ya. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition // CEUR Workshop Proceedings. 2018. Vol. 2300. P. 83-86. (SCOPUS).
10. Борецька І.Б. Математичне моделювання впливу термодифузії на поглиблення зони випаровування вологи у процесі сушіння // Технічні вісті. 2015. Вип. 2015/1(42), 2(43). С. 60-67.

### Тези доповідей, матеріали наукових конференцій

11. Mathematical models and analysis of the heat-mass-transfer in anisotropic materials taking into account the boundaries of phase transition / Ya Sokolovskyy, I. Boretska, V. Gayvas, I. Kroshnyu // The Experience of Designing and Application of CAD Systems 'CADSM 2019': proc of 15 Intern. Conf., 26 February – 2 March, 2019. Polyana-Svalyava (Zakarpattya), 2019. P. 28-33. (SCOPUS).
12. Mathematical modeling of the heat-mass-exchange in anisotropic environments taking into account the boundary of phase transition / Ya. Sokolovskyy, I. Boretska, V. Gayvas, I. Kroshnyu // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2018': proc. of the 13th Intern. Sci. and Techn. Conf., 11-14 Sept. 2018. Lviv, 2018. P. 147-150. (SCOPUS, WEB of SCIENCE).
13. The numerical modeling of the deformational-relaxation and heat-mass exchange fields in capillary-porous materials with fractal structure / Y. Sokolowskyu, V. Shymanskyi, I. Boretska, O. Sykala // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2011': proc. of the 6th Intern. Sci. and Techn. Conf. Lviv, 2011. P. 210-213.

14. Вплив режиму сушіння на процеси тепломасоперенесення в пористому шарі / Я.Й. Бурак, Б.І. Гайвась, І.Б. Борецька // System Analysis and Informational Technologies 'SAIT-2011'. Київ, 2011. С. 62-63.
15. Mathematical modeling of capillary-porous materials elastic-viscous-plastic deformation on the drying process / Ya. Sokolowskyu, I. Kroshnyi, I. Boretska, O. Sykala // System Analysis and Informational Technologies 'SAIT 2014': proc. of the 16-th International Conference, 26-30 May, 2014. Kyiv, 2014. P. 323.
16. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition / Ya. Sokolowskyu, I. Boretska, S. Yatsyshyn, Ya. Kaspryshyn // Advanced Computer Information Technologies: proc of the International Conference, 1-3 June, 2018. Czech Republic, Ceske Budejovice, 2018. P. 83-87.
17. Автоматизация технологии моделирования и анализа деформационно-релаксационных и тепломассообменных технологий при сушке древесины / Я.И. Соколовский, О.В. Мокрицкая, И.Б. Борецкая // Современные энергосберегающие технологии (сушка и термовлажностная обработка материалов): IV-я междунар. науч.-практ. конф. 'СЭТТ-2011'. Москва, 2011. С. 118-121.
18. Моделювання реологічної поведінки капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський, І.Б. Борецька, В.Я. Семенюк // Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми штучного інтелекту. Херсон: ХНТУ, 2014. С. 177-178.
19. Mathematical modeling of the two-dimensional nonisothermal moisture transfer and viscoelasticity state of wood in the process of drying / Ya. Sokolowskyu, A. Bakalletz, O Mokrytska, I. Kapran, I. Boretska // Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту 'ISDMCI 2011': міжнар. наук. конф. Євпаторія, 2011. С. 102-108.
20. Modeling deformation of wood with changeable potentials of mass heat transfer / Ya. Sokolowskyu, B. Pobereyko, A. Bakalletz, I. Senkiv, I. Boretska // Системний аналіз та інформаційні технології: X міжнар. наук.-техн. конф. Київ, 2008. С. 30-31.
21. Автоматизація аналізу та моделювання деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів / Я.І. Соколовський, І.Б. Борецька, О.В. Мокрицька, В.М. Шиманський, А.П. Здолбіцький // Математичне та імітаційне моделювання систем 'МОДС 2011': VI наук.-практ. конф. з міжнар. участю. Чернігів, 2011. С. 88-89.
22. Застосування штучних нейронних мереж для чисельного моделювання тепломасообмінних процесів / Я.І. Соколовський, І.М. Крошний, І.Б. Борецька, І.Д. Капран // Математичне та імітаційне моделювання систем 'МОДС 2011': VI наук.-практ. конф. з міжнар. участю. Чернігів, 2011. С. 92-93.

## АНОТАЦІЇ

**Борецька І.Б. Математичне моделювання конвективного процесу сушіння деревини з врахуванням границь фазових переходів.** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет "Львівська політехніка" Міністерства освіти і науки України, Львів, 2019.

Дисертацію присвячено вирішенню актуального науково-прикладного завдання побудови та реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та

в'язко-пружного деформування при сушінні капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з врахуванням руху зони випаровування для нестационарних режимів сушіння та розроблення ефективних аналітико-числових методів їх реалізації. Побудовано нелінійну математичну модель неізотермічного вологоперенесення під час сушіння анізотропних капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини з врахуванням рухомих границь зони випаровування вологи. Розроблено аналітично-числовий метод для визначення теплоперенесення в ортотропній деревній пластині з рухомою границею фазових переходів та встановлення рухомих меж фазового переходу у прямокутній області з врахуванням головних осей анізотропії. Побудовано математичну модель в'язкопружного деформування капілярно-пористої пластини в умовах зміни вологоперенесення з врахуванням зони випаровування вологи. Розроблено прикладне програмне забезпечення для реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з врахуванням руху зони випаровування. Встановлено закономірності впливу анізотропії теплофізичних та механічних характеристик деревини, її початкової вологості, геометричних параметрів і характеристик агента сушіння на зміну температурно-вологісного та в'язкопружного стану деревини під час конвективного сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу.

Встановлено розрахункові співвідношення для визначення температури фазового переходу з урахуванням градієнтів перенесення та часу, для якого відносна насиченість досягає границь фазового переходу.

*Ключові слова:* математична модель, аналітично-числовий метод, неізотермічне вологоперенесення, в'язко-пружне деформування, границя фазового переходу, процес сушіння.

### **Борецкая И.Б. Математическое моделирование конвективного процесса сушки древесины с учетом границ фазовых переходов. – Рукопись.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Национальный университет “Львівська політехніка” Министерства образования и науки Украины, Львов, 2019.

Диссертация посвящена решению актуальной научно-прикладной задачи построения и реализации математических моделей неізотермического влагопереноса и вязкоупругой деформации при сушке капиллярно-пористых материалов, в частности древесины, с учетом движения зоны испарения для нестационарных режимов сушки, и разработке эффективных аналитико-числовых методов их реализации. Построена нелинейная математическая модель неізотермического влагопереноса во время сушки анізотропных капиллярно-пористых материалов, в частности древесины с учетом подвижных границ зоны испарения влаги. Разработан аналитически-числовой метод для анализа теплопереноса в ортотропной древесной пластинке с подвижной границей фазовых переходов и определения подвижных границ фазового перехода в прямоугольной области с учетом главных осей анізотропии. Построена математическая модель вязкоупругого деформирования капиллярно-пористой пластины в условиях изменения влагопереноса с учетом зоны испарения влаги. Разработано прикладное программное обеспечение для реализации математических моделей неізотермического влагопереноса и вязко-упругой деформации

в средах с учетом движения зоны испарения. Установлены закономерности влияния анизотропии теплофизических и механических характеристик древесины, ее начальной влажности, геометрических параметров и характеристик агента сушки на смену температурно-влажностного и вязкоупругого состояния древесины при конвективной сушке с учетом динамики изменения границы фазового перехода.

Установлены расчетные соотношения для определения температуры фазового перехода с учетом градиентов переноса и времени, для которого относительная насыщенность достигает границ фазового перехода.

*Ключевые слова:* математическая модель, аналитическо-числовой метод, неизотермических влагоперенос, вязкоупругое деформирование, граница фазового перехода, процесс сушки.

**Boretska I. Mathematical modeling of convection drying process of wood taking into account the boundary of phase transitions.** – Manuscript.

The dissertation for earning PhD in technical sciences (*Kandidat* of technical sciences), specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2019.

The dissertation is devoted to solving the urgent scientific and applied task of constructing and implementing mathematical models of nonisothermic moisture transfer and visco-elastic deformation during drying of capillary-porous materials, in particular wood, taking into account the movement of the evaporation zone for non-steady drying schedules, as well as to the development of effective analytical and numerical methods for their implementation. A new nonlinear mathematical model of non-isothermic moisture transfer during drying of anisotropic capillary-porous materials is constructed, taking into account the moving boundaries of the moisture evaporation zone. An analytical-numerical method for the determination of non-isothermic moisture transfer under non-steady schedules of the drying process has been developed, taking into account the dynamics of the phase transition boundary change. An analytical-numerical method has been developed for determining heat transfer in an orthotropic plate with a moving boundary of phase transitions and for setting moving boundaries of a phase transition in a rectangular region, taking into account the main axes of anisotropy. Constructed is a mathematical model of visco-elastic deformation of capillary-porous plate under conditions of changing moisture transfer, taking into account the zone of evaporation of moisture. Application software has been developed to implement mathematical models of non-isothermic moisture transfer and visco-elastic deformation in media, taking into account the motion of the evaporation zone. Calculation relationships are established for determining the phase transition temperature taking into account transport gradients and time for which the relative saturation reaches the boundaries of the phase transition. Identified are the influence patterns of anisotropy of thermophysical and mechanical characteristics of wood, its initial moisture content, geometrical parameters and characteristics of the drying agent on the change in the temperature-moisture and visco-elastic state of the wood during convection drying, taking into account the dynamics of the phase transition boundary. The effect of thermal diffusion, thermal-and-physical properties of the material, and operating parameters of the drying agent on the temperature of phase transitions is studied.

*Key words:* mathematical model, analytical-numerical method, non-isothermal humidity transfer, visco-elastic deformation, boundary of phase transition, drying process.

Підписано до друку 07.11.2019 р.  
Формат 60×90 1/16. Папір офсетний.  
Друк на різнографі. Умовн. друк арк. 1,5. Обл.-видав. арк. 0,89.  
Тираж 100 прим. Зам.

Поліграфічний центр  
Видавництва Національного університету «Львівська політехніка»  
вул. Ф.Колесси, 4, 79013, Львів  
*Реєстраційне свідоцтво серії ДК №4459 від 27.12.2012 р.*